I.

EINLEITUNG

1. Philosophische Logik

Der Begriff *Logik* ist eigentlich eine Ellipse: “Logik von was?” ist die Frage, die immer sogleich beantwortet werden will. Im Falle der Aussagenlogik lautet die Antwort: Das ist die Logik der darin herausgestellten Junktoren, typischerweise der Negation, Konjunktion, Disjunktion und Implikation. In der Prädikatenlogik treten der All- und Existenz-Quantor hinzu, was erfordert, daß die Prädikationsstruktur von Aussagen freigelegt wird. Die genannten Junktoren und Quantoren sind Beispiele einer Ausdruckssorte, die manchmal “logische Partikel” (auch “logische Konstanten”) genannt werden. Auf die Gefahr hin, sich im Kreise zu bewegen, könnte man sagen: Eine Logik ist eine logische Theorie bestimmter logischer Partikel. Das lädt sofort zwei weitere Fragen ein: Was ist eine logische Theorie (im Unterschied zu anderen Theorien)?, und: Was ist ein logischer Partikel (im Unterschied zu anderen Ausdrücken)?

Auf die erste Frage gibt dieses Buch eine Teilantwort, indem es Beispiele logischer Theorien vorführt. Auf die zweite Frage antworten wir hier ebenso teilweise, indem wir bestimmte Ausdrücke zum Gegenstand logischer Theorien machen. Die grundsätzliche Frage nach der “Natur” logischer Theorien und Partikel – falls sie denn eine haben sollten – ist Gegenstand der Philosophie der Logik, die wir nur gelegentlich in diesem Buch streifen werden. [1]

Nun könnte man versucht sein – ausgehend von der Frage “Logik von was?” –, den charakteristischen Gegenstand einer Philosophischen Logik

[1] Beide Fragen werden z.B. in dem Buch [294] von Alexandra Zinke eingehend behandelt. Philosophische Logik und Philosophie der Logik sind manchmal nur schwierig zu trennen. Besondes deutlich wird das im Kapitel IV über Konditionale.

so zu bestimmen: Es muß sich um etwas handeln, das in der philosophischen Theorienbildung eine wichtige Rolle spielt. Die Modallogik unter den typischen Interpretationen einer Logik der Notwendigkeit, des Glaubens, des Wissens, oder des Gebotenseins behandelt sicher zentrale theoretische Termini der Metaphysik, der Erkenntnistheorie und der Ethik. Und die Logik kontrafaktischer Konditionale trägt ebenso sicher bei zu einer philosophischen Theorie kausaler Abhängigkeit. Vermutlich ist in solchen Überlegungen der Ursprung des Begriffs 'Philosophische Logik' zu suchen. Aber eigentlich paßte der Begriff nie so recht. Denn zu den typischen Interpretationen der Modallogik gehörte beispielsweise immer auch schon die temporale. Zeitordnungen sind jedoch nicht nur Gegenstand philosophischer Theorien, sondern auch physikalischer. Das Gleiche gilt für den Begriff der Kausalität. Die Modal- und Konditionallogik sind also bestenfalls *auch* philosophische Logiken – aber nicht nur.

Vom vermutlichen Ursprung des Begriffs einer Philosophischen Logik haben wir uns jedenfalls weit entfernt. Wenn wir uns das wachsende Corpus Philosophischer Logiken ansehen, wie es beispielsweise in den zwei Auflagen des *Handbook of Philosophical Logic* [93] vorgelegt wird,[2] dann fällt auf, daß die einzelnen Bände nur durch eine *Ähnlichkkeit* der Themen oder Methoden zusammengehalten werden. Nun ist Ähnlichkeit keine transitive und also keine Äquivalenzrelation, so daß nicht sinnvoll gefragt werden kann, in welcher Hinsicht alle Philosophischen Logiken *gleich* sind und sich z.B. von der einfachen Aussagen- oder Prädikatenlogik unterscheiden. Es gibt keinen nicht-trivialen Aspekt, den diese Theorien wesentlich gemein haben. Im Übergang von der ersten zur zweiten Auflage des *Handbook* fällt weiter auf, daß sich der Anwendungsschwerpunkt zunehmend von der Philosophie in die Informatik verlagert hat.

Es ist nicht sinnvoll, nun legislativ tätig werden zu wollen, indem man den Begriff einer Philosophischen Logik normativ zurückschneidet. Der Begriff ist offen, und das ist gut so. Wir können unter den so benannten Theorien jedoch solche auswählen, die für die Belange der Philosophie von besonderem Interesse sind. Eine solche Auswahl bietet dieses Buch an.

Wir beginnen mit der *Zeitlogik* in Kapitel II. Das ist eine generische Bezeichnung für eine Familie von Modallogiken unter einer bestimmten, nämlich temporalen Interpretation. Aus rein formaler Perspektive ist diese Interpretation eine unwesentliche Heuristik. Aber wie jede gute Heuristik hilft sie, sich zu orientieren. Sie führt auch beispielhaft vor Augen, daß Philosophische Logiken etwas modellieren wollen, was außer ihnen liegt. In diesem Fall ist es das Phänomen der vergehenden Zeit. Zeitlogik ist zumin-

---

[2] Vier Bände in der ersten Auflage 1983–89, 18 Bände bis 2018 in der zweiten Auflage.

dest wesentlicher Teil einer Philosophie der Zeit.

Wir würden einen wichtigen Aspekt der logischen Theorie der Zeit verpassen, wenn wir nicht bemerken würden, wie allgemein diese Theorie tatsächlich ist. Wenn wir die theoretischen Termini einer Theorie durch die Methode der Ramsey-Sätze individuieren,[3] dann kann der Ramsey-Satz einer bestimmten Zeitlogik ununterscheidbar sein von dem einer Logik, die wir mit einer ganz anderen Heuristik versehen. Es handelt sich in dem Fall um *dieselbe* Logik, nur unter anderer (heuristischer) Interpretation ihrer theoretischen Termini. Diese Interpretation wird von der betrachteten Logik nicht festgelegt. Zeitlogik ist also nicht wesentlich Logik der *Zeit*. Im dritten Kapitel sehen wir daher von einer bestimmten Interpretation ab und gehen über zur allgemeinen *Modallogik*. Auch hier soll der Orientierung des Lesers ein wenig geholfen werden, indem wir eine Heuristik als Leitmotiv angeben: Wir lesen den Operator $\Box$ im Sinne irgendeiner Notwendigkeit. Das schließt doxastische, epistemische und deontische Notwendigkeit mit ein.

An die Modallogik schließt sich natürlich die *Konditionallogik* (Kapitel IV) an. Viele Konditionale drücken so etwas wie eine bedingte Notwendigkeit aus, so daß die Logik solcher Konditionale als eine Verallgemeinerung der Modallogik aufgefaßt werden kann. Es gibt jedoch viele Arten von Wenn-dann-Aussagen, von denen nur einige modal sind. Die Frage ihrer richtigen Einteilung und semantischen Analyse ist in hohem Grade umstritten. Das Kapitel über Konditionale versucht, den Leser durch dieses Dickicht von Theorien zu führen und einen Sinn dafür zu entwickeln, wie solche Theorien zu beurteilen sind.

In den folgenden drei Kapiteln, V–VII, geht es gewissermaßen weiter um Konditionale. Im Kapitel V über *parakonsistente Logik* betrachten wir Konditionale, die Folgerungsverhältnisse ausdrücken und versuchen diese unter die Bedingung zu stellen, daß aus widersprüchlichen Annahmen nicht Beliebiges folgt. In Kapitel VI über Relevanzlogik soll die Implikation $\rightarrow$ eine echte Beziehung zwischen Antezedens und Konsequens ausdrücken, so daß die Wahrheit von $A \rightarrow B$ nur beurteilt werden kann, wenn *beide*, A und B, aufeinander bezogen werden ("relevant" für einander sind). Die Modelltheorie der Relevanzlogik verallgemeinert die Methoden der Modal- und Konditionallogik und bietet eine sehr allgemeine Theorie konditionaler Konstruktionen an.

In Kapitel VII über *anfechtbares Schließen* geht es um nicht-deduktive Folgerungsverhältnisse. Damit sind Folgerungen gemeint, bei denen die Konklusion nicht logisch zwingend (deduktiv) aus den Prämissen folgt. Auf

[3] Siehe hierzu Lewis [180].

den ersten Blick scheint das nicht gut unter die Überschrift "Philosophische *Logik*" zu passen. Aber wir betrachten dieses Folgern (das wir generisch mit $\mid\!\sim$ bezeichnen) hier genauso wie das deduktive Folgern unter einer normativen Perspektive. D.h. wir fragen nach formalen Bedingungen, die $\mid\!\sim$ erfüllen muß, um "gerechtfertigt" zu sein. Rechtfertigung hat hier einen sehr spezifischen Sinn: Eine Relation $\mid\!\sim$ ist dann gerechtfertigt, wenn sie als vernünftiger Übergang von Prämissen zu einer Konklusion dargestellt werden kann. Im Zentrum der Theorie stehen daher Repräsentationsresultate der Art: $X \mid\!\sim A$, wenn A aus X deduktiv folgt unter kontrolliertem ("vernünftigem") Rückgriff auf bestimmte Hintergrundannahmen oder -regeln. In der hier gewählten Darstellung (die viel Makinsons [200] verdankt)ist die Theorie des anfechtbaren Schließens eine sehr allgemeine Theorie dessen, was in der Philosophie ampliatives (erweiterndes) und in der Informatik nichtmonotones Schließen genannt wird.

Wenn Kapitel VII den traditionellen Begriff einer Logik vielleicht überraschend erweitert, dann gilt das umso mehr für die *Logik des Überzeugungswandels* (Belief Revision), die Gegenstand von Kapitel VIII ist. Die Standardtheorie ist hier die AGM-Theorie der Kontraktionen und Revisionen von Überzeugungszuständen.[4] Vor die Aufgabe gestellt, unsere Überzeugungen zu ändern, müssen wir typischerweise zwischen einer Reihe von Kandidaten für unseren künftigen Überzeugungszustand wählen. Dazu müssen unsere Überzeugungszustände mit einer Struktur ausgestattet sein, die solche Wahlen ermöglichen. Wie im Falle anfechtbaren Schließens dreht sich die AGM-Theorie um bestimmte Repräsentationsresultate: Wenn die postulierte Struktur von dieser oder jener Art ist, dann haben die elementaren Änderungsoperationen der Kontraktion und Revision diese oder jene Eigenschaften. Und umgekehrt: Gegeben bestimmte formale Eigenschaften der Operationen, so dürfen wir darauf schließen, daß diese durch Strukturen der einen oder anderen Art hervorgebracht wurden. Die Theorie hat beeindruckende Anwendungen, u.a. in der Erkenntnistheorie, der Rechtslogik, der Semantik von Konditionalsätzen und der Theorie anfechtbaren Schließens.

Soweit eine kurze Beschreibung dessen, was der Leser vorfinden wird. Alle Kapitel sind weitgehend in sich abgeschlossen. Der geneigte Leser möge den unvermeidlichen Preis dafür verzeihen: daß sich nämlich zuweilen die eine oder andere Erklärung wiederholt. Querverweisen kann man überall mit Gewinn folgen, muß es aber nicht, um die Ausführungen, von denen

[4] "AGM" für: Carlos Alchourrón, Peter Gärdenfors und David Makinson.

aus verwiesen wird, zu verstehen. Alle Kapitel beginnen behutsam. Im Fortgang nimmt der technische Aufwand dann jeweils zu.

2. Grundlagen

Das Buch setzt elementare Kenntnisse der Aussagen- und Prädikatenlogik voraus. Prädikatenlogik spielt in diesem Buch allerdings nur insofern eine Rolle, als sie bequeme und eindeutige Abkürzungen zur Verfügung stellt, um gewisse Bedingungen auszudrücken. Obwohl Prädikatenlogik also nicht Gegenstand dieses Buches ist, so sollte der Leser mit ihr soweit vertraut sein, daß er die formale Sprache der Prädikatenlogik als zuweilen hilfreiche Ergänzung der Umgangssprache aufnehmen kann.

Zu den vorausgesetzten Kenntnissen im Bereich der Aussagenlogik gehören: die Beschreibung formaler Sprachen, das Ableiten von Formeln aus Annahmen oder Axiomen mittels Regeln, die Interpretation von Aussagen durch systematische (rekursive) Zuordnung von Wahrheitswerten, der Begriff einer gültigen Folgerung. Diese setzen wiederum voraus, daß der Leser mit elementaren Begriffen der Mengenlehre, einschließlich Relationen und Funktionen vertraut ist. Im folgenden seien einige wichtige Begriffe stichwortartig rekapituliert und unsere Notation erklärt.

2.1 Mengen, Folgen, Relationen, Funktionen. Objekte können in anderen Objekten vorkommen. Ein Art den Vorkommens ist die *Elementbeziehung*. Wenn x in dieser Weise in y vorkommt, dann schreiben wir $x \in y$ (bzw. $x \notin y$, wenn x kein Element von y ist). Wenn $x \in y$, dann nennen wir y eine *Menge*. Meist verwenden wir Großbuchstaben für Mengen und Kleinbuchstaben für deren Elemente (obwohl diese selbst auch Mengen sein können). Mengen werden beschrieben durch Angabe ihrer Elemente, wie in

$$\{0, 1, 2\},$$

oder durch Angabe notwendiger und hinreichender Bedingungen, wie in

$$\{x : x \text{ ist eine der ersten drei natürlich Zahlen}\}.$$

Eine Bedingung wie $x \neq x$ kann nicht erfüllt werden. Die entsprechende Menge ist daher leer; Notation $\{\ \}$ oder $\emptyset$. Eine Bedingung wie 'x ist Nachfolger einer Zahl' wird von unendlich vielen Objekten erfüllt. Die ensprechende Menge können wir mit $\{1, 2, 3, \ldots\}$ andeuten. Für bestimmte Zahlenmengen reservieren wir die folgenden Buchstaben:

- $\mathbf{N}$ die natürlichen Zahlen;
- $\mathbf{N}^+$ die positiven natürlichen Zahlen (> 0);

Q die rationalen Zahlen;
R die reellen Zahlen.

Mengen können in Beziehungen zueinander stehen. Insbesondere kann X *Teilmenge* von Y sein:

Teilmenge: $X \subseteq Y$ gdw jedes Element von X ist in Y, d.h. $\forall x\ (x \in X \Rightarrow x \in Y)$.

Bei Bedarf drehen wir das Zeichen $\subseteq$ um: $X \supseteq Y$ (X ist Obermenge von Y). Den Unterstrich lassen wir weg, d.h. wir schreiben $X \subset Y$, wenn X eine *echte* Teilmenge von Y ist, d.h. wenn Y Elemente enthält, die nicht in X sind. Die Menge aller Teilmengen einer Menge X ist die *Potenzmenge* von X:

Potenzmenge: $\wp(X) = \{Y : Y \subseteq X\}$.

Mengen sind unter einer Reihe einfacher Operationen abgeschlossen.

Vereinigung: $X \cup Y = \{x : x \in X \text{ oder } x \in Y\}$.
Schnitt: $X \cap Y = \{x : x \in X \text{ und } x \in Y\}$.
Subtraktion: $X \setminus Y = \{x : x \in X \text{ und } x \notin Y\}$.

Wenn $X \subseteq Y$, dann ist offenbar $X = X \cap Y$ und $X \cup Y = Y$. Die Menge X ist dieselbe Menge wie die Menge Y, wenn $X \subseteq Y$ und $Y \subseteq X$. Es folgt, daß $\{x\} = \{x, x\}$ (Idempotenz) und daß $\{x, y\} = \{y, x\}$ (Kommutativität).

Aus den Definitionen folgt unmittelbar, daß Vereinigung und Schnitt assoziative Operationen sind, d.h. $(X_0 \cup X_1) \cup X_2 = X_0 \cup (X_1 \cup X_2)$; ebenso für $\cap$. Aus diesem Grunde können wir die Klammern fortlassen und einfach $X_0 \cup X_1 \cup X_2$ schreiben. Beliebige viele Mengen können zu einer Menge vereinigt werden. Zum Beispiel können wir alle Mengen vereinigen, die eine bestimmte Bedingung ϕ erfüllen. Das Resultat würden wir so notieren: $\bigcup\{X : \phi(X)\}$. Häufiger werden wir die zu vereinigenden Mengen mit Indizes aus einer Indexmenge I versehen. Dann ist $\{X_i : i \in I\}$ die Menge der so indizierten Mengen und deren Vereinigung notieren wir mit $\bigcup\{X_i : i \in I\}$ oder auch mit $\bigcup_{i \in I}\{A_i\}$. Meist wählen wir **N** als Indexmenge, und wenn immer dies eindeutig der Fall ist, kürzen wir weiter ab zu $\bigcup A_n$. Ebenso für Schnitte $\bigcap$ von Mengen indizierter Mengen.

Wenn es uns darauf ankommt, daß Objekte in einer Ansammlung mehrfach oder in bestimmter Reihenfolge vorkommen, dann stellen wir eine solche Ansammlung nicht als Menge, sondern als *Folge* (mit gespitzten Klammern) dar. Beispielsweise kommt x in der Folge $\langle x, y, x\rangle$ zweimal vor und y geht dem zweiten Vorkommen von x voraus. Die Folgen $\langle y, x\rangle$ oder $\langle x, x, y\rangle$ würden die Anzahl und Anordnung der Vorkommen anders darstellen und sind daher verschiedene Folgen. Die Elemente einer Folge unterscheiden wir am besten, indem wir sie mit natürlichen Zahlen in ihrer natürlichen Reihenfolge indizieren. Wenn wir eine Folge $\langle x_1, \ldots, x_n \rangle$ auf diese Weise spezifizieren, dann können wir daraufhin z.B. etwas über beliebige, unmittelbar aufeinander folgende Elemente sagen, indem wir auf diese mit x_i und x_{i+1} Bezug nehmen ($1 \leq i \leq n$). Allgemein heißen Folgen mit n Elementen *n-Tupel*; im besonderen nennen wir zwei-elementige Folgen *Paare*, drei-elementige *Tripel*, usw. (*Quadrupel*, *Quintupel*, ...). Das k-te Element eines Tupels nennen wir dessen k-te *Koordinate*; im Fall eines Paares, die linke bzw. rechte Koordinate. Das *kartesische Produkt* zweier Mengen X und Y ist die Menge aller Paare $\langle x, y \rangle$ so, daß $x \in X$ und $y \in Y$. Die Verallgemeinerung liegt auf der Hand:

(Kartesisches) Produkt: $X_1 \times \cdots \times X_n = \{\langle x_1, \ldots, x_n \rangle$: $x_1 \in X_1$ & ... & $x_n \in X_n\}$.

Wenn für alle $i, k \in \{1, \ldots, n\}$ gilt, daß $X_i = X_k = X$, dann sprechen wir vom n-fachen Produkt der Menge X mit sich selbst und bezeichnen diese mit X^n. Im Grenzfall $n = 1$ sei X^1 einfach die Menge X. Statt der spitzen Klammern verwenden wir manchmal auch runde Klammern, um Folgen anzuzeigen; also beispielsweise (x, y) statt $\langle x, y \rangle$ für das Paar bestehend aus x und y in dieser Reihenfolge.

Eine zweistellige *Relation* ist eine Menge von Paaren, eine dreistellige eine Menge von Tripeln, usw. Insbesondere für zweistellige Relationen gibt es eine Reihe auffälliger und oft wiederkehrender Abschlußbedingungen. Z.B. könnte für eine Relation $R \subseteq X \times Y$ gelten, daß wenn $\langle x, y \rangle$ und $\langle y, z \rangle$ in R sind, dann ist auch $\langle x, z \rangle$ in R, für beliebige $x, y \in X$ und $y, z \in Y$. Statt $\langle x, y \rangle \in R$ schreiben wir meist kürzer Rxy (oder auch xRy) so, daß die Bedingung auch so beschrieben werden kann:

Transitivität: Wenn Rxy und Ryz, dann Rxz.

Wir nennen nun eine Auswahl weiterer solcher Bedingungen, die in diesem Buch an der einen oder anderen Stelle eine Rolle spielen werden. (Soweit nicht explizit anders gebunden, sind alle Variablen im allquantifizierten Sinne zu verstehen.)

Reflexivität:	Rxx.
Antisymmetrie:	Wenn Rxy und Ryx, dann $x = y$.
Totalität:	Rxy oder Ryx.
Symmetrie:	Wenn Rxy, dann Ryx.
Konnexität:	Rxy oder $x = y$ oder Ryx.

Dichte:	Wenn Rxy, dann $\exists z$: Rxz und Rzy.
Euklidizität:	Wenn Rxy und Rxz, dann Ryz.

Eine Relation $R \subseteq X^2$ ist eine *Quasiordnung* auf X, wenn R reflexiv und transitiv ist. Ist R darüberhinaus auch antisymmetrisch, dann ist R eine *Halbordnung* auf X. Ist R auch total, dann ist X *vollständig geordnet* unter R. In allen diesen Fällen schreiben wir oft $x \leq y$ statt Rxy. Eine Quasiordnung ist eine *Äquivalenzrelation*, wenn sie symmetrisch ist. In diesem Fall schreiben wir gern $x \equiv y$ für Rxy.

Wenn R dagegen irreflexiv ist, d.h. Rxx für *kein* Element der Fall ist, dann wählen wir eine Schreibweise wie $x < y$ oder $x \prec y$ für Rxy. Eine *strenge Halbordnung* ist irreflexiv, transitiv und antisymmetrisch; eine *strenge Vollordnung* ist darüberhinaus konnex.

Es sei $R \subseteq X^2$ und a ein Element a in X.

a ist *minimal* (unter R) in X:	$\forall x \in X \colon Rxa \Rightarrow x = a$.
a ist *maximal* (unter R) in X:	$\forall x \in X \colon Rax \Rightarrow a = x$.
a ist *das kleinste* Element (unter R) in X:	$\forall x \in X \colon Rax$.
a ist *das größte* Element (unter R) in X:	$\forall x \in X \colon Rxa$.

Es sei $R \subseteq X^2$ eine Halbordnung. Wenn a das kleinste Element in X ist, dann ist a auch minimal, jedoch im allgemeinen nicht umgekehrt. Ist R total, dann bildet X eine Kette unter R. Wenn die Kette nicht unendlich absteigt (aufsteigt), dann gibt es ein minimales (maximales) Element und dieses ist zugleich das kleinste (größte). (Am besten veranschaulicht man sich die Verhältnisse in Hasse-Diagrammen.)

Gegeben eine Relation $R \subseteq X \times Y$, können wir für jedes $x \in X$ den *Abschluß* von x unter R bilden: $R(x) = \{y : Rxy\}$. Wenn R eine Äquivalenzrelation ist, dann ist $R(x)$ die *Äquivalenzklasse* von x unter R; statt $R(x)$ schreiben wir dann meist $[x]_R$. Aufgrund der Eigenschaften von R gilt: $[x]_R = [y]_R$ gdw Rxy ("$x \equiv y$"), und $[x]_R \neq [y]_R$ gdw $[x]_R \cap [y]_R = \emptyset$.

Unter den Relationen $R \subseteq X \times Y$ gibt es solche, die jedem $x \in X$ höchstens ein $y \in Y$ zuordnen. Solche Relationen nennen wir *Funktionen*:

Funktionalität: Wenn Rxy und Rxz, dann $y = z$.

In diesem Fall schreiben wir $f : X \longrightarrow Y$ ("f bildet X nach Y ab") statt $R \subseteq X \times Y$ und $f(x) = y$ statt Rxy; X ist der *Argument-* oder *Definitionsbereich*, Y der *Wertebereich* von f. In $f(x) = y$ nennen wir entsprechend x das *Argument* und y den *Wert* (von x unter f). Man beachte, daß das Argument einer Funktion auch ein n-Tupel $\langle x_1, \ldots, x_n \rangle$ sein kann, in welchem Fall wir von einer *n-stelligen Funktion* sprechen und statt $f(\langle x_1, \ldots, x_n \rangle)$ vereinfacht $f(x_1, \ldots, x_n)$ schreiben. Die Bedingung der Funktionalität schließt erstens nicht aus, daß es nicht für alle Argumente $x \in X$ einen Wert in Y gibt; sie schließt zweitens nicht aus, daß f distinkte Werte in X auf denselben Wert in Y abbildet; und sie läßt drittens offen, ob jedes Element in Y sich als Wert eines Argumentes aus X unter f darstellen läßt. Im ersten Fall ist die Funktion nur *partiell*, im zweiten Fall nicht *injektiv* (umkehrbar), im dritten Fall nicht *surjektiv* (den Wertebereich ausschöpfend). Partielle Funktionen spielen in diesem Buch keine Rolle; sie können überdies in aller Regel gut durch eine Festsetzung ausgeschlossen werden. Im folgenden sei nur von Funktionen die Rede, die ihren Argumentbereich vollständig (*total*) in ihren Wertebereich abbilden. Die anderen zwei Fälle werden durch diese Bedingungen ausgeschlossen:

Injektivität	Wenn $f(x) = z$ und $f(y) = z$, dann $x = y$.
Surjektivität	$\forall y \in Y,\ \exists x \in X\colon\ y = f(x)$.

Eine (totale) Funktion $f : X \longrightarrow Y$ ist *bijektiv*, wenn f injektiv und surjektiv ist. In diesem Fall sprechen wir auch von einer eineindeutigen Abbildung oder einen Bijektion zwischen X und Y. Gibt es zwischen zwei Mengen eine Bijektion, dann sind diese *gleich mächtig*, d.h. sie enthalten die gleiche Anzahl von Elementen. Wenn X eine Menge ist, dann ist eine Bijektion zwischen X und einem (anfänglichen) Teilsegment der natürlichen Zahlen eine *Abzählung* von X.

2.2 Aussagenlogische Sprachen. Die syntaktische Beschreibung einer Sprache besteht aus der Angabe eines Alphabets sowie der Beschreibung von Regeln mit deren Hilfe aus dem Alphabet wohlgeformte Ausdrücke erzeugt werden können. Im Falle aussagenlogischer Sprachen ist das besonders einfach. Das Alphabet besteht aus einer abzählbaren Menge ATM atomarer Formeln, hier kurz *Atome* genannt, sowie einer Menge OPR von *Operatoren* (auch *Junktoren* oder “logische Konstanten” genannt) unter Angabe ihrer Stelligkeit. Da wir hier nur maximal zweistellige Junktoren betrachten, so reicht eine Stelligkeitsfunktion $f : \mathrm{OPR} \longrightarrow \{0, 1, 2\}$. Die Menge FML der wohlgeformten Ausdrücke (*Formeln*) wird durch diese Regeln definiert:

F1. $\mathrm{ATM} \subseteq \mathrm{FML}$.
F2. Wenn $x \in \mathrm{OPR}$ mit $f(x) = 0$, dann $x \in \mathrm{FML}$.
F3. Wenn $x \in \mathrm{OPR}$ mit $f(x) = 1$ und $y \in \mathrm{FML}$, dann $xy \in \mathrm{FML}$.
F4. Wenn $x \in \mathrm{OPR}$ mit $f(x) = 2$ und $y, z \in \mathrm{FML}$, dann $xyz \in \mathrm{FML}$.
F5. FML ist die kleinste Menge, die F1–4 erfüllt.

Aus der Definition folgt, daß Formeln beliebig lang sein können aber endlich sein müssen. Ob ein Ausdruck eine Formel ist, ist entscheidbar. Die Definition ist *induktiv* (oder *rekursiv*, wie man auch sagt) und erlaubt daher induktive Beweise über den Aufbau einer Formel. D.h., um zu zeigen, daß jede Formel eine bestimmte Eigenschaft hat, genügt es zu zeigen, daß 1. jedes Atom die Eigenschaft hat, und daß 2. alle Junktoren Formeln so zusammensetzen, daß die Eigenschaft von diesen an das Resultat der Zusammensetzung weitergegeben wird. Ferner sind Formeln Präfixkonstruktionen (d.h. in sogenannter polnischer Notation). Sei bespielsweise x in F4 die Konjunktion $\wedge$, dann ist nach dieser Regel $\wedge yz$ eine Formel (falls y und z Formeln sind). Die Präferenz für Präfixkonstruktionen in der offiziellen Definition von FML vereinfacht einiges, macht aber Formeln nicht besonders lesefreundlich. Deshalb werden wir uns hier auf Formeln der jeweiligen Objektsprache durch Infixausdrücke aus unserer Metasprache (angereichertes Deutsch) beziehen: also "$x \wedge y$" für "$\wedge xy$". Wir müssen dann nur durch das Setzen von Klammern für eindeutige Bezugnahme sorgen. Als (metasprachliche) Variablen verwenden wir für Atome $P, Q, R, ...$, für beliebige Formeln $A, B, C, ...$, zuweilen vermehrt und unterschieden durch Indizes aus $\mathbf{N}$. Rein syntaktisch gesehen, können die Atome auch als Operatoren mit Stelligkeit 0 aufgefaßt werden. Aber das tun wir hier nicht, da wir die Interpretation der Atome variieren wollen, während die der Operatoren in allen Modellen konstant bleiben soll. Zu den Operatoren mit Stelligkeit 0 gehören daher typischerweise nur $\top$ (*verum*) und $\perp$ (*falsum*). Mengen von Formeln bezeichnen wir meist mit $X, Y, Z, ...$; aber diese Großbuchstaben können auch – wie schon zuvor – andere Objekte oder Mengen bezeichnen. Der Kontext wird hier immer genügend Klarheit schaffen.

Mit Ausnahme der Systeme in Kap. V und VI basieren alle Überlegungen in diesem Buch auf der klassischen Aussagenlogik. Diese ist eine Theorie der Wahrheitsfunktionen in zwei Werten. Wir nehmen daher an, daß unter den Junktoren der betrachteten aussagenlogischen Sprachen sich solche befinden, die wir als eine *funktional vollständige* Menge von Wahrheitsfunktionen interpretieren können. Funktional vollständig ist eine solche Menge, wenn ihre Elemente genügen, alle Wahrheitsfunktionen zu definieren. Welche Menge das ist, ist im Prinzip gleichgültig. Wir wählen hier meist $\{\neg, \wedge\}$.

2.3 Axiomatische Systeme. Sehr allgemein betrachtet, ist ein axiomatisches System eine Struktur (S, A, R) mit einer Trägermenge S, $A \subseteq S$, und R einer Menge von Paaren $\langle X, y\rangle$ mit $X, \{y\} \subseteq S$. Der Abschluß von A unter den Elementen in R erzeugt die Menge der Theoreme des Systems. Für die Zwecke dieses Buches deuten wir die Elemente eines axiomatischen Systems spezifischer: S ist hier die Formelmenge einer aussagenlogischen *Sprache*, A ist eine entscheidbare Teilmenge von S (die *Axiome* des Systems), und R ist eine entscheidbare Menge von *Regeln*, welche *de facto* nie mehr als zwei Prämissen benötigen. Regeln sind nun also Paare $\langle X, A\rangle$ mit