

Christian Nassau

Ein neuer Algorithmus
zur Untersuchung
der Kohomologie
der Steenrod-Algebra



λογος

Ein neuer Algorithmus zur Untersuchung der Kohomologie der Steenrod-Algebra

Dissertation
zur Erlangung des Doktorgrades
der Naturwissenschaften

vorgelegt beim Fachbereich Mathematik
der Johann Wolfgang Goethe-Universität
in Frankfurt am Main

von Christian Nassau
aus Bad Homburg

Frankfurt am Main
2001

(DF 1)

Die Deutsche Bibliothek – CIP-Einheitsaufnahme

Nassau, Christian:

Ein neuer Algorithmus zur Untersuchung der Kohomologie der
Steenrod-Algebra / von Christian Nassau. - Berlin : Logos-Verl.,
2002

Zugl.: Frankfurt (Main), Univ., Diss., 2001
ISBN 3-89722-881-5



©Copyright Logos Verlag Berlin 2002

Alle Rechte vorbehalten.

ISBN 3-89722-881-5

Logos Verlag Berlin
Comeniushof, Gubener Str. 47,
10243 Berlin
Tel.: +49 030 42 85 10 90
Fax: +49 030 42 85 10 92
INTERNET: <http://www.logos-verlag.de>

Zusammenfassung

Gegenstand der Arbeit ist die Untersuchung der Kohomologie der Steenrod-Algebra, hauptsächlich zur Primzahl $p = 2$. Vorgestellt wird ein Lemma, das sowohl die computerunterstützte Berechnung, wie auch die anschliessende Untersuchung einer minimalen Auflösung dieser Algebra vereinfacht. Der theoretische Hintergrund dieses Lemmas ist in der für Kohomologiefragen seit langem bekannten Bedeutung elementar-abelscher Untergruppen zu suchen, die hier in der Gestalt der internen Margolis-Differentiale der Algebra auftreten. Aus diesem Hintergrund wird in der vorliegenden Arbeit ein Algorithmus gewonnen, der das Rechnen in bisher unerreichbaren Dimensionen erlaubt: mit vertretbarem Rechenaufwand erhalten wir eine minimale Auflösung, die bis zur Dimension 210 vollständig ist. Vorher war nur circa die Hälfte dieses Bereichs bekannt.

Das Interesse an diesen Kohomologiegruppen kommt aus der Topologie, und näherhin aus der stabilen Homotopietheorie: Die Steenrod-Algebra kann man am einfachsten als Endomorphismenring des Eilenberg-MacLane-Spektrums $H\mathbb{F}_p$, dh. des Systems der Eilenberg-MacLane-Räume $\{K(\mathbb{F}_p, n)\}_{n=0,1,2,\dots}$, definieren. Als solcher operiert sie auf natürliche Weise auf allen Kohomologiegruppen $H^*(-; \mathbb{F}_p)$. Mithilfe der Adams-Spektralreihe

$$\text{Ext}_A^{s,t}(H^*(Y; \mathbb{F}_p), H^*(X; \mathbb{F}_p)) \Rightarrow \{\Sigma^{t-s} X, Y\}_{(p)}$$

gewinnt man so hoch strukturierte obere Schranken für die p -Lokalisierungen der stabilen Homotopiegruppen

$$\{\Sigma^k X, Y\} = \lim_{\rightarrow} [\Sigma^{k+n} X, \Sigma^n Y], \quad (X \text{ kompakt}).$$

Der hier zumeist beschworene Fall $X = Y = S^0$ führt auf der linken Seite zu $\text{Ext}_A^{s,t}(\mathbb{F}_p, \mathbb{F}_p)$, was auch schlicht als Kohomologie der Steenrod-Algebra bezeichnet wird. Diese ist also der Ausgangsterm einer Spektralreihe, die die p -Lokalisierung der stabilen Homotopiegruppen der Sphäre(n)

$$\pi_k^{\text{stab}}(S) = \lim_{\rightarrow} \pi_{n+k}(S^n) = \{S^k, S^0\}$$


berechnet.

Wir zeigen im weiteren, wie aus der minimalen Auflösung mit vergleichsweise geringem Aufwand weitere Informationen gewonnen werden können: darunter fällt die Berechnung von $\text{Ext}_A^{s,t}(M, N)$ für kleine endliche A -Moduln M und N , die Berechnung der Mahowald'schen Wurzelinvarianten, die damit eng verwandte Bestimmung der Verdopplungsoperation $\text{Sq}^0 : \text{Ext}_A^{s,t}(\mathbb{F}_2, \mathbb{F}_2) \rightarrow \text{Ext}_A^{s,2t}(\mathbb{F}_2, \mathbb{F}_2)$, und die Berechnung der algebraischen Hurewicz-Abbildungen $\text{Ext}_A^{s,t}(\mathbb{F}_2, \mathbb{F}_2) \rightarrow \text{Ext}_{A(n)}^{s,t}(\mathbb{F}_2, \mathbb{F}_2)$. Für $n = 1$ und $n = 2$ modellieren diese algebraisch die topologischen Hurewicz-Transformationen

$$\pi_*^{\text{stab}}(S) \rightarrow \pi_*(\text{ko}) \quad (\text{Vergleich mit } K\text{-Theorie}),$$

$$\pi_*^{\text{stab}}(S) \rightarrow \pi_*(\text{tmf}) \quad (\text{Vergleich mit topologischen Modulformen}).$$

Inhaltsverzeichnis

1	Hintergrund	3
1.1	Die Steenrod-Algebra	3
1.1.1	Hopf-Algebren allgemein	3
1.1.2	Steenrod-Algebra	5
1.1.3	Milnor-Basis	6
1.1.4	Hopf-Unteralgebren	9
1.2	Die Adams-Spektralreihe	9
1.2.1	Steenrod-Operationen auf der Kohomologie	10
1.2.2	Kohomologie von Eilenberg-MacLane-Räumen	12
1.2.3	Stabile Homotopietheorie	13
1.2.4	Adams-Spektralreihe	16
1.2.5	Beispiele	19
1.3	Minimale Auflösungen	20
1.3.1	Allgemein	20
1.3.2	Der Standardalgorithmus	22
2	Ein Lemma	27
2.1	Das Lemma	27
2.1.1	Freundliche Sequenzen	27
2.1.2	Das Lemma	29
2.2	Weisen seiner Anwendung	32
2.2.1	Von Unten, zum Aufwärmen	33
2.2.2	Zulässige Unteralgebren	35
2.2.3	Von Unten, allgemein	43
2.2.4	Von Oben	45
2.2.5	Von Oben (de-Luxe-Variante)	46
2.3	Der Algorithmus	48
2.3.1	Die Signaturfiltrierung	48
2.3.2	Die Implementierung	51
2.3.3	Zur Wahl des passenden B	53
2.4	Resultate, Geschichte und Statistiken	55
3	Weitere Anwendungen	61
3.1	$\text{Ext}_A(M, N)$ für kleine M und N	61
3.1.1	Beispiele	63
3.2	Wurzelinvarianten	72
3.3	Die Frobeniusoperation	74
3.4	Hurewicz-Abbildung für tmf	78
	Danksagung	89

1 Hintergrund

In diesem Kapitel geben wir zunächst eine rein algebraische Einführung in die Steenrod-Algebra, bevor wir dann im darauf folgenden Abschnitt die topologische Herkunft und Relevanz kurz diskutieren. Sodann widmen wir uns der Kohomologie der Steenrod-Algebra und diskutieren minimale Auflösungen und das bis dato gebräuchliche Verfahren ihrer Berechnung. All dies ist seit langem bekannt, und wird nur um der Geschlossenheit Willen rekapituliert. Ausführlicheres findet man zum Beispiel in [29], [39] und [32].

1.1 Die Steenrod-Algebra

1.1.1 Hopf-Algebren allgemein

Sei k ein fest gewählter Grundkörper.

Definition 1.1.1. Eine *unitale k -Algebra* ist ein Tripel $(A, \mu, 1)$ bestehend aus einem k -Vektorraum A , einer assoziativen Multiplikation $\mu : A \otimes A \rightarrow A$ und einem Einselement $1 : k \rightarrow A$.

Alle Tensorprodukte werden dabei über k gebildet. Die Bedingung der Assoziativität und Unitalität bedeuten, daß die folgenden Diagramme kommutieren sollen:

$$\begin{array}{ccc}
 A \otimes A \otimes A & \xrightarrow{\mu \otimes \text{id}} & A \otimes A \\
 \text{id} \otimes \mu \downarrow & & \downarrow \mu \\
 A \otimes A & \xrightarrow{\mu} & A
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccccc}
 k \otimes A & \xrightarrow{1 \otimes \text{id}} & A \otimes A & \xleftarrow{\text{id} \otimes 1} & A \otimes k \\
 & \searrow \cong & \downarrow \mu & \swarrow \cong & \\
 & & A & &
 \end{array}$$

Durch Dualisieren erhält man den Begriff der augmentierten Koalgebra:

Definition 1.1.2. Eine *augmentierte k -Koalgebra* ist ein Tripel (A, Δ, ε) bestehend aus einem k -Vektorraum A , einer koassoziativen Komultiplikation $\Delta : A \rightarrow A \otimes A$ und einer Augmentation $\varepsilon : A \rightarrow k$.

Hier wird also die Kommutativität folgender Diagramme gefordert:

$$\begin{array}{ccc}
 A \otimes A \otimes A & \xleftarrow{\Delta \otimes \text{id}} & A \otimes A \\
 \text{id} \otimes \Delta \uparrow & & \uparrow \Delta \\
 A \otimes A & \xleftarrow{\Delta} & A
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccccc}
 k \otimes A & \xleftarrow{\varepsilon \otimes \text{id}} & A \otimes A & \xrightarrow{\text{id} \otimes \varepsilon} & A \otimes k \\
 & \swarrow \cong & \uparrow \Delta & \searrow \cong & \\
 & & A & &
 \end{array}$$

Kombiniert man beide Definitionen, so erhält man den Begriff der Hopf-Algebra:

1 Hintergrund

Definition 1.1.3. Eine *Hopf-Algebra* über k ist ein Tupel $(A, \mu, \Delta, 1, \varepsilon)$, sodaß $(A, \mu, 1)$ eine unitale Algebra ist, (A, Δ, ε) eine augmentierte Koalgebra, und beide Strukturen kompatibel sind:

$$\begin{array}{ccc} & A & \\ 1 \nearrow & & \searrow \varepsilon \\ k & \xlongequal{\quad} & k \end{array}$$

soll kommutieren. Außerdem soll Δ multiplikativ, und μ komultiplikativ sein.

Die letzten beiden Kompatibilitätsbedingungen sind äquivalent. Beide besagen gerade, daß das Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} A \otimes A \otimes A \otimes A & \xleftarrow{\text{id} \otimes \text{switch} \otimes \text{id}} & A \otimes A \otimes A \otimes A & & \\ \Delta \otimes \Delta \uparrow & & & & \downarrow \mu \otimes \mu \\ A \otimes A & \xrightarrow{\mu} & A & \xrightarrow{\Delta} & A \otimes A \end{array}$$

kommutiert. Falls A graduiert ist, so muß beim Vertauschen die übliche Vorzeichenregel beachtet werden. Dazu setzt man $\text{switch}(x \otimes y) = (-1)^{|x||y|} y \otimes x$.

Für Moduln M, N über einer Hopf-Algebra A hat man ein *internes Tensorprodukt* $M \wedge N$. Als Vektorraum sei $M \wedge N = M \otimes_k N$. Die A -Operation sei diagonal, dh. durch

$$\begin{array}{ccc} A \otimes M \otimes N & \xrightarrow{\Delta \otimes \text{id} \otimes \text{id}} & A \otimes A \otimes M \otimes N \\ \nu_{M \wedge N} \downarrow & & \downarrow \text{id} \otimes \text{switch} \otimes \text{id} \\ M \otimes N & \xleftarrow{\nu_M \otimes \nu_N} & A \otimes M \otimes A \otimes N \end{array}$$

definiert. In Kurzschreibweise lautet dies $a(m \wedge n) = \sum (-1)^{|m||a''|} (a'm) \wedge (a''n)$. Dabei haben wir uns der gebräuchlichen symbolischen Notation $\Delta(a) =: \sum a' \otimes a''$ bedient.

Definition 1.1.4. Eine *Antipodenabbildung* (oder *Konjugation*) auf einer Hopf-Algebra ist ein antimultiplikatives $\chi : A \rightarrow A$, sodaß $1 \circ \varepsilon = \mu(\text{id} \otimes \chi)\Delta$ gilt:

$$\begin{array}{ccccc} & A \otimes A & \xrightarrow{\text{id} \otimes \chi} & A \otimes A & \\ \Delta \nearrow & & & & \searrow \mu \\ A & \xrightarrow{\varepsilon} & k & \xrightarrow{1} & A \end{array}$$

Zum Beispiel hat jede zusammenhängende, graduierte Hopf-Algebra automatisch eine solche Konjugation ([29], ch. 12.1), und falls A kokommutativ ist, so ist diese involutiv: $\chi^2 = \text{id}$.

Für einen k -Vektorraum M wird $A \otimes M$ durch Operation auf dem linken Faktor zu einem freien A -Modul.

Lemma 1.1.5. *Hat A eine Antipodenabbildung, so ist die Abbildung*

$$A \otimes M \ni a \otimes m \mapsto \sum a' \wedge a'' m \in A \wedge M$$

für alle A -Moduln M ein A -linearer Isomorphismus.

Insbesondere ist also $A \wedge M$ immer ein freier A -Modul.

Beweis. Man rechnet nach, daß

$$A \wedge M \ni a \wedge m \mapsto \sum a' \otimes \chi(a'')m \in A \otimes M$$

ein Inverses ist. (Siehe zB. Seite 62.) □

Es gibt zwei wichtige Beispielklassen, die man kennen sollte. Zum einen kann man jeder Gruppe G den Gruppenring kG zuordnen. Die Multiplikation auf kG soll gerade von der Multiplikation $G \times G \rightarrow G$ induziert werden. Die Komultiplikation wird durch $\Delta(g) = g \otimes g$ für $g \in G$ erklärt. Die Antipodenabbildung wirkt durch $\chi(g) = g^{-1}$. Offenbar wird kG dadurch zu einer kokommutativen Hopf-Algebra mit Konjugation.

Zum anderen kann man jeder kommutativen Hopf-Algebra mit Konjugation ein Gruppenschema zuordnen. Ist nämlich A bzgl. μ ein kommutativer Ring, so kann man das zugehörige affine Schema $G = \text{Spec } A$ bilden. Damit ist dann $G \times G = \text{Spec } A \otimes A$. Da $\Delta : A \rightarrow A \otimes A$, $\chi : A \rightarrow A$ und $\varepsilon : A \rightarrow k$ multiplikativ sind, darf man sie als Abbildungen $G \times G \rightarrow G$, $G \rightarrow G$ bzw. $\text{Spec } k = \{\text{pt.}\} \rightarrow G$ betrachten. Obige Axiome besagen dann gerade, daß G mit diesen Abbildungen als Multiplikation, Inversenbildung bzw. Inklusion der Eins, zu einem Gruppenobjekt in der Kategorie der k -Schemata wird. Diese Beziehung kann man auch umkehren: eine kommutative Hopf-Algebra mit Antipodenabbildung ist schlicht dasselbe wie ein affines Gruppenschema.

Bekanntlich ist der Dualraum einer Algebra eine Koalgebra, und umgekehrt. Man erhält also zu jeder Hopf-Algebra $(A, \mu, \Delta, 1, \varepsilon)$ eine duale Hopf-Algebra $(A^*, \mu', \Delta', 1', \varepsilon')$ mit $\mu' = \Delta^*$, $\Delta' = \mu^*$, $1' = \varepsilon^*$, $\varepsilon' = 1^*$. Der Stern bezeichnet hier die kontragradiente Abbildung.

Ist A endlich-dimensional (oder graduiert und lokal endlich-dimensional) so ist in natürlicher Weise $A = (A^*)^*$.

1.1.2 Steenrod-Algebra

Die Steenrod-Algebra, um die es im folgenden gehen wird, ist kokommutativ, nicht aber kommutativ. Man definiert sie am elegantesten als Dualraum ihres kommutativen Duals:

Definition 1.1.6. Sei p eine Primzahl. Die *duale, reduzierte Steenrod-Algebra* zu p ist folgende kommutative \mathbb{F}_p -Hopf-Algebra A_*^{red} : Es sei $A_*^{\text{red}} = \mathbb{F}_p[\xi_1, \xi_2, \dots]$ mit dem Koprodukt

$$\Delta(\xi_n) = \sum_{i=0}^n \xi_{n-i}^{p^i} \otimes \xi_i,$$

wobei formal $\xi_0 = 1$ gesetzt werde. Außerdem sei $\varepsilon(\xi_j) = 0$.

Das Koprodukt hat eine hübsche Interpretation durch die Algebra der additiven Potenzreihen. Darunter versteht man Potenzreihen der Form

$$f_\xi(x) = x + \xi_1 x^p + \xi_2 x^{p^2} + \xi_3 x^{p^3} + \dots$$

1 Hintergrund

Für die Verknüpfung solcher Potenzreihen gilt nämlich über \mathbb{F}_p

$$f_{\xi'}(f_{\xi''}(x)) = \sum_{i \geq 0} \xi'_i \left(\sum_{j \geq 0} \xi''_j x^{p^j} \right)^{p^i} = \sum_{i, j \geq 0} \xi'_i \xi''_j x^{p^{i+j}} = \sum_{n \geq 0} \xi_n x^{p^n}$$

mit $\xi_n = \sum_{i+j=n} \xi''_j \xi'_i$. Das Koprodukt auf A_*^{red} beschreibt also genau die Zusammensetzung additiver Potenzreihen. Die Konjugation auf A_*^{red} wird üblicherweise mit $c : A_*^{\text{red}} \rightarrow A_*^{\text{red}}$ bezeichnet. Man setzt $\zeta_n = c(\xi_n)$. Die Beziehung zwischen den ξ_n und den ζ_n kann man dann kurz und knapp durch $f_{\xi}^{-1}(x) = f_{\zeta}(x)$ beschreiben. $f_{\xi}^{-1}(x)$ ist dabei das Kompositionsinverse von $f_{\xi}(x)$.

A_*^{red} wird als *graduier*te Hopf-Algebra betrachtet:

Definition 1.1.7. Für $p > 2$ sei $|\xi_i| = 2(p^i - 1)$. Für $p = 2$ sei $|\xi_i| = 2^i - 1$.

Die volle duale Steenrod-Algebra enthält für ungerades p noch einen äußeren Anteil:

Definition 1.1.8. Die *duale Steenrod-Algebra* A_* sei folgendermaßen definiert: Für $p = 2$ sei $A_* = A_*^{\text{red}}$. Für $p > 2$ sei $A_* = A_*^{\text{red}} \otimes E(\tau_0, \tau_1, \dots)$, wobei $E(\dots)$ die äußere Algebra über den angegebenen Erzeugenden bezeichne. Das Koprodukt sei auf den ξ_n wie oben definiert. Für die τ_n setze man

$$\Delta(\tau_n) = \tau_n \otimes 1 + \sum_{0 \leq i \leq n} \xi_{n-i}^{p^i} \otimes \tau_i.$$

Es sei $|\tau_n| = 2p^n - 1$ und $\varepsilon(\tau_j) = 0$.

Für den äußeren Anteil in A_* ist unseres Wissens noch keine schöne Interpretation vorgeschlagen worden. Wir vermuten zwar, daß sich eine solche im Umkreis der Drinfeld-Moduln-Theorie finden ließe, wollen das hier aber nicht versuchen.

Jetzt können wir schließlich sagen, was die Steenrod-Algebra ist.

Definition 1.1.9. Die Steenrod-Algebra A sei die zu A_* duale Hopf-Algebra.

Das Dual der reduzierten dualen Steenrod-Algebra nennt man auch manchmal die *reduzierte Steenrod-Algebra*: $A^{\text{red}} = (A_*^{\text{red}})^*$. A^{red} ist eine Hopf-Unteralgebra von A .

1.1.3 Milnor-Basis

Da es im folgenden um das Rechnen in und mit der Steenrod-Algebra geht, ist uns die Definition $A = (A_*)^*$ nicht explizit genug. Milnor hat in [34] eine sehr bequeme Vektorraumbasis von A angegeben und die Multiplikation in dieser Basis beschrieben. (Siehe auch [29], ch. 15.1). Dies wollen wir hier rekapitulieren.

Wir schreiben $\langle -, - \rangle : A \otimes A_* \rightarrow \mathbb{F}_p$ für die Dualitätspaarung zwischen A und A_* . Eine Vektorraumbasis von A_*^{red} wird durch die Menge der Monome $\xi^R = \xi_1^{r_1} \dots \xi_n^{r_n}$ gebildet. Hierbei sei $R = (r_1, \dots, r_n)$ (mit variablem n) eine Exponentenfolge. Wir bezeichnen die duale Basis von A^{red} mit $P(R)$. Es gilt also

$$P(R) \in A, \quad |P(R)| = |\xi^R|, \quad \langle P(R), \xi^S \rangle = \delta_{R,S}.$$

Definition 1.1.10. $\{ P(R) \mid R \text{ Exponentenfolge} \}$ heißt *Milnor-Basis* von A^{red} .

Man überlegt sich leicht, daß das Koproduct auf den $P(R)$ durch $\Delta(P(R)) = \sum_{E+F=R} P(E) \otimes P(F)$ gegeben ist. Für $p = 2$ schreibt man üblicherweise $\text{Sq}(R)$ statt $P(R)$. Ist in R nur der erste Eintrag von Null verschieden, so schreibt man häufig P^k statt $P(k)$ und Sq^k statt $\text{Sq}(k)$.

Milnors Beschreibung der Multiplikation in A^{red} lautet jetzt wie folgt:

Lemma 1.1.11. *Seien $P(R) = P(r_1, \dots, r_n)$ und $P(S) = P(s_1, \dots, s_n)$ Elemente der Milnor-Basis. Dann ist*

$$P(R) \cdot P(S) = \sum_X \beta(X) P(t_1(X), \dots, t_n(X))$$

wobei über Matrizen $X = (x_{i,j})_{i,j \geq 0, i+j \neq 0}$ summiert wird, die folgenden Einschränkungen unterworfen sind:

- Die Summe der k -ten Spalte soll s_k sein:

$$s_k = x_{0,k} + x_{1,k} + x_{2,k} + \dots + x_{n,k}.$$

- Die gewichtete Summe der k -ten Zeile soll r_k sein:

$$r_k = x_{k,0} + p \cdot x_{k,1} + p^2 \cdot x_{k,2} + \dots + p^n \cdot x_{k,n}.$$

Der Koeffizient $\beta(X)$ ist das Produkt der diagonal gebildeten Multinomialkoeffizienten:

$$\beta(X) = \prod_{k \geq 1} (x_{k,0} | x_{k-1,1} | \dots | x_{0,k}) \quad \text{mit} \quad (n_1 | \dots | n_k) = \frac{(n_1 + \dots + n_k)!}{n_1! \dots n_k!}.$$

Die t_k schließlich sind die diagonal gebildeten Summen

$$t_k(X) = x_{k,0} + x_{k-1,1} + \dots + x_{0,k}.$$

Zur Berechnung der hierbei auftretenden Multinomialkoeffizienten ist folgendes Lemma nützlich, dessen Beweis wir dem Leser als Übung empfehlen.

Lemma 1.1.12. *Seien $m, n \in \mathbb{N}$ und p prim.*

- 1) *Schreibt man $m = \sum m_i p^i$, $n = \sum n_i p^i$, mit $0 \leq m_i, n_i < p$, so ist $(m|n) \equiv \prod_i (m_i | n_i) \pmod{p}$.*

- 2) *Für $m, n < p$ gilt*

$$\begin{aligned} (m|n) &\equiv 0 \pmod{p} && \text{falls } m + n \geq p, \\ (m|n) &\not\equiv 0 \pmod{p} && \text{falls } m + n < p. \end{aligned}$$

- 3) *Es ist $(m_1 | \dots | m_k) = (m_1 | m_2) \cdot (m_1 + m_2 | m_3 | \dots | m_k)$.*

Kombiniert man die Aussagen dieses Lemmas, so sieht man

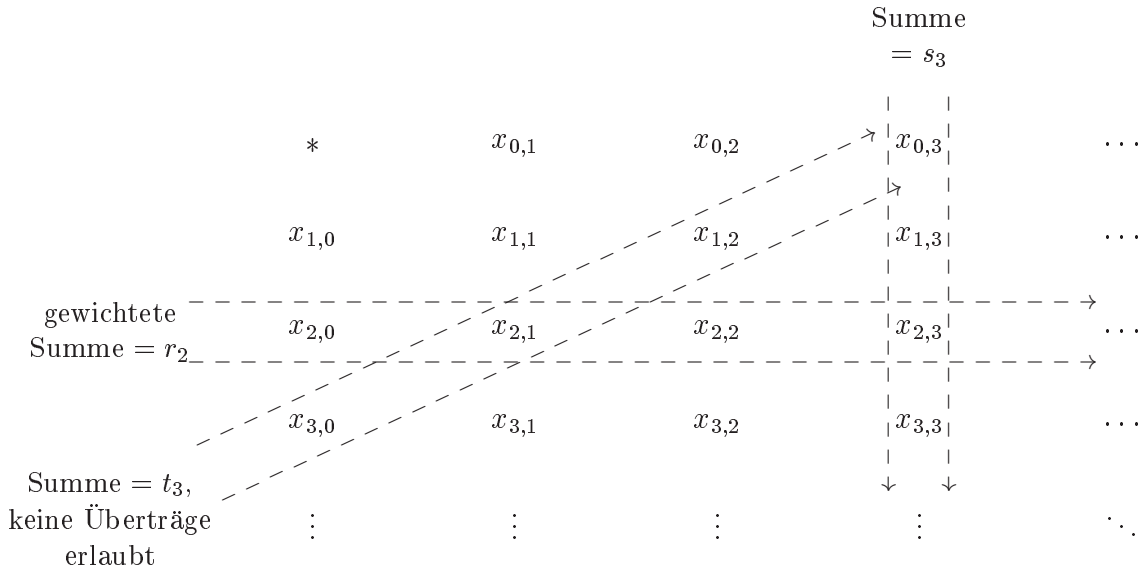


Abbildung 1.1: Multiplizieren in der Milnorbasis

Korollar 1.1.13. $(m_1 | \dots | m_k)$ ist genau dann $\neq 0 \pmod p$ wenn bei der Addition $m_1 + m_2 + \dots + m_k$ zur Basis p keine Überträge entstehen.

Der Multiplikationsalgorithmus wird in Abbildung 1.1 bildlich dargestellt. Wir geben trotzdem noch ein Beispiel: Für $p = 2$ erhält man $\text{Sq}(4) \cdot \text{Sq}(3) = \text{Sq}(7) + 0 + \text{Sq}(1, 2)$. Die zugehörigen Matrizen sehen so aus:

$$\begin{array}{ccc}
 * & 3 & * & 2 & * & 1 \\
 & & & \swarrow & & \\
 4 & & 2 & 1 & 0 & 2
 \end{array}$$

\swarrow markiert dabei einen verbotenen Übertrag, der diesen Summanden annulliert.

Für ungerades p muß man noch den äußeren Teil von A_* mitbedenken. Sei dazu $Q_i \in A$ durch

$$\langle Q_i, \tau^\varepsilon \xi^R \rangle = \begin{cases} 1 & \tau^\varepsilon \xi^R = \tau_i \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

definiert. Hier steht $\varepsilon = (\varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots)$ für eine nur aus Nullen und Einsen gebildete Exponentenfolge. Wir setzen $Q(\varepsilon) = Q^\varepsilon = \prod Q_i^{\varepsilon_i}$. Damit gilt

Lemma 1.1.14. Sei p ungerade.

- 1) Die Q_i erzeugen eine äußere Algebra $E(Q_0, Q_1, \dots) \subset A$.
- 2) Die Q_i vertauschen mit den $P(R)$ gemäß

$$[P(r_1, \dots, r_n), Q_s] = \sum_{t>0} Q_{s+t} P(r_1, \dots, r_{t-1}, r_t - p^s, r_{t+1}, \dots, r_n).$$

Falls hier $r_t - p^s < 0$ ist, wird der entsprechende Summand weggelassen.

3) $\{ Q(\varepsilon)P(R) \mid R \text{ und } \varepsilon \text{ wie oben} \}$ ist die zu $\{ \tau^\varepsilon \xi^R \} \subset A_*$ duale Vektorraumbasis von A .

Für $p = 2$ setzt man üblicherweise $Q_0 = \text{Sq}^1$, $Q_1 = \text{Sq}(0, 1)$, $Q_2 = \text{Sq}(0, 0, 1)$, usw. Auch hier erzeugen die Q_i eine äußere Unteralgebra. Die Q_i werden oft als *Milnorsche Bocksteinoperatoren* bezeichnet.

Für alle p gilt für das Koproduct $\Delta(Q_i) = Q_i \otimes 1 + 1 \otimes Q_i$.

1.1.4 Hopf-Unteralgebren

Definition 1.1.15. Eine Unteralgebra $B \subset A$, die unter dem Koproduct abgeschlossen ist, heißt *Hopf-Unteralgebra* von A .

Abgeschlossenheit bedeutet hier, daß $\Delta(B) \subset B \otimes B$ ist. Ein solches B ist also selbst eine Hopf-Algebra.

Die Hopf-Unteralgebren der Steenrod-Algebra sind von Adams und Margolis in [3] vollständig klassifiziert worden. Dazu betrachtet man Funktionen

$$\pi : \{ 1, 2, \dots \} \rightarrow \{ 0, 1, 2, \dots, \infty \}, \quad \sigma : \{ 0, 1, 2, \dots \} \rightarrow \{ 1, 2 \}$$

und die folgenden Bedingungen

$$\text{Für alle } i, j \geq 1 \text{ gilt jeweils } \pi(i) \leq j + \pi(i + j) \text{ oder } \pi(j) \leq \pi(i + j). \quad (1.1)$$

$$\text{Für alle } i \geq 1, j \geq 0 \text{ mit } \sigma(i + j) = 1 \text{ gilt } \pi(i) \leq j \text{ oder } \sigma(j) = 1. \quad (1.2)$$

Für $p > 2$ heißt das Paar (π, σ) *Profilfunktion*, falls es 1.1 und 1.2 erfüllt; für $p = 2$ betrachtet man π alleine und verlangt nur 1.1.

Zu einer Profilfunktion assoziiert man die folgenden Unterräume von A :

$$p > 2 : \quad B(\pi, \sigma) = \{ Q(\varepsilon)P(R) \mid r_i < p^{\pi(i)}, \varepsilon_j < \sigma(j) \}$$

$$p = 2 : \quad B(\pi) = \{ \text{Sq}(R) \mid r_i < 2^{\pi(i)} \}$$

Damit gilt:

Satz 1.1.16 ([3]). Die $B(\pi, \sigma)$ (bzw. $B(\pi)$ für $p = 2$) sind Hopf-Unteralgebren von A und jede Hopf-Unteralgebra von A ist von dieser Form.

Auf die $B(\pi, \sigma)$ werden wir in Abschnitt 2.2.2 zurückkommen.

1.2 Die Adams-Spektralreihe

Die Steenrod-Algebra wurde ursprünglich nicht, wie bei uns gerade geschehen, rein algebraisch definiert: man hat sie nicht er- sondern gefunden, und zwar bei der Untersuchung des Kohomologiefunktors $H^*(-; \mathbb{F}_p)$. Dem wenden wir uns nun zu. Klassische Texte zu diesem Thema sind [42] und [37].

1.2.1 Steenrod-Operationen auf der Kohomologie

Definition 1.2.1. Eine *Kohomologieoperation* ist eine natürliche Transformation $\theta : H^i(-; \mathbb{F}_p) \rightarrow H^j(-; \mathbb{F}_p)$.

Zur Klarstellung sei gesagt, daß wir hier die $H^*(-; \mathbb{F}_p)$ als Funktoren

$$\mathbf{Top}_* \rightarrow \mathbf{Set}$$

betrachten. Wir beschränken uns also auf Räume, die einen ausgezeichneten Basispunkt besitzen, und verstehen demgemäß unter $H^*(X; \mathbb{F}_p)$ immer die *reduzierten* Kohomologiegruppen. Da wir uns außerdem nicht mit Problemen und Pathologien aus der mengentheoretischen Topologie herumschlagen wollen, nehmen wir immer stillschweigend an, daß alle Räume zu CW-Komplexen homotopieäquivalent sind.

Die Definition besagt also, daß uns für jeden Raum $X \in \mathbf{Top}_*$ eine Abbildung $\theta_X : H^i(X; \mathbb{F}_p) \rightarrow H^j(X; \mathbb{F}_p)$ gegeben sein soll, die kein Homomorphismus zu sein braucht. Diese Abbildung soll für alle Räume auf die gleiche Weise definiert sein: vergleicht man nämlich zwei Räume $X, Y \in \mathbf{Top}_*$ durch eine stetige Abbildung $f : X \rightarrow Y$, so soll das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} H^i(Y; \mathbb{F}_p) & \xrightarrow{\theta_Y} & H^j(Y; \mathbb{F}_p) \\ f^* \downarrow & & \downarrow f^* \\ H^i(X; \mathbb{F}_p) & \xrightarrow{\theta_X} & H^j(X; \mathbb{F}_p) \end{array}$$

kommutieren.

Ein sehr einfaches Beispiel ist die Transformation $x \mapsto x^k$ von $H^i(-; \mathbb{F}_p)$ nach $H^{ki}(-; \mathbb{F}_p)$. Etwas anspruchsvoller ist die sogenannte *Bocksteinoperation*. Zu der kurzen exakten Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathbb{F}_p \xrightarrow{\cdot p} \mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z} \xrightarrow{\text{mod } p} \mathbb{F}_p \longrightarrow 0$$

gehört bekanntlich eine lange exakte Sequenz der Kohomologiegruppen

$$\cdots \longrightarrow H^i(X; \mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}) \xrightarrow{\text{mod } p} H^i(X; \mathbb{F}_p) \xrightarrow{\beta_p} H^{i+1}(X; \mathbb{F}_p) \longrightarrow \cdots$$

β_p ist besagte Bocksteinoperation und das einfachste Beispiel für die folgende

Definition 1.2.2. Eine *stabile Kohomologieoperation* der Dimension n ist eine Familie $\theta = (\theta_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ von Kohomologieoperationen

$$H^k(X; \mathbb{F}_p) \xrightarrow{\theta_k} H^{n+k}(X; \mathbb{F}_p),$$

für die

$$\begin{array}{ccc} H^k(X; \mathbb{F}_p) & \xrightarrow{\theta_k} & H^{n+k}(X; \mathbb{F}_p) \\ \cong \downarrow & & \downarrow \cong \\ H^{k+1}(\Sigma X; \mathbb{F}_p) & \xrightarrow{\theta_{k+1}} & H^{n+k+1}(\Sigma X; \mathbb{F}_p) \end{array}$$

kommutiert.

Hier ist $\Sigma X = C^+ X \cup_X C^- X$ die Einhängung von X , die bekanntlich aus zwei Kegeln $C^\pm X$ über X durch Verklebung längs des gemeinsamen Bodens entsteht. Die im Diagramm auftretenden *Einhängungsisomorphismen* $H^i(X; \mathbb{F}_p) \rightarrow H^{i+1}(\Sigma X; \mathbb{F}_p)$ stammen aus der Mayer-Vietoris-Sequenz

$$H^i(C^+ X) \oplus H^i(C^- X) \rightarrow H^i(X) \xrightarrow{\cong} H^{i+1}(\Sigma X) \rightarrow H^{i+1}(C^+ X) \oplus H^{i+1}(C^- X)$$

Da die Kegel zusammenziehbar sind, ist nämlich $H^*(C^\pm X) = 0$.

Die Bedeutung der Steenrod-Algebra für die Topologie wird nun durch folgenden Satz offenbar, zu dem nicht wenige Topologen beigetragen haben.

Satz 1.2.3. *Die Steenrod-Algebra ist die Algebra der stabilen Kohomologieoperationen auf $H^*(-; \mathbb{F}_p)$.*

Etwas ausführlicher gesagt:

- Für jedes X ist $H^*(X; \mathbb{F}_p)$ in natürlicher Weise ein Modul über der Steenrod-Algebra zu dieser Primzahl.

Insbesondere gehört also zu jedem $a \in A$ eine Kohomologieoperation

$$H^i(X; \mathbb{F}_p) \ni x \xrightarrow{L_a} a \cdot x \in H^{i+|a|}(X; \mathbb{F}_p).$$

Damit gilt:

- Diese Kohomologieoperationen sind stabil.
- Jede stabile Kohomologieoperation ist von dieser Form für ein eindeutig bestimmtes $a \in A$.

Beispielsweise ist Q_0 gerade die oben beschriebene Bocksteinoperation.

Man beachte, daß insbesondere jede stabile Kohomologieoperation additiv ist. Außerdem kann keine nichttriviale stabile Kohomologieoperation die Dimension vermindern; dies gilt sogar ohne die Forderung der Stabilität.

Satz 1.2.4. *Die A -Operation auf $H^*(X; \mathbb{F}_p)$ hat folgende Eigenschaften: Für ungerades p und $x, y \in H^*(X; \mathbb{F}_p)$ gilt:*

$$\text{Cartan-Formel:} \quad P(R)(xy) = \sum_{E+F=R} P(E)x \cdot P(F)y.$$

$$\text{Instabilität:} \quad \begin{aligned} |x| = 2r &\Rightarrow P^r x = x^p, \\ |x| < 2r &\Rightarrow P^r x = 0. \end{aligned}$$

$$\text{Außerdem ist} \quad Q_0 x = \beta_p x.$$

Für $p = 2$ hat man analog:

$$\text{Cartan-Formel:} \quad \text{Sq}(R)(xy) = \sum_{E+F=R} \text{Sq}(E)x \cdot \text{Sq}(F)y.$$

$$\text{Instabilität:} \quad \begin{aligned} |x| = r &\Rightarrow \text{Sq}^r x = x^2, \\ |x| < r &\Rightarrow \text{Sq}^r x = 0. \end{aligned}$$

$$\text{Außerdem ist} \quad Q_0 x = \beta_2 x.$$

Die Beziehung $\text{Sq}^{|x|} x = x^2$ ist für die Bezeichnung Sq verantwortlich: Sq steht für "square" und wird auch so gelesen.

1.2.2 Kohomologie von Eilenberg-MacLane-Räumen

Sei R eine abelsche Gruppe, $n \in \mathbb{N}$. Zur Erinnerung:

Definition 1.2.5. Ein Raum $X \in \mathbf{Top}_*$ heißt *Eilenberg-MacLane-Raum* vom Typ (R, n) falls

$$\pi_j(X) = \begin{cases} R & \text{für } j = n, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Ein solches X existiert zu jedem R und n und ist bis auf Homotopieäquivalenz eindeutig bestimmt. Es wird üblicherweise durch $K(R, n)$ bezeichnet.

Wir betrachten den Fall $R = \mathbb{F}_p$. Aus dem Satz von Hurewicz folgt, daß

$$H^k(K(\mathbb{F}_p, n); \mathbb{F}_p) = \begin{cases} 0 & \text{für } k < n, \\ \mathbb{F}_p & \text{für } k = n. \end{cases}$$

Sei $\iota_n \in H^n(K(\mathbb{F}_p, n); \mathbb{F}_p)$ die damit der $1 \in \mathbb{F}_p$ entsprechende *Fundamentalklasse*. Der folgende Satz zeigt nochmals die Bedeutung der Steenrod-Algebra für die Homotopietheorie auf:

Satz 1.2.6. $H^*(K(\mathbb{F}_p, n), \mathbb{F}_p)$ ist die von ι_n frei erzeugte instabile Algebra über der Steenrod-Algebra.

Unter einer instabilen Algebra ist dabei ein graduierter A -Modul M mit einer graduiert-kommutativen Multiplikation $M \otimes M \rightarrow M$ zu verstehen, für den die oben als "Cartan-Formel" bzw. "Instabilität" bezeichneten Rechenregeln gelten.

Damit sind Homologie und Kohomologie der Eilenberg-MacLane-Räume explizit bekannt. Stellt man Eilenberg-MacLane-Räume und Sphären in dieser Beziehung gegenüber, so ergibt sich das folgende Bild, in dem eine gewisse Spiegelsymmetrie zu erkennen ist.

	Homologie	Homotopie
$K(\mathbb{F}_p, n)$	Steenrod-Algebra	einfach
S^n	einfach	sehr kompliziert

Wir werden weiter unten bei der Diskussion der Adams-Spektralreihe hierauf zurückkommen.

Sei $A\tilde{\iota}_n$ der freie A -Modul über einem Erzeugenden $\tilde{\iota}_n$ der Dimension n . Wir betrachten die A -lineare Abbildung $\phi_n : A\tilde{\iota}_n \rightarrow H^*(K(\mathbb{F}_p, n), \mathbb{F}_p)$ mit $\tilde{\iota}_n \mapsto \iota_n$.

Lemma 1.2.7. ϕ_n ist in den Dimensionen $< 2n$ ein Isomorphismus.

Beweisskizze. Sei $X = K(\mathbb{F}_p, n)$. Die Instabilitätsrelationen in $H^*(X; \mathbb{F}_p)$ setzen erst in der Dimension pn mit $P^{n/2}\iota_n = \iota_n^p$ ein; da sich daraus keine Relationen zwischen den $a\iota_n$ mit $|a| < n$ herleiten lassen, ist ϕ_n bis zur Dimension $pn - 1$ injektiv.

Andererseits ist ϕ_n bis zur Dimension $2n - 1$ auch surjektiv: Da $H^*(X; \mathbb{F}_p)$ durch Steenrod-Operationen und Multiplikationen aus ι_n erzeugt wird, muß sich jede Klasse, die nicht im Bild von ϕ_n ist, aus Produkten zusammensetzen. Da die Kohomologie von X aber erst in der Dimension n anfängt, hat jedes nichttriviale Produkt mindestens Dimension $2n$. \square

Geht man nun geschickt zum Limes über die $K(\mathbb{F}_p, n)$ über, so kann man aus den $H^*(K(\mathbb{F}_p, n); \mathbb{F}_p)$ einen freien A -Modul herausschälen:

Korollar 1.2.8. *Der Limes*

$$H \mathbb{F}_p \overset{k}{\leftarrow} H \mathbb{F}_p := \lim_{\leftarrow} H^{k+n}(K(\mathbb{F}_p, n); \mathbb{F}_p)$$

ist ein freier A -Modul mit einem Erzeugenden ι in der Dimension Null.

Um die Bildung solcher Limiten und ihre homotopietheoretische Interpretation geht es im nächsten Abschnitt.

1.2.3 Stabile Homotopietheorie

Stabile Homotopietheorie ist eine Approximation an die Homotopietheorie, die neben vielen anderen Vorzügen auch den nicht unbedeutenden hat, *einfacher* als die gewöhnliche zu sein. Es ist unmöglich, auf wenigen Seiten eine auch nur annähernd adäquate Einführung in dieses wichtige und umfangreiche Gebiet zu geben. Wir beschränken uns deshalb auf die “bare essentials”. Der wißbegierige Leser möge sich aus [43], [2] oder [29] weitere Hinweise besorgen. Wer aktuellere Entwicklungen verstehen möchte, kommt um die technisch anspruchsvolleren [22] und [18] nicht herum.

Definition 1.2.9. Seien $X, Y \in \mathbf{Top}_*$, X kompakt. Die Elemente des Kolimes

$$\{X, Y\} := \operatorname{colim}_{\rightarrow} [\Sigma^k X, \Sigma^k Y]$$

heißen *stabile Homotopieklassen*.

Nach Konstruktion hat man eine natürliche Abbildung $[X, Y] \rightarrow \{X, Y\}$, und eine kanonische Bijektion $\{X, Y\} \cong \{\Sigma X, \Sigma Y\}$. Aus letzterer folgt, daß $\{\Sigma^k X, \Sigma^l Y\}$ für beliebige *ganze* Zahlen $k, l \in \mathbb{Z}$ Sinn macht: dazu setze man einfach

$$\{\Sigma^k X, \Sigma^l Y\} := \{\Sigma^{n+k} X, \Sigma^{n+l} Y\} \quad \text{sobald } n+k \geq 0 \text{ und } n+l \geq 0.$$

Man erhält somit eine Kategorie, wenn man als Objekte “formale Einhängungen” $\Sigma^k X$, $k \in \mathbb{Z}$, und als Morphismen die stabilen Homotopiemengen wählt. Diese Kategorie **SW** ist als *Spanier-Whitehead-Kategorie* bekannt. Man hat offenbar einen kanonischen Funktor $\mathbf{Top}_* \rightarrow \mathbf{SW}$ mit $X \mapsto \Sigma^0 X$.

Beim Vergleich zwischen stabilen und gewöhnlichen Homotopiemengen zeigt sich, daß die $\{X, Y\}$ immer noch geometrisch interpretiert werden können:

Satz 1.2.10 (Freudenthal’s Einhängungssatz). *Für $\dim X \leq 2 \cdot \operatorname{conn} Y$ ist $[X, Y] \rightarrow [\Sigma X, \Sigma Y]$ bijektiv.*

Hier ist $\operatorname{conn} Y$ die *Konnektivität* von Y : $1 + \operatorname{conn} Y = \min\{j \mid \pi_j(Y) \neq 0\}$. Da man $\dim \Sigma^k X = k + \dim X$ und $\operatorname{conn} \Sigma^k Y = k + \operatorname{conn} Y$ hat, wird der Kolimes in der Definition von $\{X, Y\}$ angenommen: es ist $\{X, Y\} = [\Sigma^k X, \Sigma^k Y]$ für alle hinreichend großen k .

1 Hintergrund

$n \setminus k$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	∞	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	∞	∞	2	2	12	2	2	3	15	2	2^2
3	∞	2	2	12	2	2	3	15	2	2^2	12.2
4	∞	2	2	$\infty.12$	2^2	2^2	24.3	15	2	2^3	120.12.2
5	∞	2	2	24	2	2	2	30	2	2^3	72.2
6	∞	2	2	24	0	∞	2	60	24.2	2^3	72.2
7	∞	2	2	24	0	0	2	120	2^3	2^4	24.2
8	∞	2	2	24	0	0	2	$\infty.120$	2^4	2^5	$24^2.2$
9	∞	2	2	24	0	0	2	240	2^3	2^4	24.2
10	∞	2	2	24	0	0	2	240	2^2	$\infty.2^3$	12.2
11	∞	2	2	24	0	0	2	240	2^2	2^3	6.2
12	∞	2	2	24	0	0	2	240	2^2	2^3	6
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots

Abbildung 1.2: $\pi_{n+k}(S^n)$ nach [46], zitiert nach [39]. $a.b.c\dots$ steht für $\mathbb{Z}_a \oplus \mathbb{Z}_b \oplus \dots$, ∞ steht für \mathbb{Z} , 0 für 0. \mathbb{Z}_a steht für $\mathbb{Z}/a\mathbb{Z}$.

Definition 1.2.11. $\pi_n^{\text{stab}}(X) := \{S^n, X\}$ heißt n -te stabile Homotopiegruppe von X .

Da $S^k = \Sigma^k S^0$ ist, hat man $\pi_{n+k}^{\text{stab}}(S^k) = \pi_n^{\text{stab}}(S^0)$ für alle n, k . Man schreibt deswegen auch einfach $\pi_n^{\text{stab}}(S)$ oder gar π_n^{stab} für diese Gruppe. $\pi_n^{\text{stab}}(S)$ wird n -Stamm oder auch n -te stabile Homotopiegruppe der Sphäre genannt. Abbildung 1.2 zeigt einen Teil der von Toda in [46] berechneten Homotopiegruppen $\pi_{n+k}(S^n)$. Dort kann man die Stabilisierung dieser Gruppen sehr schön erkennen.

In der stabilen Homotopietheorie erweitert man die Definition von $\{X, Y\}$ so, daß man für X und Y weit mehr als nur kompakte Räume einsetzen darf.

Definition 1.2.12. Ein *Präspektrum* ist eine Folge von Räumen $(E_n)_{n \geq 0}$ aus \mathbf{Top}_* mit Strukturabbildungen $\sigma_n : \Sigma E_n \rightarrow E_{n+1}$.

Ein Beispiel hierfür haben wir schon gesehen: die Eilenberg-MacLane-Räume $K(R, n)$ lassen sich durch Abbildungen

$$\Sigma K(R, n) \rightarrow K(R, n+1)$$

miteinander verbinden, und genau über diese Abbildungen haben wir oben den Limes $\lim_{\leftarrow} H^{n+k}(K(\mathbb{F}_p, n); \mathbb{F}_p)$ gebildet. Ein anderes Beispiel sind die *Einhängungspräspektren* zu $X \in \mathbf{Top}_*$: hier setzt man $E_n = \Sigma^n X$, die Strukturabbildungen $\sigma_n : \Sigma \Sigma^n X \rightarrow \Sigma^{n+1} X$ seien die Identität.

Generell sollte man sich ein Präspektrum E als gerichtetes System

$$E_0 \xrightarrow{\Sigma^{-1}\sigma_0} \Sigma^{-1}E_1 \xrightarrow{\Sigma^{-2}\sigma_1} \Sigma^{-2}E_2 \xrightarrow{\Sigma^{-3}\sigma_2} \Sigma^{-3}E_3 \xrightarrow{\Sigma^{-4}\sigma_3} \dots$$

vorstellen, daß sich nur leider in \mathbf{Top}_* nicht interpretieren läßt, geschweige, daß es dort einen Limes hätte. Die Homotopietheoretiker sind nun aber, über den langen

und mühsamen Weg von [23] durch [2] zu [18], in die glückliche Lage gekommen, diese fehlenden Limiten adjungieren zu können: man hat eine Kategorie **Spectra** konstruiert, in der ebenfalls Homotopietheorie betrieben werden kann. Die Objekte dieser Kategorie heißen *Spektren*. Nach Konstruktion hat man einen Funktor

$$\Sigma^\infty : \mathbf{Top}_* \rightarrow \mathbf{Spectra}$$

der jedem X das zugehörige *Einhängungsspektrum* zuordnet. Dabei ist für kompaktes X

$$[\Sigma^\infty X, \Sigma^\infty Y]_{\mathrm{Ho}(\mathbf{Spectra})} = \{X, Y\}.$$

Der Übergang von \mathbf{Top}_* zu $\mathbf{Spectra}$ hat also gerade den oben beschriebenen Stabilisierungseffekt.

Spektren lassen sich nicht nur ein-, sondern auch aushängen. Hat man ein Präspektrum E so kann man deshalb das zugehörige gerichtete System in $\mathbf{Spectra}$ realisieren

$$\Sigma^\infty E_0 \xrightarrow{\Sigma^{-1}\sigma_0} \Sigma^{\infty-1} E_1 \xrightarrow{\Sigma^{-2}\sigma_1} \Sigma^{\infty-2} E_2 \xrightarrow{\Sigma^{-3}\sigma_2} \Sigma^{\infty-3} E_3 \xrightarrow{\Sigma^{-4}\sigma_3} \dots$$

und dort besitzt es einen Kolimes: das zu E assoziierte Spektrum. Umgekehrt läßt sich auch jedes Spektrum als ein solcher Kolimes schreiben.

Stabile Homotopietheorie ist nun nichts anderes als die Homotopietheorie der Spektren. In vielerlei Hinsicht ist Homotopietheorie in $\mathbf{Spectra}$ anders als Homotopietheorie in \mathbf{Top}_* . Wir stellen ein paar Eigenheiten kurz vor:

- $\mathrm{Ho}(\mathbf{Spectra})$ ist eine additive Kategorie: für $E, F \in \mathbf{Spectra}$ ist $[E, F]$ eine abelsche Gruppe.

Dies folgt daraus, daß Spektren immer als Einhängung geschrieben werden können: $E = \Sigma^2 \Sigma^{-2} E$ und schon in der gewöhnlichen Homotopietheorie ist $[\Sigma^2 X, Y]$ immer eine abelsche Gruppe. Tatsächlich gilt sogar

- $\mathrm{Ho}(\mathbf{Spectra})$ ist eine triangulierte Kategorie in Bezug auf die Gesamtheit der Dreiecke

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{f} & F \\ & \swarrow \text{wavy} & \searrow \\ & F \cup_f CE & \end{array}$$

Dabei ist $f : E \rightarrow F$ eine beliebige Abbildung aus $\mathbf{Spectra}$.

Ein Pfeil $X \rightsquigarrow Y$ bezeichnet dabei eine Abbildung $X \rightarrow \Sigma Y$. Die Aussage bedeutet im wesentlichen, daß $[Z, -]$ und $[-, Z]$ für jedes $Z \in \mathbf{Spectra}$ dieses Dreieck in eine lange exakte Sequenz überführen. Insbesondere erhält man im Fall $Z = S^n$ zu jeder Inklusion $A \hookrightarrow X$ eine lange exakte Homotopiesequenz

$$\dots \rightarrow \pi_n(A) \rightarrow \pi_n(X) \rightarrow \pi_n(X/A) \rightarrow \pi_{n-1}(A) \rightarrow \dots$$

$X \mapsto \pi_*(X)$ ist also für Spektren X eine Homologietheorie.

1 Hintergrund

- Jede verallgemeinerte Kohomologietheorie $E^*(-) : \mathbf{Top}_* \rightarrow \mathbf{Ab}$ setzt sich kanonisch auf **Spectra** fort und ist dort darstellbar.

Darstellbarkeit heißt, daß es ein im wesentlichen eindeutig bestimmtes Spektrum E gibt, für das auf natürliche Weise $E^k(X) = [\Sigma^k X, E]$ für alle $X \in \mathbf{Spectra}$ gilt.

Auf Spektren läßt sich der Smash-Produkt-Funktor $\wedge : \mathbf{Top}_* \times \mathbf{Top}_* \rightarrow \mathbf{Top}_*$ übertragen.

- Jede verallgemeinerte Homologietheorie $E_*(-) : \mathbf{Top}_* \rightarrow \mathbf{Ab}$ setzt sich kanonisch auf **Spectra** fort und ist dort darstellbar.

Hier soll Darstellbarkeit heißen, daß es ein kanonisches $E \in \mathbf{Spectra}$ mit $E_k(X) = \pi_k(E \wedge X)$ für alle $X \in \mathbf{Spectra}$ gibt.

Unser wichtigstes Beispiel ist die gewöhnliche Kohomologie: es ist

$$H^k(X; R) = [\Sigma^k X, HR], \quad H_k(X; R) = \pi_k(HR \wedge X)$$

wobei

$$HR := \operatorname{colim}_{\rightarrow} \Sigma^{\infty-n} K(R, n)$$

das Eilenberg-MacLane-Spektrum zu $R \in \mathbf{Ab}$ ist. Dieses könnte man auch durch

$$\pi_j(HR) = \begin{cases} R & j = 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

bis auf Homotopieäquivalenz charakterisieren.

In Korollar 1.2.8 haben wir bereits gesehen, daß $H\mathbb{F}_p^* H\mathbb{F}_p$ ein freier A -Modul über $\iota \in H\mathbb{F}_p^0 H\mathbb{F}_p$ ist. Wie wir jetzt wissen, können wir dies auch als

$$H\mathbb{F}_p^* H\mathbb{F}_p = [\Sigma^* H\mathbb{F}_p, H\mathbb{F}_p] = \pi_*(\operatorname{End}(H\mathbb{F}_p))$$

schreiben. Da Endomorphismen einen Ring bilden, ist folgender Satz wohl nicht unplausibel:

Satz 1.2.13. $\pi_*(\operatorname{End}(H\mathbb{F}_p))$ ist die Steenrod-Algebra zur Primzahl p .

Dem ι aus Korollar 1.2.8 entspricht einfach die identische Abbildung auf $H\mathbb{F}_p$.

1.2.4 Adams-Spektralreihe

Wir nähern uns dem Ende unseres kleinen Schnellkurses in Homotopietheorie. Als letztes möchten wir noch erklären, was die Adams-Spektralreihe ist und tut, bevor wir uns dann unserer eigentlichen Bestimmung, nämlich der unverfälschten, reinen Algebra, zuwenden werden.

Erinnern wir uns an die kleine Tabelle in Abschnitt 1.2.2, jetzt in stabilisierter Form:

	Kohomologie	Homotopie
$H\mathbb{F}_p$	Steenrod-Algebra	einfach
S	einfach	sehr kompliziert

Die Idee hinter der Adams-Spektralreihe besteht darin, ein ziemlich beliebiges Spektrum X so gut wie möglich aus Eilenberg-MacLane-Spektren nachzubauen. Bei diesem Prozess

- entsteht aus den bekannten und ziemlich banalen Homotopiegruppen der Eilenberg-MacLane-Spektren die womöglich sehr komplizierte Struktur der Homotopiegruppen $\pi_*(X)$

während gleichzeitig

- die Kohomologie von X aus der Kohomologie der Eilenberg-MacLane-Spektren, dh. aus freien A -Moduln, nachgebaut wird.

Die Komplexität von $\pi_*(X)$ sollte also dem Maß der Unfreiheit von $H^*(X; \mathbb{F}_p)$ als A -Modul entsprechen.

Die Idee des Nachbaus wird – allerdings in invertierter Form: als Abbau – in der folgenden Definition präzisiert. Sei X ein Spektrum und p prim.

Definition 1.2.14 (vgl. [39], Ch. 2.1). Eine *Adams-Auflösung* von X bezüglich $H \mathbb{F}_p$ ist ein Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc}
 X = X_0 & \xleftarrow{g_1} & X_1 & \xleftarrow{g_2} & X_2 & \xleftarrow{g_3} & \dots \\
 & \searrow r_0 & \nearrow s_0 & \searrow r_1 & \nearrow s_1 & \searrow r_2 & \nearrow s_2 \\
 & & E_0 & & E_1 & & E_2
 \end{array}$$

von Spektren X_i , sodaß folgendes gilt:

- Jedes g_i induziert in der Kohomologie $H^*(-; \mathbb{F}_p)$ die Null.
- Jedes E_i ist ein verallgemeinertes Eilenberg-MacLane-Spektrum V zu einem graduierten \mathbb{F}_p -Vektorraum V_i .

Ist also $V_i = \bigoplus_j V_{i,j}$ die Zerlegung in homogene Bestandteile, so soll

$$E_i = \bigvee_j \Sigma^j H V_{i,j}$$

sein. Damit gilt insbesondere $\pi_j(HV_i) = V_{i,j}$.

- In jedem Dreieck ist $X_{i+1} = E_i \cup_{r_i} C X_i$.

Letzteres darf und sollte man sich als $\Sigma X_{i+1} \subset X_i$ mit $X_i / \Sigma X_{i+1} = E_i$ vorstellen; beim Schritt von X_i zu ΣX_{i+1} wird also nur ein verallgemeinertes Eilenberg-MacLane-Spektrum von X_i weggenommen.

Man kann zeigen, daß jedes Spektrum eine solche Adams-Auflösung besitzt. Aus einer solchen Auflösung ergeben sich

- eine Filtrierung von $\pi_*(X)$ durch die Bilder $\pi_{*+k}(X_k) \rightarrow \pi_*(X)$,

1 Hintergrund

- eine Folge langer exakter Homotopiesequenzen

$$\cdots \rightarrow \pi_{t+1}(X_{s+1}) \rightarrow \pi_t(X_s) \rightarrow \pi_t(E_s) \rightarrow \pi_t(X_{s+1}) \rightarrow \cdots$$

und

- eine A -freie Auflösung

$$\begin{array}{ccccccc} & & H^*(X) & & H^*(X_1) & & H^*(X_2) & & \cdots \\ & & \swarrow & & \swarrow & & \swarrow & & \\ & & d_0 & & s_0^* & & s_1^* & & \\ & & \searrow & & \searrow & & \searrow & & \\ & & H^*(E_0) & \xleftarrow{d_1} & H^*(E_1) & \xleftarrow{d_2} & H^*(E_2) & & \end{array}$$

von $H^*(X; \mathbb{F}_p)$.

Diese Zutaten werden im folgenden Satz systematisch zusammengebracht.

Satz 1.2.15. *Zu jeder Adams-Auflösung von X gehört eine Spektralreihe $E_r^{s,t}$, $d_r : E_r^{s,t} \rightarrow E_r^{s+r,t-r-1}$, $r \geq 1$, mit:*

- $E_1^{s,t} = \pi_t(E_s) = \text{Hom}_A^t(H^*(E_s), \mathbb{F}_p)$.
- $E_2^{s,t} = \text{Ext}_A^{s,t}(H^*(X), \mathbb{F}_p)$.
- Falls alle Homotopiegruppen $\pi_k(X)$ endlich erzeugt sind und $\pi_k(X) = 0$ für $k \ll 0$ gilt, so konvergiert die Spektralreihe gegen die p -Lokalisierungen $\pi_{t-s}(X)_{(p)}$.
- Die E_r und d_r für $r \geq 2$ hängen nicht mehr von der Wahl der Adams-Auflösung ab.

Die zur Konvergenz nötigen Annahmen sind in den von uns anvisierten Fällen immer erfüllt. Auch ist klar, daß man Konvergenz nicht gegen die Homotopiegruppen selbst, sondern bestenfalls gegen die p -Lokalisierung dieser Gruppen erwarten darf; schließlich kann $H^*(-; \mathbb{F}_p)$ Torsionsphänomene zu den von p verschiedenen Primzahlen einfach nicht sehen.

Die Bigraduierung der Ext-Gruppen erklärt sich daraus, daß die $H^*(E_i; \mathbb{F}_p)$ selber schon eine Graduierung mitbringen. In dem Ausdruck $\text{Ext}_A^{s,t}(-, -)$ steht s für den üblichen homologischen Grad und t für diesen *internen Grad*.

Wir erwähnen noch eine Verallgemeinerung:

Satz 1.2.16. *Für Spektren X und Y läßt sich aus einer Adams-Auflösung von Y eine Spektralreihe*

$$E_2^{s,t} = \text{Ext}_A^{s,t}(H^*(Y), H^*(X)) \Rightarrow [\Sigma^{t-s} X, Y]_{(p)}$$

konstruieren, die unter vergleichbaren Bedingungen konvergiert.

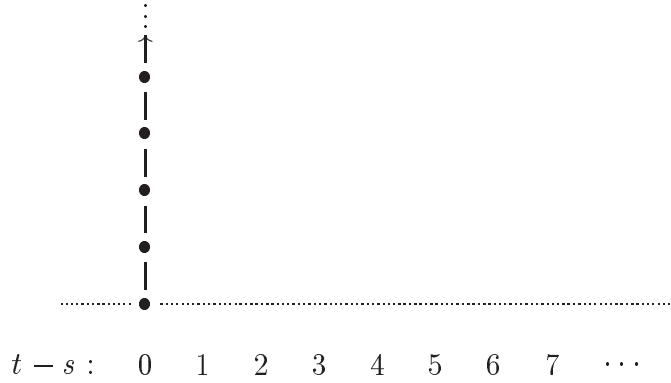


Abbildung 1.3: E_2 -Term für $\pi_*(H\mathbb{Z})$

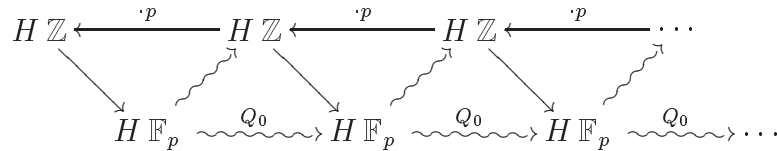
1.2.5 Beispiele

Wir geben zwei Beispiele zur Illustration der Spektralsequenz.

$X = H\mathbb{Z}$: Unabhängig von p sieht der E_2 -Term wie in Abbildung 1.3 aus. Dabei haben wir das gebräuchliche Koordinatensystem für solche Darstellungen mit $(x, y) = (t - s, s)$ verwendet. Im Bild ist in jedem Kästchen eine Basis von

$$\text{Ext}_A^{s,t}(H^*(H\mathbb{Z}; \mathbb{F}_p), \mathbb{F}_p) = \begin{cases} \mathbb{F}_p & t - s = 0, \\ 0 & t - s \neq 0, \end{cases}$$

durch Punkte dargestellt. Die Spektralreihe kollabiert, weil keine nichttrivialen Differentiale möglich sind. Eine Adams-Auflösung von $H\mathbb{Z}$ wird durch



gegeben. Die zugehörige Adams-Filtrierung von $\pi_*(H\mathbb{Z}) = \pi_0(H\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$ ist gerade

$$\mathbb{Z} \supset p\mathbb{Z} \supset p^2\mathbb{Z} \supset p^3\mathbb{Z} \supset \dots$$

und was man im Bild sieht sind die Quotienten

$$E_2^{s,s} = E_\infty^{s,s} = p^s \mathbb{Z}_{(p)} / p^{s+1} \mathbb{Z}_{(p)} = p^s \mathbb{Z} / p^{s+1} \mathbb{Z} \cong \mathbb{F}_p.$$

Aus der Adams-Auflösung ergibt sich übrigens, daß $H^*(H\mathbb{Z}; \mathbb{F}_p) = A/AQ_0$ ist.

$X = S$: Wir betrachten hier nur $p = 2$. Für die Sphäre sieht der E_2 -Term schon komplizierter aus. Abbildung 1.4 zeigt den Anfangsbereich $t - s \leq 9$. Die vertikalen Linien zeigen die Wirkung $\text{Ext}_A^{s,t} \rightarrow \text{Ext}_A^{s+1,t+1}$ der Multiplikation $x \mapsto h_0 x$. Dabei ist $h_0 \in E_2^{1,1}$ das von Null verschiedene Element. Die diagonalen Linien zeigen ganz analog die Multiplikation mit $0 \neq h_1 \in E_2^{1,2}$. Auch diese Spektralreihe kollabiert, allerdings nur in dem von uns betrachteten Bereich. Man erkennt, daß $\pi_k(S)_{(2)}$ für $k \leq 9$ eine Kompositionsreihe mit den folgenden Quotienten hat:

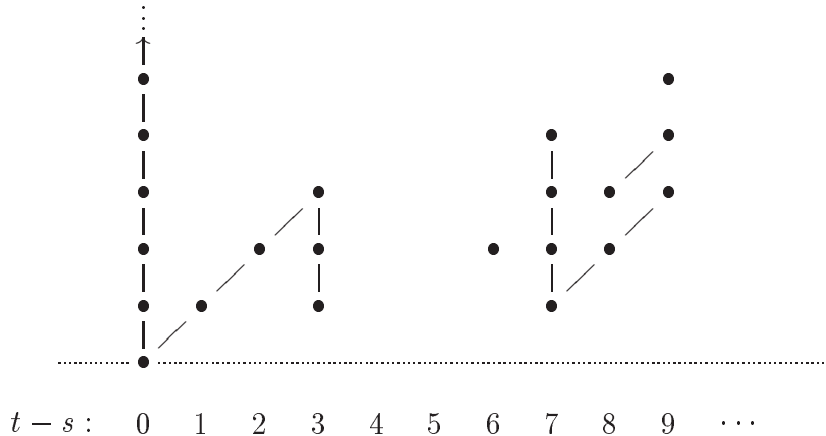


Abbildung 1.4: E_2 -Term für $\pi_*(S)_{(2)}$ bis zur Dimension 9

$\pi_0(S)$:	$\mathbb{F}_2, \mathbb{F}_2, \mathbb{F}_2, \mathbb{F}_2, \dots$	$\pi_5(S)$:	0
$\pi_1(S)$:	\mathbb{F}_2	$\pi_6(S)$:	\mathbb{F}_2
$\pi_2(S)$:	\mathbb{F}_2	$\pi_7(S)$:	$\mathbb{F}_2, \mathbb{F}_2, \mathbb{F}_2, \mathbb{F}_2$
$\pi_3(S)$:	$\mathbb{F}_2, \mathbb{F}_2, \mathbb{F}_2$	$\pi_8(S)$:	$\mathbb{F}_2, \mathbb{F}_2$
$\pi_4(S)$:	0	$\pi_9(S)$:	$\mathbb{F}_2, \mathbb{F}_2, \mathbb{F}_2$

Man vergleiche dies mit Abbildung 1.2.

Mehr zur Adams-Spektralreihe findet der interessierte Leser in [39]. Wir wollen aber jetzt zum algebraischen Kern dieser Arbeit kommen, und beenden deswegen hier den topologischen Einschub.

1.3 Minimale Auflösungen

Wir haben hoffentlich den Leser davon überzeugt, daß die Ext-Gruppen $\text{Ext}_A^{s,t}(M, N)$ in der Homotopietheorie eine wichtige Rolle spielen. Um Methoden zu ihrer Berechnung wird es im folgenden gehen.

1.3.1 Allgemein

Will man Kohomologiegruppen berechnen, so kommt man am Begriff der Auflösung nicht vorbei: es gibt kein algorithmisches Verfahren, das solche Gruppen direkt, dh. ohne Bezug auf eine Auflösung, bestimmen könnte.

A sei im folgenden eine graduierte, zusammenhängende, lokal endlich-dimensionale Hopf-Algebra mit Konjugation über einem Körper k . Mit I bezeichnen wir das Augmentationsideal $I = \ker \varepsilon : A \rightarrow k$. Alle von uns betrachteten Moduln seien von unten beschränkt, dh. es sei $M_j = 0$ für $j \ll 0$. Sei M ein A -Modul.

Definition 1.3.1. Eine Auflösung von M über A ist ein Kettenkomplex

$$C_0 \xleftarrow{d_1} C_1 \xleftarrow{d_2} C_2 \xleftarrow{d_3} C_3 \xleftarrow{d_4} \dots$$

aus freien A -Moduln C_s mit einer Augmentation $d_0 : C_0 \rightarrow M$, sodaß

$$M \xleftarrow{d_0} C_0 \xleftarrow{d_1} C_1 \xleftarrow{d_2} C_2 \xleftarrow{d_3} C_3 \xleftarrow{d_4} \dots$$

exakt ist.

Wir betrachten also ausschließlich freie Auflösungen, unter anderem weil über der Steenrod-Algebra sowieso jeder von unten beschränkte, projektive Modul frei ist ([29], Ch. 13.3, Th. 12). Ist $M = k$, so spricht man auch schlicht von einer *Auflösung von A* .

Hat man eine solche Auflöung, so setzt man bekanntlich

$$\mathrm{Tor}_{s,t}^A(M, N) = H_{s,t}(N \otimes_A C_*) \quad \text{und} \quad \mathrm{Ext}_A^{s,t}(M, N) = H^{s,t}(\mathrm{Hom}_A(C_*, N)).$$

Tatsächlich reicht es, Auflösungen von k zu betrachten, denn man hat $M \cong M \wedge k$ und das folgende

Lemma 1.3.2. *Ist C_* eine Auflöung von M , so ist $N \wedge C_*$ eine Auflöung von $N \wedge M$.*

Beweis. $N \wedge C_*$ ist wieder exakt, weil wir das Tensorprodukt über einem Körper bilden, und aufgrund von Lemma 1.1.5 ist $N \wedge C_*$ wieder ein Komplex freier A -Moduln. \square

$\mathrm{Ext}_A^{s,t}(M, k)$ und $\mathrm{Tor}_{s,t}^A(M, k)$ sind zueinander duale Vektorräume, denn es gilt

Lemma 1.3.3. *Für jeden A -Modul M ist $(k \otimes_A M)^* = \mathrm{Hom}_A(M, k)$.*

Beweis. Als A -Modul ist $k = A/I$, weil $I = \ker \varepsilon : A \rightarrow k$ und ε surjektiv ist. Also ist $k \otimes_A M = M/IM$ für jeden A -Modul M . Ein $\psi : M \rightarrow k$ ist aber genau dann A -linear, wenn es auf IM verschwindet, denn I operiert auf dem Bild als Null. Also ist $\mathrm{Hom}_A(M, k) = \mathrm{Hom}_k(M/IM, k) = \mathrm{Hom}_k(k \otimes_A M, k)$ wie behauptet. \square

Im folgenden seien C_*, C'_*, \dots Auflösungen von k über A .

Definition 1.3.4. Eine Auflöung C_* heißt minimal, wenn die folgenden, untereinander äquivalenten, Bedingungen erfüllt sind:

- 1) Das Differential auf $k \otimes_A C_*$ ist Null.
- 2) Das Differential auf $\mathrm{Hom}_A(C_*, k)$ ist Null.
- 3) Wählt man A -Basen in C_* , so stammt in der diesbezüglichen Matrixdarstellung des Differentials jeder Eintrag aus dem Augmentationsideal I .

Beweis der Äquivalenz. 1) \Leftrightarrow 2) folgt aus Lemma 1.3.3, denn $k \otimes_A C_*$ und $\mathrm{Hom}_A(C_*, k)$ sind zueinander k -duale Kettenkomplexe. 3) ist nur eine Umformulierung von 1): das Differential auf $k \otimes_A C_*$ erhält man gerade aus der in 3) betrachteten Matrix durch Reduktion modulo I . \square

Wir werden im nächsten Abschnitt sehen, daß minimale Auflösungen existieren.

Definition 1.3.5. Seien C_* , C'_* Auflösungen desselben Moduls M . Eine Kettenabbildung $\phi : C_* \rightarrow C'_*$, die die Identität auf M hebt, nennen wir *Vergleichsabbildung*.

Bekanntlich, lassen sich zwei beliebige Auflösungen immer durch solche Abbildungen vergleichen.

Lemma 1.3.6. Seien C_* und C'_* Auflösungen von k und $\phi : C_* \rightarrow C'_*$ eine Vergleichsabbildung. Dann gilt:

- 1) C_* minimal $\Rightarrow \phi$ ist injektiv.
- 2) C'_* minimal $\Rightarrow \phi$ ist surjektiv.
- 3) C_* und C'_* minimal $\Rightarrow \phi$ ist ein Isomorphismus.

Beweis. Wir zeigen zunächst 3). Bekanntlich stiftet eine Vergleichsabbildung einen kanonischen Isomorphismus $H(k \otimes_A C_*) \cong H(k \otimes_A C'_*)$, da beide Seiten gerade $\text{Tor}_{*,*}^A(k, k)$ sind. Aufgrund der Minimalität ist aber $k \otimes_A C_* = H(k \otimes_A C_*)$ und $k \otimes_A C'_* = H(k \otimes_A C'_*)$. Also ist zumindest

$$\text{id} \otimes \phi : k \otimes_A C_* \rightarrow k \otimes_A C'_*$$

ein Isomorphismus. Wir betrachten nun die exakten Sequenzen $I^{n+1} \twoheadrightarrow I^n \twoheadrightarrow I^n/I^{n+1}$. Da I^n/I^{n+1} als A -Modul eine Summe von Kopien von k ist, ergibt sich durch Induktion, daß auch jedes

$$\text{id} \otimes \phi : A/I^n \otimes_A C_* \rightarrow A/I^n \otimes_A C'_*$$

ein Isomorphismus ist. Da $A \twoheadrightarrow A/I^n$ in den Dimensionen $< n$ bijektiv ist, erhält man im Limes die Behauptung.

1) und 2) ergeben sich als Korollar. Wählt man nämlich eine beliebige Vergleichsabbildung $\psi : C'_* \rightarrow C_*$ in die entgegengesetzte Richtung, so ist im Fall 1) $\psi \circ \phi$, und im Fall 2) $\phi \circ \psi$ ein Automorphismus. \square

Korollar 1.3.7. Je zwei minimale Auflösungen sind isomorph. Die minimale Auflösung ist ein Retrakt jeder anderen Auflösung.

Insbesondere ist die minimale Auflösung auch dadurch charakterisiert, daß sie die kleinstmögliche Auflösung ist.

1.3.2 Der Standardalgorithmus

Beim algorithmischen Berechnen von Auflösungen hat man es mit partiellen Auflösungen zu tun, und nicht mit vollständigen Auflösungen, die ja im allgemeinen unendlich-dimensionale Objekte sind.

Definition 1.3.8. Setze (siehe Abbildung 1.5)

$$\begin{aligned} R_{s,t} &= \{ (u, v) \in \mathbb{Z}^2 \mid u \leq s, v \leq t \}, \\ R_{s,t}^o &= R_{s,t} \setminus \{ (s, t) \}. \end{aligned}$$

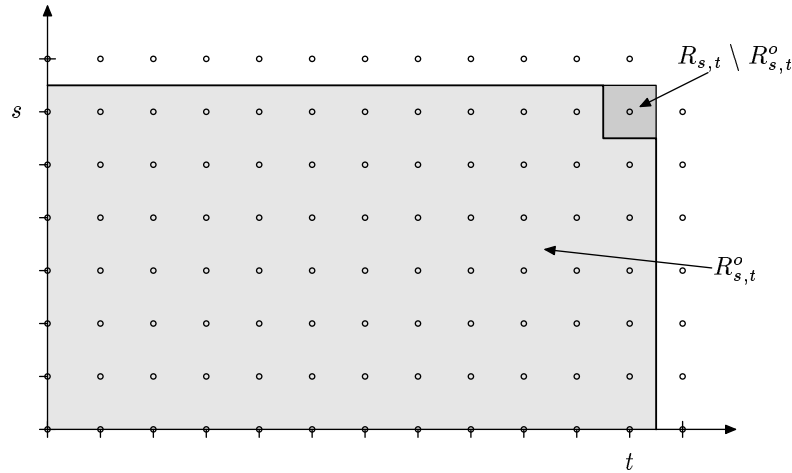


Abbildung 1.5: $R_{s,t}$ und $R_{s,t}^o$

Für $X = R_{s,t}$ oder $X = R_{s,t}^o$ nennen wir einen Kettenkomplex (C_*, d_*) aus A -freien C_s mit einer Augmentation $d_0 : C_0 \rightarrow k$, sodaß

$$k \xleftarrow{d_0} C_0 \xleftarrow{d_1} C_1 \xleftarrow{d_2} C_2 \xleftarrow{d_3} C_3 \xleftarrow{d_4} \dots$$

in allen Bigraden $(u, v) \in X$ exakt ist, eine X -Auflösung von A . Zur bequemeren Bezugnahme vereinbaren wir

$$\begin{aligned} R_{s,t}\text{-Auflösung} &= \text{partielle Auflösung bis } (s, t), \\ R_{s,t}^o\text{-Auflösung} &= \text{in } (s, t) \text{ erweiterbare Auflösung.} \end{aligned}$$

Beispielsweise ist C_*^{anf} mit $C_0^{\text{anf}} = A$, $d_0 = \varepsilon$ und $C_s^{\text{anf}} = 0$ für $s > 0$ eine partielle Auflösung bis zu $(0, 0)$. Dies heißt ja einfach, daß $\varepsilon : A \rightarrow k$ in der Dimension 0 bijektiv ist.

Wie der Name schon verspricht, kann man $\text{Ext}_A^{s,t}(k, k)$ und $\text{Tor}_{s,t}^A(k, k)$ aus einer partiellen Auflösung teilweise berechnen:

Lemma 1.3.9. *Ist C_* eine partielle Auflösung bis zu (s, t) , so ist*

$$\begin{aligned} \text{Ext}_A^{u,v}(k, k) &= H^{u,v}(\text{Hom}_A(C_*, k)), \\ \text{Tor}_{u,v}^A(k, k) &= H_{u,v}(k \otimes_A C_*) \end{aligned}$$

für $u < s$ und $v \leq t$.

Beweis. Klar. Siehe auch Korollar 3.1.2. □

C_*^{anf} dient als Ausgangspunkt für die Konstruktion einer minimalen Auflösung. Zur Ausdehnung folgt man dem

Erweiterungsschritt. Sei C_* eine in (s, t) erweiterbare Auflösung.

- 1) Berechne $H_{s,t}(C_*)$ und wähle eine k -Basis $c_1, \dots, c_n \in H_{s,t}(C_*)$.

1 Hintergrund

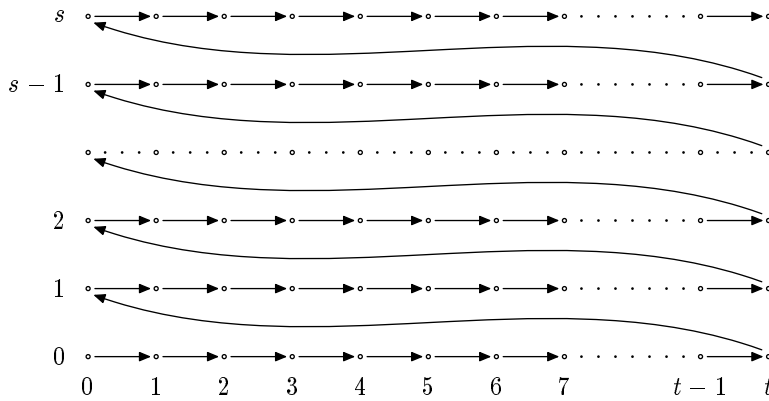
2) Wähle Zykel $z_1, \dots, z_n \in C_{s,t}$ mit $z_i \in c_i$.

3) Füge neue Erzeugende g_1, \dots, g_n mit $d_{s+1}(g_i) = z_i$ in $C_{s+1,t}$ ein:

$$\begin{aligned} C_{s+1}^{\text{neu}} &= C_{s+1} \oplus \Sigma^t Ag_1 \oplus \dots \oplus \Sigma^t Ag_n, \\ d_{s+1}^{\text{neu}}(g_i) &= z_i. \end{aligned}$$

Ist nun C_* in (s, t) erweiterbar, so ist C_*^{neu} eine partielle Auflösung bis (s, t) . Die neuen Erzeugenden töten nach Konstruktion gerade die störende Homologiegruppe $H_{s,t}(C_*)$, und durch das Einfügen der neuen Erzeugenden hat man im Bereich $R_{s,t}^o$ nichts geändert, sodaß C_*^{neu} dort exakt bleibt.

Zur Konstruktion einer partiellen minimalen Auflösung bis zu (s, t) geht man nun so vor: man beginnt mit C_*^{anf} und erweitert dies schrittweise gemäß folgendem Schema:



Daß dies funktioniert sagt

Lemma 1.3.10. *Ist C_* aus C_*^{anf} durch eine Folge von Erweiterungsschritten entstanden, so ist es minimal, dh. das Differential auf $k \otimes_A C_*$ ist Null.*

Beweis. Nach Annahme hat C_* eine Filtrierung

$$C_* = F^{s,t}C_* \supset F^{s,t-1}C_* \supset \dots \supset F^{s,0}C_* \supset F^{s-1,t}C_* \supset \dots \supset F^{0,t}C_* \supset \dots \supset F^{0,0}C_* = C_*^{\text{anf}}$$

durch Unterkomplexe $F^{u,v}C_*$, die aus ihrem Vorgänger durch einen Erweiterungsschritt entstanden sind. Wir müssen zeigen, daß für jedes Erzeugende $g \in C_{u,v}$ das Differential $d(g)$ in IC_* liegt. Schreibe dazu $d(g) = \sum_i a_i g_i$ mit $a_i \in A$ und g_i Erzeugende aus $C_{u-1,*}$. Man erhält $0 = d^2(g) = \sum_i a_i d(g_i)$. Wir betrachten die Homologieklass der rechten Seite in $F^{u-1,v-1}C_*$. Falls $|a_i| > 0$ ist $|g_i| < v$, sodaß $a_i g_i \in F^{u-1,v-1}C_*$; die Homologieklass $[a_i d(g_i)] \in H_{u-1,v}(F^{u-1,v-1}C_*)$ ist also Null. In $H_{u-1,v}(F^{u-1,v-1}C_*)$ ist somit

$$\sum_{i \text{ mit } a_i \in k} a_i [d(g_i)] = 0.$$

In den Bezeichnungen des Erweiterungsschritts ist dies eine k -lineare Relation zwischen den c_i , die aufgrund der linearen Unabhängigkeit null sein muß. Also sind alle $a_i \in I$, wie behauptet. \square

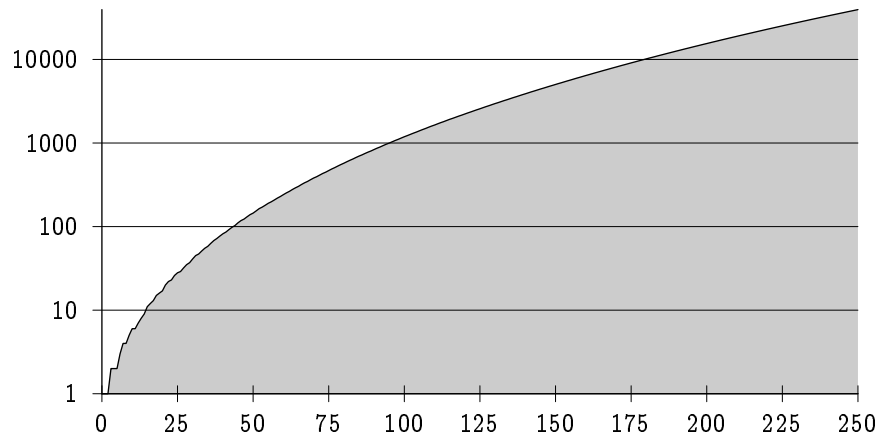


Abbildung 1.6: Dimension der Steenrod-Algebra für $p = 2$. Gezeigt wird $\dim_{\mathbb{F}_2} A_n$ für $n \leq 250$.

Wir beenden das einführende Kapitel mit einer Tabelle. Abbildung 1.7 zeigt den Anfang einer minimalen Auflösung der Steenrod-Algebra zur Primzahl 2, bis zur topologischen Dimension $t - s = 14$. Bis hierhin ist es sicherlich noch menschenmöglich, die Auflösung per Hand bzw. auf Papier zu berechnen. In höheren Dimensionen ist das jedoch anders: jedes Erzeugende der Auflösung führt ja eine eigene Kopie der Steenrod-Algebra ein, und diese legt ein nicht unbeträchtliches Wachstum an den Tag. Dies zeigt Abbildung 1.6, in der $\dim A_n$ gegen n für $n \leq 250$ in einem logarithmischen Koordinatensystem dargestellt ist. Man kann zeigen, daß die minimale Auflösung C_* als graduierter Vektorraum durch

$$C_s \cong \mathrm{Tor}_{s,*}^A(k, k) \otimes_k A$$

beschrieben ist. Die Wachstumsrate von C_* wird also sowohl von der Größe von A , wie auch von der Größe von $\mathrm{Tor}_{*,*}^A(k, k)$ beeinflusst. Ein Blick voraus auf Abbildung 2.14, die die Kenntnis von $\mathrm{Ext}_A^{s,t}(\mathbb{F}_2, \mathbb{F}_2)$ für $t - s \leq 210$ schon voraussetzt, zeigt, daß man es schnell mit sehr großen Vektorräumen zu tun kriegt.

1 Hintergrund

n	s	Nr.	Differential
0	s	[0]	$Sq(1)[0]$
1	1	[1]	$Sq(2)[0]$
2	2	[1]	$Sq(3)[0] + Sq(2)[1]$
3	3	[1]	$Sq(4)[0] + Sq(2)[1] + Sq(1)[2]$
3	2	[2]	$Sq(4)[0] + Sq(0, 1)[1] + Sq(1)[2]$
3	1	[2]	$Sq(4)[0]$
6	2	[3]	$Sq(1, 2)[0] + Sq(0, 2)[1] + Sq(4)[2]$
7	4	[1]	$Sq(8)[0] + Sq(2, 1)[1] + Sq(1)[2]$
7	3	[2]	$Sq(8)[0] + Sq(2, 1)[2] + Sq(1)[4]$
7	2	[4]	$Sq(8)[0] + Sq(2, 1)[2] + Sq(1)[3]$
7	1	[3]	$Sq(8)[0]$
8	3	[3]	$Sq(3, 2)[0] + Sq(0, 0, 1)[1] + Sq(4, 1)[1] + Sq(7)[1] + Sq(3, 1)[2] + Sq(6)[2] + Sq(0, 1)[3] + Sq(3)[3]$
8	2	[5]	$Sq(3, 2)[0] + Sq(5, 1)[1] + Sq(8)[1] + Sq(0, 2)[2] + Sq(3, 1)[2] + Sq(2)[3]$
9	5	[1]	$Sq(10)[0] + Sq(0, 1)[1] + Sq(3)[1]$
9	4	[2]	$Sq(4, 2)[0] + Sq(0, 0, 1)[1] + Sq(1, 2)[1] + Sq(7)[1] + Sq(2)[3]$
9	3	[4]	$Sq(1, 3)[0] + Sq(5, 1)[1] + Sq(8)[1] + Sq(4, 1)[2] + Sq(1, 1)[3] + Sq(4)[3] + Sq(3)[4] + Sq(2)[5]$
10	6	[1]	$Sq(11)[0] + Sq(2)[1]$
11	7	[1]	$Sq(12)[0] + Sq(2)[1] + Sq(1)[2]$
11	6	[2]	$Sq(12)[0] + Sq(0, 1)[1] + Sq(1)[2]$
11	5	[2]	$Sq(12)[0] + Sq(2, 1)[1] + Sq(5)[1] + Sq(3)[2]$
14	6	[3]	$Sq(9, 2)[0] + Sq(0, 2)[1] + Sq(4)[2] + Sq(1)[3]$
14	5	[3]	$Sq(3, 4)[0] + Sq(6, 3)[0] + Sq(0, 2)[2] + Sq(3, 1)[2] + Sq(6)[2] + Sq(1)[3]$
14	4	[3]	$Sq(0, 5)[0] + Sq(6, 3)[0] + Sq(6, 2)[1] + Sq(9, 1)[1] + Sq(5, 1)[2] + Sq(0, 0, 1)[3] + Sq(4, 1)[3] + Sq(7)[3] + Sq(3, 1)[4]$
14	3	[5]	$Sq(0, 5)[0] + Sq(3, 4)[0] + Sq(6, 3)[0] + Sq(6, 0, 1)[1] + Sq(1, 4)[1] + Sq(13)[1] + Sq(3, 3)[2] + Sq(6, 2)[2] + Sq(9, 1)[2] + Sq(12)[2] + Sq(0, 3)[3] + Sq(3, 2)[3] + Sq(9)[3] + Sq(2, 2)[4] + Sq(5, 1)[4] + Sq(8)[4] + Sq(0, 0, 1)[5] + Sq(4, 1)[5] + Sq(7)[5] + Sq(1)[6]$
14	2	[6]	$Sq(0, 5)[0] + Sq(2, 4)[1] + Sq(11, 1)[1] + Sq(0, 4)[2] + Sq(8)[3]$

Abbildung 1.7: Anfang der minimalen Auflösung für $p = 2$. Die Tabelle zeigt eine A -Basis von $C_{s,t}$ im Bereich $n = t - s \leq 14$. Die Basiselemente jedes C_s sind durchnummeriert, beginnend mit $[0] \in C_{s,s}$. Zu jedem $[j] \in C_s$ steht in der rechten Spalte das Differential $d_s([j])$; die dort auftretenden $[n_i]$ beziehen sich auf C_{s-1} .

2 Ein Lemma

Wir kommen zum Herzstück der Arbeit: einem zwar simplen, aber sehr effektiven Lemma, das es uns erlaubt, Redundanzen in der minimalen Auflösung zu erkennen und bei der Berechnung systematisch zu ignorieren. Verschiedene Weisen seiner Anwendung werden vorgestellt. Am Ende werden schließlich – zur Einschüchterung des Lesers und zur Illustration der Stärke unseres Verfahrens – ein paar Kenngrößen der minimalen Auflösung graphisch dargestellt.

2.1 Das Lemma

Wie schon angedeutet, besteht ein Problem bei der Berechnung der minimalen Auflösung darin, daß die zu betrachtenden Vektorräume $C_{s,t}$ zu schnell zu groß werden. Wir werden nun zeigen, wie man mithilfe gewisser natürlicher Filtrierungen die $C_{s,t}$ in bekömmlichere Teilstücke zerlegen kann.

2.1.1 Freundliche Sequenzen

Wir betrachten zunächst allgemeine graduierte Kettenkomplexe über einem Körper k . Zu einer kurzen exakten Sequenz

$$0 \longrightarrow L_* \xrightarrow{j} M_* \xrightarrow{p} N_* \longrightarrow 0 \quad (2.1)$$

gehört bekanntlich eine lange exakte Sequenz der Homologiegruppen:

$$\cdots \longrightarrow H_{s,t}(L_*) \xrightarrow{j_*} H_{s,t}(M_*) \xrightarrow{p_*} H_{s,t}(N_*) \xrightarrow{\partial} H_{s-1,t}(L_*) \longrightarrow \cdots \quad (2.2)$$

Definition 2.1.1. Die Sequenz 2.1 heißt (s, t) -freundlich, falls $H_{s,t}(L_*) = H_{s-1,t}(L_*) = 0$ ist.

Folgende Lemmata sind für die Einstufung “freundlich” verantwortlich. Sie zeigen, daß und wie eine solche Sequenz die Berechnung der Homologie vereinfacht.

Lemma 2.1.2. Die Sequenz 2.1 sei (s, t) -freundlich. Dann kann die Homologie $H_{s,t}(M_*)$ folgendermaßen berechnet werden:

1) Berechne die Homologie von

$$N_{s+1,t} \rightarrow N_{s,t} \rightarrow N_{s-1,t}. \quad (2.3)$$

Resultat sind Zykel $n_1, \dots, n_r \in N_{s,t}$, die eine Basis von $H_{s,t}(N_*)$ repräsentieren.

2 Ein Lemma

2) Finde Urbilder $m_i \in p^{-1}(n_i)$ und bilde $\partial n_i := j^{-1}(dm_i)$.

3) Hebe die ∂n_i durch $L_{s,t} \rightarrow L_{s-1,t}$. Resultat sind $l_i \in L_{s,t}$ mit $dl_i = \partial n_i$

Setzt man $\tilde{m}_i = m_i - j(l_i)$, so sind $\tilde{m}_1, \dots, \tilde{m}_r$ Zykel in $M_{s,t}$, die eine Basis von $H_{s,t}(M_*)$ repräsentieren.

Beweis. Zunächst sind die Konstruktionen tatsächlich möglich: die m_i lassen sich finden, weil p surjektiv ist; die l_i existieren, weil die ∂n_i Zykel in $L_{s-1,t}$ sind und $H_{s-1,t}(L_*)$ nach Annahme null ist. Die \tilde{m}_i sind tatsächlich Zykel, weil nach Konstruktion $dj(l_i) = j(dl_i) = j(j^{-1}(dm_i)) = dm_i$ gilt.

Aus der langen exakten Homologiesequenz 2.2 folgt sofort, daß p_* einen Isomorphismus

$$H_{s,t}(M_*) \xrightarrow{\cong} H_{s,t}(N_*)$$

induziert. Da die \tilde{m}_i unter p auf die n_i abgebildet werden, repräsentieren sie also eine Basis von $H_{s,t}(M_*)$. \square

Wir möchten uns an dieser Stelle für die Trivialität dieses Lemmas und die Ausführlichkeit des Beweises entschuldigen. Wir sind nur deshalb so explizit, weil wir die rechnerischen Aspekte noch kurz diskutieren möchten:

- In der Praxis haben L_* , M_* und N_* bevorzugte, explizit bekannte Vektorraumbasen. Alle Abbildungen und alle Vektoren sind für uns also Matrizen.
- Die Berechnung der Homologie der Sequenz 2.3 ist Standard: man berechnet $\ker d : N_{s,t} \rightarrow N_{s-1,t}$ und reduziert dies modulo $\text{im } d : N_{s+1,t} \rightarrow N_{s,t}$. Dabei fallen die geforderten Zykel $n_1, \dots, n_r \in N_{s,t}$ von alleine an.
- Die Berechnung der Urbilder $p^{-1}(\dots)$ und $j^{-1}(\dots)$ soll als einfach gelten. In unseren Anwendungen kann man dies vernachlässigen.
- Dasselbe gelte für die Berechnung von dm_i bei gegebenen m_i . Wir vernachlässigen dies, weil die Berechnung der dm_1, \dots, dm_r gegenüber der andernfalls nötigen Berechnung der ganzen Matrix von $d : M_{s,t} \rightarrow M_{s-1,t}$ nicht ins Gewicht fällt. r ist nämlich bei uns wesentlich kleiner als $\dim M_{s,t}$ und $\dim M_{s-1,t}$.
- Die Hebung der ∂n_i durch $d : L_{s,t} \rightarrow L_{s-1,t}$ wird ebenfalls mit dem Standardverfahren berechnet.

Um die Vorteile dieser Methode kenntlich zu machen, wählen wir Zerlegungen $M_{s,t} \cong L_{s,t} \oplus N_{s,t}$. Man stelle sich vor, daß $L_{s,t}$ und $N_{s,t}$ in etwa dieselbe Dimension $D/2$ haben, $D \gg 0$. Das Differential $d_{s,t}^M : M_{s,t} \rightarrow M_{s-1,t}$ schreibt sich dann in Matrixform als

$$d_{s,t}^M = \begin{pmatrix} d_{s,t}^N & X_{s,t} \\ 0 & d_{s,t}^L \end{pmatrix},$$

wobei d^L und d^N die Differentiale von L_* respektive N_* sind. Man sieht, daß bei obigem Rechenverfahren nur $d_{s+1,t}^N$, $d_{s,t}^N$ und $d_{s,t}^L$ benutzt wurden, und zwar *nacheinander*. $X_{s,t}$ wird implizit bei der Berechnung der dm_i mitbenutzt, muß aber nie vollständig als Matrix berechnet werden. Es ergeben sich also

- ein geringerer Speicherplatzbedarf: $D^2/4$ statt D^2 ,
- schnellere Laufzeiten für die Berechnung von Kern und Bild.

Das Standardverfahren zur Berechnung eines Kerns hat eine Laufzeit, die in etwa proportional zu D^3 ist. Der Übergang von D zu $D/2$ ist also spürbar.

Auch Hebungsprobleme lassen sich in diesem Fall leichter lösen:

Lemma 2.1.3. *Die Sequenz 2.1 sei (s,t) -freundlich, und es sei $H_{s,t}(M_*) = 0$. Ist ein Zykel $z \in M_{s,t}$ gegeben, so kann man einen Lift $m \in M_{s+1,t}$ mit $dm = z$ so berechnen:*

- 1) *Bilde $p(z) \in N_{s,t}$ und berechne einen Lift $n \in N_{s+1,t}$ mit $dn = p(z)$.*
- 2) *Wähle $\tilde{m} \in p^{-1}(n)$ und bilde $l = j^{-1}(d\tilde{m} - z) \in L_{s,t}$.*
- 3) *Berechne einen Lift $\tilde{l} \in L_{s+1,t}$ mit $d\tilde{l} = l$.*

Dann ist $m := \tilde{m} - j(\tilde{l})$ eine Hebung von z .

Beweis. Die Konstruktion ist möglich: Wegen $H_{s,t}(M_*) \cong H_{s,t}(N_*)$ ist auch $H_{s,t}(N_*) = 0$, sodaß der Zykel $p(z)$ einen Lift n besitzt; \tilde{m} existiert, weil p surjektiv ist; wegen $p(z - d\tilde{m}) = p(z) - dn = 0$ existiert l ; da $j(dl) = d(z - d\tilde{m}) = 0$, ist $dl = 0$; wegen $H_{s,t}(L_*) = 0$ existiert also auch \tilde{l} . Und die Konstruktion führt zum Erfolg: schließlich ist $dm = d\tilde{m} - j(d\tilde{l}) = d\tilde{m} - j(l) = d\tilde{m} + z - d\tilde{m} = z$, wie gewollt. \square

Auch hier schließen wir eine kurze Diskussion an:

- Die Bildung der diversen Urbilder und die Berechnung von $d\tilde{m}$ aus \tilde{m} können wir wieder vernachlässigen.
- Man hat hier das Hebungsproblem zu $d_{s,t}^M$ durch die sukzessive Hebung durch $d_{s,t}^N$ und $d_{s,t}^L$ ersetzt. Die Vorteile betreffs Speicherplatzbedarf und Laufzeit sind also dieselben wie oben.

2.1.2 Das Lemma

Wir untersuchen hier, wie die Existenz “verallgemeinerter Margolis-Differentiale” zu freundlichen Sequenzen führt.

M_* sei ein graduierter Kettenkomplex aus k -Vektorräumen. Wir betrachten die folgende Situation:

- Gegeben sei eine Kettenabbildung $Q : M_{*,*} \rightarrow M_{*,*+q}$ mit $Q^l = 0$ für ein $l > 1$.

Setze $D = k[Q]/(Q^l)$.

- M_* sei als D -Modul frei.

Natürlich auftretende Beispiele findet man im nächsten Abschnitt. Wir bemerken im Augenblick nur dreierlei:

2 Ein Lemma

- 1) Ist $l = 2$, so ist Q gerade ein Differential auf M_* , und die Voraussetzung sagt einfach, daß $H(M_*, Q) = 0$ sein soll. Für $l > 2$ ist man also versucht, Q als "verallgemeinertes Differential" zu betrachten.
- 2) Ist $\text{char } k = l$, so ist D zum Gruppenring $k\mathfrak{C}_l$ mit $\mathfrak{C}_l = \langle T \mid T^l = 1 \rangle$ isomorph, via $Q \leftrightarrow T - 1$. Q kann dann als eine freie Operation von \mathfrak{C}_l aufgefasst werden.
- 3) In der Steenrod-Algebra wimmelt es von solchen verallgemeinerten Differentialen, deren Bedeutung vor allem von Margolis untersucht wurde. Siehe [29], Part II.

Wir bezeichnen den Kettenkomplex im $(Q^k : M_{*,*} \rightarrow M_{*,*})$ mit $Q^k M_*$. Die Graduierung auf $Q^k M_*$ sei so gewählt, daß $Q^k : M_* \rightarrow Q^k M_*$ graderhaltend ist; die Inklusion $Q^k M_* \subset M_*$ erhöht damit den Grad um kq .

Lemma 2.1.4. *Für jedes $0 \leq k' \leq k \leq l$ ist*

$$0 \rightarrow Q^k M_{*,*-(k-k')q} \xrightarrow{\text{incl.}} Q^{k'} M_{*,*} \xrightarrow{Q^{l-k}} Q^{l-(k-k')} M_{*,*} \rightarrow 0 \quad (2.4)$$

exakt.

Beweis. $0 \rightarrow Q^k D \xrightarrow{\text{incl.}} Q^{k'} D \xrightarrow{Q^{l-k}} Q^{l-(k-k')} D \rightarrow 0$ ist exakt und 2.4 ist eine direkte Summe solcher Sequenzen, weil M_* über D frei ist. \square

Der folgende Spezialfall ist besonders wichtig: für jedes $k \leq l$ ist

$$0 \rightarrow Q^k M_{*,* - kq} \xrightarrow{\text{incl.}} M_{*,*} \xrightarrow{Q^{l-k}} Q^{l-k} M_{*,*} \rightarrow 0 \quad (2.5)$$

exakt. Man kann den allgemeinen Fall auch hierauf zurückführen, denn

Lemma 2.1.5. *Ist $k \leq l$ und setzt man $\tilde{M}_* = Q^k M_*$, $\tilde{l} = l - k$, $\tilde{Q} = Q$ und $\tilde{D} = k[\tilde{Q}]/(\tilde{Q}^{\tilde{l}})$, so ist \tilde{M}_* als \tilde{D} -Modul frei.*

Beweis. Klar, denn $Q^k D$ ist ein freier $k[Q]/(Q^{l-k})$ -Modul. \square

Wir möchten nun zu folgendem Problem ein systematisches Resultat formulieren:

Problem 2.1.6. Angenommen M_* sei in einem bekannten Bereich $R \subset \mathbb{Z}^2$ exakt. Wann und für welche k gilt dasselbe für $Q^k M_*$? Wann ist die Sequenz 2.5 (s, t) -freundlich, und für welche (s, t) ?

Alle Resultate hierzu folgen aus einer simplen Diagrammjagd in der langen exakten Homologiesequenz zu 2.5:

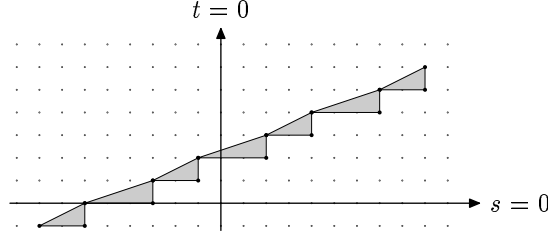
$$\begin{array}{ccccccc} \cdots \rightarrow H_{s,t}(M_*) & \xrightarrow{Q_*^{l-k}} & H_{s,t}(Q^{l-k} M_*) & \xrightarrow{\partial} & H_{s-1,t}(Q^k M_{*,* - kq}) & \xrightarrow{\text{incl.}_*} & H_{s-1,t}(M_*) \rightarrow \cdots \\ & & & & \parallel & & \\ & & & & H_{s-1,t-kq}(Q^k M_*) & & \end{array} \quad (2.6)$$

Lemma 2.1.7. 1) Ist $H_{s,t}(M_*) = H_{s-1,t}(M_*) = 0$, so ist $H_{s,t}(Q^{l-k}M_*) \cong H_{s-1,t-kq}(Q^kM_*)$.

2) Ist außerdem $H_{s-1,t-kq}(M_*) = H_{s-2,t-kq}(M_*) = 0$, so ist $H_{s,t}(Q^{l-k}M_*) \cong H_{s-2,t-lq}(Q^{l-k}M_*)$.

Beweis. 1) ist klar. 2) folgt aus zweimaliger Anwendung von 1), wobei beim zweiten Mal k durch $l - k$ ersetzt wird. \square

Eine graphische Darstellung ist vielleicht nützlich. Im Bild ist $q = 1, k = 2, l = 5$:



Die Diagrammjagd beginnt in der rechten oberen Ecke und arbeitet sich nach unten durch. Voraussetzung ist, daß M_* in den Ecken exakt ist. Gefolgert wird, daß die Homologiegruppen von $Q^{l-k}M_*$ und Q^kM_* , jeweils abwechselnd in den Punkten der oberen Kante gebildet, isomorph sind. Und der springende Punkt ist, daß man dies unter den richtigen Voraussetzungen bis zu *negativen* homologischen Graden fortsetzen kann. Wenn unsere M_* dort null sind, *verschwinden* also die $H(Q^kM_*)$ und $H(Q^{l-k}M_*)$: 2.4 und 2.5 sind dann für passende (s, t) freundliche Sequenzen. Details folgen:

Sei $\rho > 0, r \in \mathbb{R}$. A^{ρ, r^+} und A^{ρ, r^-} seien die offenen Halbebenen

$$A^{\rho, r^+} = \{ (s, t) \in \mathbb{Z}^2 \mid t - r < s \cdot \rho \},$$

$$A^{\rho, r^-} = \{ (s, t) \in \mathbb{Z}^2 \mid t - r > s \cdot \rho \},$$

mit Steigung $1/\rho$.

Das Lemma 2.1.8 (obere Version). Sei $M_s = 0$ für $s < 0$. Seien $S, T \in \mathbb{Z}$. Es gelte $H_{s,t}(M_*) = 0$ für alle $(s, t) \in R_{S,T}^o \cap A^{\rho, r^+}$. Die Steigung $1/\rho$ erfülle $\rho \leq lq/2$. Setze $r' = \min \{ r - \rho, r - 2\rho + (l - k)q \}$. Dann gilt:

1) $H_{s,t}(Q^kM_*) = 0$ für $(s, t) \in A^{\rho, r'^+} \cap R_{S,T}^o$.

2) Die Sequenz 2.5 ist (s, t) -freundlich für $(s, t) \in A^{\rho, (r'+kq-\rho)^+} \cap R_{S, T+kq}^o$.

Beweis. r' ist gerade so gewählt, daß für $(s, t) \in A^{\rho, r'^+}$ jeweils (s, t) , $(s - 1, t)$ und $(s - 2, t - (l - k)q)$ in A^{ρ, r^+} liegen; Lemma 2.1.7 ist deswegen beliebig oft rekursiv anwendbar und liefert

$$H_{s,t}(Q^kM_*) \cong H_{s-2,t-lq}(Q^kM_*) \cong \dots \cong H_{s-2j,t-ljq}(Q^kM_*), \quad j \geq 0 \text{ beliebig.}$$

Wählt man $j > s/2$, so folgt $H_{s,t}(Q^kM_*) = 0$, wie in 1) behauptet. Siehe auch Abbildung 2.1.

2) ist ein Korollar: für $(s, t) \in A^{\rho, (r'+kq-\rho)^+} \cap R_{S, T+kq}^o$ liegen $(s, t - kq)$ und $(s - 1, t - kq)$ in $A^{\rho, r'^+} \cap R_{S,T}^o$, sodaß $H_{s,t-kq}(Q^kM_*)$ und $H_{s-1,t-kq}(Q^kM_*)$ null sind. \square

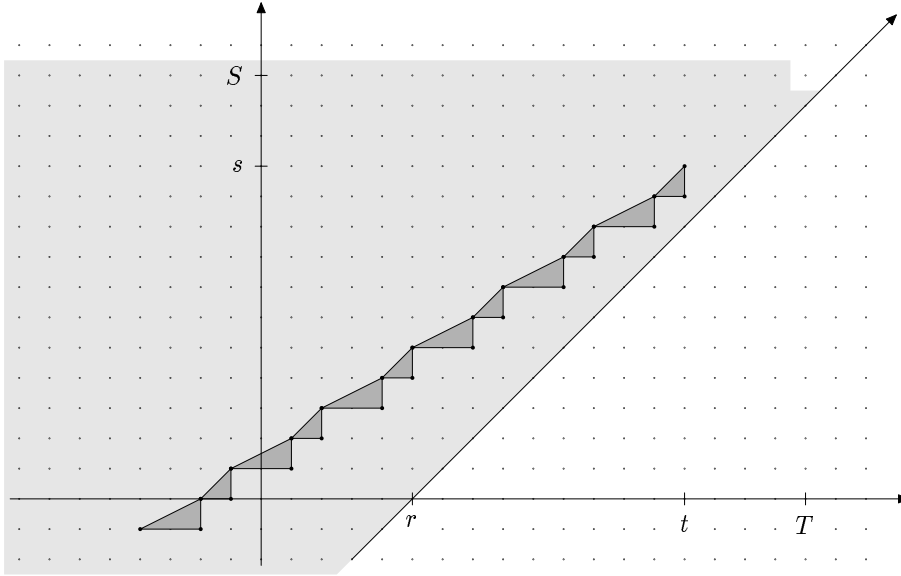


Abbildung 2.1: Ein Bild zur oberen Version des Lemmas; hier ist $q = 1, l = 3, k = 2, \rho = 1, r = 5$. Die Steigung des Dreieckswegs ist $2/lq$. Wegen $2/lq \leq 1/\rho$ liegt der ganze Weg im guten Bereich, falls nur $(s, t), (s - 1, t)$ und $(s - 2, t - (l - k)q)$ dort liegen.

Man beachte, daß unter geeigneten Umständen (S, T) selber in $A^{\rho, (r' - kq + \rho)^+} \cap R_{S, T + kq}^o$ liegt; 2.4 ist dann also (S, T) -freundlich, obwohl M_* in (S, T) nicht exakt zu sein braucht.

Das Lemma 2.1.9 (untere Version). Sei $M_s = 0$ für $s < 0$. Seien $S, T \in \mathbb{Z}$. Es gelte $H_{s,t}(M_*) = 0$ für alle $(s, t) \in R_{S,T}^o \cap A^{\rho, r^-}$. Die Steigung $1/\rho$ erfülle $\rho \geq lq/2$. Setze $r' = \max \{ r, r + (l - k)q - \rho \}$. Dann gilt:

- 1) $H_{s,t}(Q^k M_*) = 0$ für $(s, t) \in A^{\rho, r'^-} \cap R_{S,T}^o$.
- 2) Die Sequenz 2.5 ist (s, t) -freundlich für $(s, t) \in A^{\rho, (r' + kq)^-} \cap R_{S, T + kq}^o$.

Beweis. r' ist gerade so gewählt, daß für $(s, t) \in A^{\rho, r'^-}$ jeweils (s, t) und $(s - 1, t - (l - k)q)$ in A^{ρ, r^-} liegen; also ist Lemma 2.1.7 beliebig oft anwendbar und wie oben ist

$$H_{s,t}(Q^k M_*) \cong H_{s-2, t-lq}(Q^k M_*) \cong \dots \cong 0.$$

Siehe auch Abbildung 2.2.

2) ist ein Korollar: für $(s, t) \in A^{\rho, (r' + kq)^-} \cap R_{S, T + kq}^o$ liegen $(s, t - kq)$ und $(s - 1, t - kq)$ in $A^{\rho, r'^-} \cap R_{S,T}^o$, sodaß $H_{s, t - kq}(Q^k M_*)$ und $H_{s-1, t - kq}(Q^k M_*)$ null sind. \square

2.2 Weisen seiner Anwendung

Wir zeigen jetzt, wie man die beiden Varianten des Lemmas bei der Berechnung der minimalen Auflösung der Steenrod-Algebra einsetzen kann.

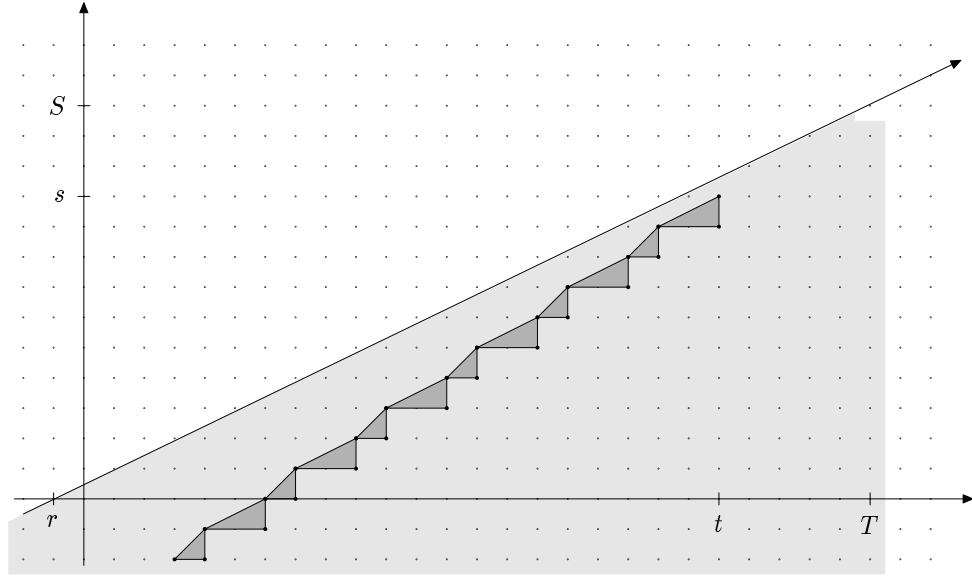


Abbildung 2.2: Ein Bild zur unteren Version des Lemmas. Hier sei $\rho \geq lq/2$. Die Diagrammjagd längs des Dreieckswegs ist möglich, sobald (s, t) und $(s-1, t-(l-k)q)$ in $A^{\rho, r-}$ liegen.

2.2.1 Von Unten, zum Aufwärmen

A sei die Steenrod-Algebra zur Primzahl p . C_* sei ein Zwischenschritt bei der Berechnung der minimalen Auflösung von A . In den Bezeichnungen von Abschnitt 1.3.2 seien also $S, T \geq 0$ und C_* in (S, T) erweiterbar. Wir benutzen den klassischen

Satz 2.2.1 (Milnor-Moore). *Ist A eine Hopf-Algebra, $B \subset A$ eine Hopf-Unteralgebra, so ist A als B -Modul frei.*

Beweis. Für eine Inklusion von Gruppenalgebren $kH \subset kG$ ist dies klar: als kH -Modul ist $kG = \bigoplus kN_g$, wobei über die Nebenklassen $N_g = Hg$ summiert wird. Da $h \mapsto hg$ jeweils eine H -äquivalente Bijektion $H \cong N_g$ ist, sind die kN_g freie kH -Moduln. Den allgemeinen Fall findet man in [35]. \square

Die äußere Algebra $E(Q_0, Q_1, \dots) \subset A$ ist eine Hopf-Unteralgebra, weil jedes Q_i primitiv ist. Nach Satz 2.2.1 ist A also ein freier $E(Q_0, Q_1, \dots)$ -Modul. Deswegen sind folgende Sequenzen exakt:

$$0 \longrightarrow Q_0 C_{*,* - 1} \xrightarrow{\text{incl.}} C_{*,*} \xrightarrow{Q_0} Q_0 C_{*,*} \longrightarrow 0 \quad (2.7)$$

$$0 \longrightarrow Q_1 Q_0 C_{*,* - (2p-1)} \xrightarrow{\text{incl.}} Q_0 C_{*,*} \xrightarrow{Q_1} Q_1 Q_0 C_{*,*} \longrightarrow 0 \quad (2.8)$$

$$0 \longrightarrow Q_2 Q_1 Q_0 C_{*,* - (2p^2-1)} \xrightarrow{\text{incl.}} Q_1 Q_0 C_{*,*} \xrightarrow{Q_2} Q_2 Q_1 Q_0 C_{*,*} \longrightarrow 0 \quad (2.9)$$

\vdots

$$0 \rightarrow Q_n \cdots Q_0 C_{*,* - (2p^n - 1)} \xrightarrow{\text{incl.}} Q_{n-1} \cdots Q_0 C_{*,*} \xrightarrow{Q_n} Q_n \cdots Q_0 C_{*,*} \rightarrow 0 \quad (2.10)$$

Lemma 2.1.9 sagt hier:

Korollar 2.2.2. *Es ist $H_{s,t}(Q_n \cdots Q_0 C_{*,*}) = 0$ für $(s, t) \in A^{2p^n-1, 0^-} \cap R_{S,T}^{\circ}$.*

Beweis. Durch Induktion über n . Zur Verankerung betrachten wir $n = -1$; dort wird gerade $H_{s,t}(C_*) = 0$ für $(s, t) \in R_{S,T}^{\circ} \setminus \{(0, 0)\}$ behauptet, was wir aber einfach gefordert haben.

Zum Induktionsschritt $n \Rightarrow n+1$: Wir setzen $M_* = Q_n \cdots Q_0 C_*$, $Q = Q_{n+1}$, $q = 2p^{n+1} - 1$, $l = 2$, $k = 1$, $r = 0$. Nach Annahme ist M_* in $A^{2p^n-1, 0^-} \cap R_{S,T}^{\circ}$ exakt. Wir dürfen die Steigung $1/\rho$ sicher verkleinern und setzen also $\rho = 2p^{n+1} - 1 > 2p^n - 1$. Es ergibt sich $r' = r = 0$, sodaß $H_{s,t}(Q_{n+1} \cdots Q_0 C_*) = 0$ für $(s, t) \in A^{2p^{n+1}-1, 0^-} \cap R_{S,T}^{\circ}$, wie behauptet. \square

Bemerkung 2.2.3 (zwecks Demystifikation). Angenommen C_* wäre eine vollständige Auflösung von k über A . Wegen Satz 2.2.1 wäre C_* dann auch eine E -freie Auflösung von k mit $E = E(Q_0, \dots, Q_n)$. Die Homologie $H(Q_n \cdots Q_0 C_*)$ berechnet dann die derivierten Funktoren zu

$$\begin{aligned} E\text{-Mod} &\rightarrow k\text{-Mod}, \\ M &\mapsto Q_n \cdots Q_0 M. \end{aligned}$$

Man kann aber $Q_n \cdots Q_0 M$ mit $k \otimes_E M$ vermöge

$$k \otimes_E M \ni \lambda \otimes m \mapsto Q_n \cdots Q_0 \lambda \otimes m \in Q_n \cdots Q_0 E \otimes_E M = Q_n \cdots Q_0 M$$

identifizieren, weil $\lambda \mapsto Q_n \cdots Q_0 \lambda$ ein Isomorphismus $k \rightarrow Q_n \cdots Q_0 E$ von E -Moduln ist. Also ist dann $H_{s,t}(Q_n \cdots Q_0 C_*) = \text{Tor}_{s,t}^E(k, k)$. Bekanntlich ist aber Tor über einer äußeren Algebra die entsprechende Polynomalgebra, also

$$\text{Tor}_{s,t}^E(k, k) = P(v_0, \dots, v_n) \quad \text{mit } v_i \in \text{Tor}_{1, 2p^i-1}^E(k, k).$$

$A^{2p^n-1, 0^-}$ ist gerade der Bereich, in dem $P(v_0, \dots, v_n)$ offensichtlich null ist. Korollar 2.2.2 sagt nur, daß dies unter unseren eingeschränkten Voraussetzungen noch partiell richtig bleibt.

Man erinnere sich an den Erweiterungsschritt auf Seite 23. Das folgende Korollar sagt, daß zumindest der erste Teilschritt vereinfacht werden kann:

Korollar 2.2.4. *$H_{S,T}(C_*) \rightarrow H_{S,T}(Q_n \cdots Q_0 C_*)$ ist für $T > (2p^n - 1)S$ ein Isomorphismus.*

Beweis. Durch Induktion nach n . Der Fall $n = -1$ ist wieder trivial. Für $n - 1 \Rightarrow n$ ist zu zeigen, daß

$$H_{S,T}(Q_{n-1} \cdots Q_0 C_*) \xrightarrow{Q_n} H_{S,T}(Q_n \cdots Q_0 C_*)$$

ein Isomorphismus ist. Mithilfe der langen exakten Sequenz zu 2.10 folgt dies, wenn sowohl $H_{S, T-(2p^n-1)}(Q_n \cdots Q_0 C_*)$ wie $H_{S-1, T-(2p^n-1)}(Q_n \cdots Q_0 C_*)$ null sind. Da $(S, T - (2p^n - 1)) \in R_{S,T}^{\circ}$, ist Korollar 2.2.2 anwendbar. Die dort geforderte Bedingung ist gerade unser $T - (2p^n - 1)S > 0$. \square

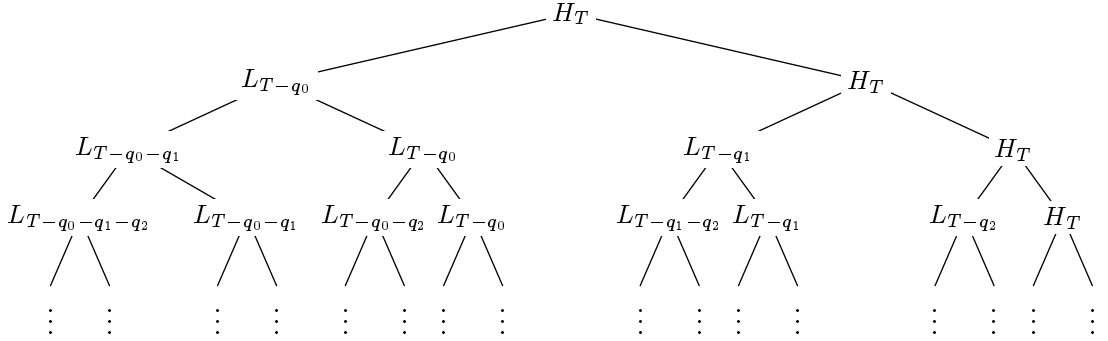
Damit kann man also den ersten Teilschritt des Erweiterungsschritts im Bereich $T - (2p^n - 1)(S - 1) > 0$ einfacher lösen: man kann in $Q_n \cdots Q_0 C_*$ statt in C_* rechnen. Den zweiten Teilschritt möchten wir durch wiederholte Anwendung von Lemma 2.1.2 und Lemma 2.1.3 vereinfachen. Dazu müssen die Sequenzen 2.7, ..., 2.10 in allen betrachteten Bigraden freundlich sein. Zur Erinnerung: Lemma 2.1.2 ersetzt eine Homologieberechnung in $Q_i \cdots Q_0 C_*$ im Bigrad (s, t) durch eine Homologieberechnung in $Q_{i+1} \cdots Q_0 C_*$ im Bigrad (s, t) und eine Hebung durch $Q_{i+1} \cdots Q_0 C_*$ im Bigrad $(s, t - |Q_{i+1}|)$; in symbolischer Notation:

$$H_{s,t}(Q_i \cdots Q_0 C_*) \xrightarrow{\text{Lemma 2.1.2}} H_{s,t}(Q_{i+1} \cdots Q_0 C_*) + L_{s,t-q_{i+1}}(Q_{i+1} \cdots Q_0 C_*).$$

Hier steht L für Lift und wir haben zur Abkürzung $q_i = |Q_i|$ gesetzt. In derselben Notation gilt auch

$$L_{s,t}(Q_i \cdots Q_0 C_*) \xrightarrow{\text{Lemma 2.1.3}} L_{s,t}(Q_{i+1} \cdots Q_0 C_*) + L_{s,t-q_{i+1}}(Q_{i+1} \cdots Q_0 C_*).$$

Durch Iteration ergibt sich also folgender Baum:



Die Rechnung beginnt dabei mit der Homologieberechnung am rechten Ende und arbeitet sich nach links durch. Wie man sieht, müssen wir uns auf die Freundlichkeit in den Bigraden (S, T') mit T' zwischen T und $T - \tau_n$ verlassen können, wobei wir

$$\tau_n = |Q_0| + \cdots + |Q_n| = 2 \frac{p^{n+1} - 1}{p - 1} - (n + 1)$$

setzen. τ_n ist die höchste Dimension, in der $E(Q_0, \dots, Q_n)$ von Null verschieden ist.

Satz 2.2.5. *Ist $T - (2p^n - 1)S > \tau_n$, so sind 2.7, ..., 2.10 in allen relevanten Bigraden freundlich.*

Beweis. Wie gerade gesehen, müssen dazu $H_{S,T'}(Q_n \cdots Q_0 C_*)$ und $H_{S-1,T'}(Q_n \cdots Q_0 C_*)$ für $T - \tau_n \leq T' < T$ null sein. Aus Korollar 2.2.2 wissen wir, daß dies für $(S, T - \tau_n) \in A^{2p^n - 1, 0^-}$, dh. $T - \tau_n > (2p^n - 1)S$ der Fall ist. \square

2.2.2 Zulässige Unteralgebren

Die Methode des vergangenen Abschnitts läßt sich noch ausbauen. Statt $E(Q_0, \dots, Q_n)$ kann man allgemeinere endliche Hopf-Unteralgebren $B \subset A$ betrachten. Die dabei zulässigen B werden in diesem Abschnitt untersucht.

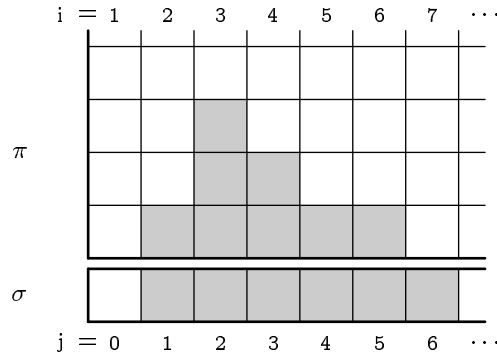


Abbildung 2.3: Graphische Darstellung einer Profilfunktion. Die j mit $\sigma(j) \neq 1$ und die Paare (i, y) mit $1 \leq y \leq \pi(i)$ werden durch geschwärzte Kästchen dargestellt. Im Beispiel ist $\pi = (0, 1, 3, 2, 1, 1, 0, \dots)$ und $\sigma = (1, 2, 2, 2, 2, 2, 1, 1, \dots)$. Das zugehörige $B(\pi, \sigma)$ ist also zulässig.

Wir beschränken uns in der Darstellung auf den Fall $p > 2$ und benutzen die Klassifikation solcher Unteralgebren aus [3], die wir in Abschnitt 1.1.4 wiedergegeben haben. Für $p = 2$ ignoriert man einfach alle Bezüge auf die σ -Komponenten der auftretenden Profilfunktionen. Sei $\Pi = (\pi, \sigma)$ mit

$$\pi : \{1, 2, \dots\} \rightarrow \{0, 1, 2, \dots, \infty\}, \quad \sigma : \{0, 1, 2, \dots\} \rightarrow \{1, 2\}$$

eine Profilfunktion und $B(\Pi)$ die zugehörige Hopf-Unteralgebra von A . Wir nennen Π und $B(\Pi)$ *zulässig*, wenn folgende Verschärfungen von 1.1 und 1.2 (siehe Seite 9) erfüllt sind:

$$\text{Für alle } i, j \geq 1 \text{ gilt } \pi(i) \leq j + \pi(i + j). \quad (2.11)$$

$$\text{Für alle } i \geq 1, j \geq 0 \text{ mit } \sigma(i + j) = 1 \text{ gilt } \pi(i) \leq j. \quad (2.12)$$

Abbildung 2.3 zeigt eine graphische Darstellung einer zulässigen Profilfunktion.

Wir betrachten nur *endliche* zulässige Hopf-Unteralgebren $B = B(\Pi)$. Für ein solches B sind folgende Größen definiert:

- Das Element höchster Dimension $T_B \in B$.
- Der Grad von T_B : $\tau_B = |T_B|$.
- Die maximale inverse Steigung

$$d_B = \max \left(\{ (p-1) \cdot 2(p^i - 1) \cdot p^{\pi(i)-1} : \pi(i) \neq 0 \} \cup \{ |Q_j| : Q_j \in B \} \right).$$

T_B ist nur bis auf einen Koeffizienten aus \mathbb{F}_p^* bestimmt. Die naheliegende Wahl ist

$$T_B = \left(\prod_{j \text{ mit } \sigma(j)=2} Q_j \right) \cdot P(p^{\pi(1)} - 1, p^{\pi(2)} - 1, p^{\pi(3)} - 1, \dots). \quad (2.13)$$

Wir schreiben $Q(\tilde{\varepsilon}_B)P(\tilde{R}_B)$ für dieses Element. Den Index B lassen wir weg, wenn er aus dem Zusammenhang ersichtlich ist.

Definition 2.2.6. Sei $B = B(\Pi)$ eine Hopf-Unteralgebra, $Q(\varepsilon)P(R) \in A$ ein Milnorsches Basiselement. Unter der B -Signatur $\text{sig}_B(Q(\varepsilon)P(R))$ verstehen wir

$$(\varepsilon_j \bmod \sigma(j))_{j \geq 0} \times (r_i \bmod p^{\pi(i)})_{i \geq 1} \in \prod_{j \geq 0} \mathbb{Z} / \sigma(j) \mathbb{Z} \times \prod_{i \geq 1} \mathbb{Z} / p^{\pi(i)} \mathbb{Z}.$$

Den Begriff der Signatur sollte man sich durch eine passende Darstellung der Milnorschen Basiselemente veranschaulichen. Dazu stelle man ein $Q(\varepsilon)P(R)$ in einem zu Abbildung 2.3 analogen Bild dar: ε_j werde ins σ -Kästchen zum Index $j \geq 0$ geschrieben. Ins π -Kästchen in der i ten Spalte und k ten Zeile – wobei die Nummerierung der Zeilen mit $k = 0$ beginne – schreibe man $r_{i,k}$, wenn r_i die p -adische Darstellung $r_i = \sum_{k \geq 0} r_{i,k} p^k$ mit $0 \leq r_{i,k} < p$ hat. Wir nennen dies die *Ziffern-Darstellung* von $Q(\varepsilon)P(R)$. Für $p = 5$ und $Q(1, 0, 1, 1)P(33, 16, 0, 9)$ sieht diese zum Beispiel so aus:

π	1								...
	1	3	0	1					...
	3	1	0	4					...
σ	1	0	1	1					...

In den leeren Feldern stehe dabei Null. Ist B wie in Abbildung 2.3 durch ein Muster aus schwarzen und weißen Kästchen gegeben, so erhält man die B -Signatur von $Q(\varepsilon)P(R)$ einfach durch Vergessen der Einträge in den nicht-geschwärzten Kästchen.

Eine endliche zulässige Hopf-Unteralgebra läßt sich schrittweise aufbauen, indem man die schwarzen Kästchen geschickt nummeriert:

Definition 2.2.7. 1) Seien $B = B(\Pi)$ und $B' = B(\Pi')$ zulässige Hopf-Unteralgebren mit $B \subset B'$. B heißt *Vorgänger* von B' , falls entweder

a) ein $i_0 \geq 1$ existiert, sodaß

$$\begin{aligned} \sigma(j) &= \sigma'(j) && \text{für alle } j, \\ \pi(i) &= \begin{cases} \pi'(i) & i \neq i_0, \\ \pi'(i_0) - 1 & i = i_0. \end{cases} \end{aligned}$$

B heißt dann genauer π -Vorgänger an der Stelle i_0 von B' .

b) ein $j_0 \geq 0$ existiert, sodaß

$$\begin{aligned} \sigma(j) &= \begin{cases} \sigma'(j) & j \neq j_0, \\ \sigma'(j_0) - 1 & j = j_0, \end{cases} \\ \pi(i) &= \pi'(i) && \text{für alle } i. \end{aligned}$$

B heißt dann genauer σ -Vorgänger an der Stelle j_0 von B' .

B' nennen wir entsprechend *Nachfolger* von B .

2) Eine Filtrierung

$$0 = B(\Pi_0) \subset B(\Pi_1) \subset B(\Pi_2) \subset \dots \subset B(\Pi_n) = B \quad (2.14)$$

mit zulässigen $B(\Pi_k)$ heißt *Schrittzerlegung* von B , wenn $B(\Pi_k)$ für jedes k ein Vorgänger von $B(\Pi_{k+1})$ ist.

2 Ein Lemma

		14				
		12	13			
	7	8	9	10	11	
1	2	3	4	5	6	

		14				
		9	12			
	3	6	8	10	13	
2	1	4	5	7	11	

Abbildung 2.4: Zwei unterschiedliche Schrittzerlegungen derselben Hopf-Unteralgebra. In der Filtrierung $0 = B(\Pi_0) \subset \dots \subset B(\Pi_{14}) = B$ sei $B(\Pi_k)$ die Hopf-Unteralgebra, deren Profil aus den Kästchen mit einer Nummer $\leq k$ besteht.

Ist B' ein Nachfolger von B , so gibt es in der graphischen Darstellung gemäß Abbildung 2.3 genau ein Kästchen, das zu B' , aber nicht zu B , gehört. Dieses nennen wir das $B' \setminus B$ -Kästchen.

Lemma 2.2.8. *Jedes endliche zulässige B hat eine Schrittzerlegung.*

Beweis. Es reicht zu zeigen, daß jedes endliche zulässige $B = B(\Pi) \neq 0$ einen Vorgänger $B(\Pi') \subset B$ hat. Angenommen es ist $\pi \not\equiv 0$. Wähle dann ein $i_0 \geq 1$ mit $\pi(i_0)$ maximal, und definiere Π' durch

$$\sigma'(j) = \sigma(j) \quad \text{und} \quad \pi'(i) = \begin{cases} \pi(i_0) - 1 & i = i_0, \\ \pi(i) & i \neq i_0. \end{cases}$$

Wir müssen zeigen, daß Π' wieder zulässig ist: da die σ -Komponente unverändert geblieben ist, gilt weiterhin 2.12, denn die π -Komponente ist ja nirgends größer geworden. Angenommen 2.11 wäre verletzt. Dann gäbe es $i, j \geq 1$ mit $\pi'(i) > j + \pi'(i + j)$. Weil nach Voraussetzung $\pi(i) \leq j + \pi(i + j)$ muß $i + j = i_0$ sein, denn nur $\pi'(i_0)$ ist kleiner als das entsprechende $\pi(i_0)$. Also ist $\pi'(i) = \pi(i) \leq \pi(i_0) = \pi'(i_0) + 1$, denn i_0 war so gewählt, daß $\pi(i_0) \geq \pi(i)$ für alle i . Da $j \geq 1$ gilt $\pi'(i) \leq 1 + \pi'(i_0) \leq j + \pi'(i + j)$ also doch.

Falls $\pi \equiv 0$, so wähle man $j_0 \geq 0$ mit $\sigma(j_0) = 2$ und setze

$$\pi'(i) = \pi(i) \quad \text{und} \quad \sigma'(j) = \begin{cases} 1 & j = j_0, \\ \sigma(j) & j \neq j_0. \end{cases}$$

Auch dieses Π' ist zulässig: da $\pi' \equiv 0$, sind 2.11 und 2.12 leere Bedingungen. \square

Abbildung 2.4 zeigt zwei unterschiedliche Schrittzerlegungen für das B aus Abbildung 2.3. Dort sieht man auch, wie die Schrittzerlegung mit einer Nummerierung der schwarzen Kästchen zusammenhängt. Man kann diese Nummerierung dazu benutzen, eine Ordnung auf den möglichen B -Signaturen zu erklären: es gelte $\text{sig}_B(x) < \text{sig}_B(y)$, falls für ein geeignetes m die ersten $m - 1$ Ziffern bei x und y übereinstimmen, die m te Ziffer von x aber kleiner als die entsprechende Ziffer von y ist. Es gibt eine kleinste Signatur, die identisch Null ist, und eine größte, bei der jede σ -Ziffer 1 und jede π -Ziffer $p - 1$ ist.

Lemma 2.2.9. $T_B = Q(\tilde{\varepsilon})P(\tilde{R})$ hat maximale B -Signatur.

Beweis. Daß alle σ -Ziffern Eins sind ist nach Definition klar. Für die π -Ziffern bedenke man, daß $\tilde{r}_i = p^{\pi(i)} - 1$ die p -adische Darstellung

$$p^{\pi(i)} - 1 = (p-1) + (p-1)p + (p-1)p^2 + \cdots + (p-1)p^{\pi(i)-1}$$

hat. Alle π -Ziffern sind damit $p-1$, also maximal. \square

Wir zeigen jetzt, wie man den Übergang von B zu einem Nachfolger B' mit der Theorie aus Abschnitt 2.1.2 in Beziehung setzen kann.

Definition 2.2.10. Sei $B' = B(\Pi')$ ein Nachfolger von $B = B(\Pi)$. Definiere $Q = Q_{B,B'} \in A$ und $l = l_{B,B'} \in \mathbb{N}$ wie folgt:

- 1) Falls B' π -Nachfolger an der Stelle i_0 ist, sei $Q = P(0, \dots, 0, p^{\pi(i_0)})$ (mit $i_0 - 1$ Nullen) und $l = p$.
- 2) Falls B' σ -Nachfolger an der Stelle j_0 ist, sei $Q = Q_{j_0}$ und $l = 2$.

Hat man eine Schrittzzerlegung wie in 2.14, so sei $B_m = B(\Pi_m)$ und $l_m = l_{B_m, B_{m+1}}$. Wir schreiben auch $Q_m = Q_{B_m, B_{m+1}}$, falls die Gefahr der Verwechslung mit dem gleichbezeichneten Milnorschen Bocksteinoperator nicht besteht. Q_m hat die Zifferndarstellung, bei der die $(m+1)$ te Ziffer Eins und alle anderen Ziffern Null sind. l_m ist die Anzahl der möglichen Ziffern im $(m+1)$ ten Kästchen.

Das folgende Lemma zeigt, wie sich manche Multiplikationen in der Milnor-Basis vereinfachen, wenn ein Faktor maximale B -Signatur hat.

Notation. $a \doteq b$ soll bedeuten, daß $a = \lambda b$ mit $\lambda \in \mathbb{F}_p^*$ gilt.

Lemma 2.2.11. Sei B endlich und zulässig, $Q(\varepsilon)P(R)$ beliebig.

- 1) Es ist

$$T_B \cdot Q(\varepsilon)P(R) = \begin{cases} \pm Q(\varepsilon + \tilde{\varepsilon})P(R + \tilde{R}) & \text{falls } \text{sig}_B(Q(\varepsilon)P(R)) \equiv 0, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

- 2) Sei B' π -Nachfolger von B an der Stelle i_0 , $Q = Q_{B,B'}$ und $0 \leq k < l$. $\text{sig}_B(Q(\varepsilon)P(R))$ sei maximal. $z \in \{0, \dots, p-1\}$ sei die $B' \setminus B$ -Ziffer von $Q(\varepsilon)P(R)$. Dann ist

$$Q^k \cdot Q(\varepsilon)P(R) \doteq \begin{cases} Q(\varepsilon)P(\tilde{R} + (0, \dots, 0, kp^{\pi(i_0)})) & \text{falls } z + k < p, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

- 3) Sei B' σ -Nachfolger von B an der Stelle j_0 , $Q = Q_{B,B'}$. $z = \varepsilon_{j_0}$ sei die $B' \setminus B$ -Ziffer von $Q(\varepsilon)P(R)$. Dann gilt

$$Q \cdot Q(\varepsilon)P(R) = \begin{cases} \pm Q(\varepsilon + (0, \dots, 0, 1))P(R) & \text{falls } z = 0, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

2 Ein Lemma

Beweis von 1). Sei $T_B = Q(\tilde{\varepsilon})P(\tilde{R})$. Wir müssen die Multiplikation $Q(\tilde{\varepsilon})P(\tilde{R})Q(\varepsilon)P(R)$ betrachten. Dazu greifen wir uns zunächst den mittleren Teil $P(\tilde{R})Q(\varepsilon)$ heraus. Nach 1.1.14 gilt

$$P(\tilde{R})Q_j = Q_jP(\tilde{R}) + \sum_{t>0} Q_{j+t}P(\tilde{r}_1, \dots, \tilde{r}_{t-1}, \tilde{r}_t - p^j, \tilde{r}_{t+1}, \dots).$$

Wir dürfen die Summe auf der rechten Seite ignorieren: der Term $Q_{j+t} \cdot P(\dots)$ taucht dort nur auf, wenn $\tilde{r}_t = p^{\pi(i)} - 1 \geq p^j$ ist. Dann ist $\pi(i) > j$, sodaß nach 2.12 $\sigma(t+j) = 2$. Wegen $\sigma(t+j) = 2$ ist dann aber Q_{j+t} ein Faktor von $Q(\tilde{\varepsilon})$, sodaß der Summand bei der Multiplikation mit $Q(\tilde{\varepsilon})$ wegen $Q_{j+t}^2 = 0$ wegfällt.

Wir dürfen also von $Q(\tilde{\varepsilon})P(\tilde{R})Q(\varepsilon)P(R)$ zu $Q(\tilde{\varepsilon})Q(\varepsilon)P(\tilde{R})P(R)$ übergehen. Falls $\varepsilon_j \not\equiv 0 \pmod{\sigma(j)}$ für ein j , so ist $\varepsilon_j = 1$ und $\sigma(j) = 2$, sodaß Q_j sowohl ein Faktor von $Q(\varepsilon)$, wie auch von $Q(\tilde{\varepsilon})$ ist. Wegen $Q_j^2 = 0$ wäre also das Produkt null, wie behauptet.

Wir nehmen also jetzt $\varepsilon_j \equiv 0 \pmod{\sigma(j)}$ an. $Q(\tilde{\varepsilon})$ und $Q(\varepsilon)$ ergeben zusammen das behauptete $\pm Q(\varepsilon + \tilde{\varepsilon})$, sodaß wir uns nur noch auf die Multiplikation $P(\tilde{R}) \cdot P(R)$ zu konzentrieren brauchen. Wir benutzen jetzt Milnors Multiplikationsalgorithmus, wie in Abbildung 1.1 beschrieben. Sei $X = (x_{i,j})_{i,j \geq 0, i+j \neq 0}$ eine Matrix wie in Lemma 1.1.11. Wir behaupten, daß nur die triviale Matrix mit $x_{k,0} = \tilde{r}_k$, $x_{0,k} = r_k$ und $x_{k,i} = 0$ für $k, i > 0$ zum Produkt beiträgt.

Sei also $x_{k,i} \neq 0$ für gewisse $k, i > 0$. Wähle ein solches (k, i) mit maximalem k . Wegen

$$\tilde{r}_k = x_{k,0} + px_{k,1} + p^2x_{k,2} + \dots$$

ist $\tilde{r}_k \geq p^i x_{k,i}$, also $1 \leq x_{k,i} < p^{\pi(k)-i}$. Aus 2.11 folgt $\pi(k) - i \leq \pi(k+i)$, sodaß $x_{k,i} \not\equiv 0 \pmod{p^{\pi(k+i)}}$.

Andererseits ist $x_{k+i,0} \equiv -1 \pmod{p^{\pi(k+i)}}$; da k maximal gewählt wurde, ist ja $x_{k+i,j} = 0$ für $j > 0$, sodaß $x_{k+i,0} = \tilde{r}_{k+i} = p^{\pi(k+i)} - 1$. Also verschwindet nach Korollar 1.1.13 der Multinomialkoeffizient $(x_{k+i,0} | \dots | x_{k,i} | \dots | x_{0,k+i})$ modulo p , da bei der Addition $x_{k,i} + x_{k+i,0}$ zur Basis p Überträge auftreten. Da dieser Multinomialkoeffizient ein Faktor von $\beta(X)$ ist, trägt die Matrix X nichts zum Produkt $P(\tilde{R}) \cdot P(R)$ bei.

Es bleibt also nur die Matrix mit $x_{k,0} = \tilde{r}_k$, $x_{0,k} = r_k$ und $x_{i,j} = 0$ für $i, j > 0$ übrig. Deren Beitrag zum Produkt ist

$$(\tilde{r}_1 | r_1) \cdots (\tilde{r}_n | r_n) \cdot P(R + \tilde{R}).$$

Die Binomialkoeffizienten haben alle die Form $(p^{\pi(k)} - 1 | r_k)$. Wiederum nach Korollar 1.1.13 verschwindet dieser Faktor, falls $r_k \not\equiv 0 \pmod{p^{\pi(k)}}$ ist. Im anderen Fall erhält man mit Lemma 1.1.12, daß $(p^N - 1 | p^N \cdot K) \equiv 1 \pmod{p}$ für beliebige N und K , was wir hier für $N = \pi(k)$ und $K = r_k/p^{\pi(k)}$ benutzen können; die Darstellung zur Basis p ist nämlich

$$\begin{aligned} p^N - 1 &= (p-1) + (p-1)p + (p-1)p^2 + \dots + (p-1)p^{N-1} \\ p^N \cdot K &= 0 + 0 \cdot p + 0 \cdot p^2 + \dots + 0 \cdot p^{N-1} + \sum_{i \geq N} k_i p^i \end{aligned}$$

sodaß

$$\begin{aligned} (p^N - 1 | p^N K) &\equiv (p - 1 | 0) \cdots (p - 1 | 0) \cdot \prod_{i \geq N} (0 | k_i) \pmod{p} \\ &\equiv 1 \pmod{p}. \end{aligned}$$

Damit ist $P(\tilde{R})P(R) = P(\tilde{R} + R)$, wie behauptet. \square

Wir geben dieses Resultat noch einmal mit anderen Worten wieder: Falls der zweite Faktor $Q(\varepsilon)P(R)$ die B -Signatur Null hat, so erzwingt die Linksmultiplikation mit T_B einfach die maximale B -Signatur; die anderen Ziffern von $Q(\varepsilon)P(R)$ werden nicht verändert. Hat der zweite Faktor eine von Null verschiedene B -Signatur, so wird er annulliert. Insbesondere ist

$$T_B A = \mathbb{F}_p \{ Q(\varepsilon)P(R) \mid \text{sig}_B(Q(\varepsilon)P(R)) \text{ maximal} \}. \quad (2.15)$$

Beweis von 2). Wie man sich leicht überlegt, reicht es die Aussage für $k = 1$ zu beweisen, weil man Q^k als $Q \cdots Q$ schreiben kann. Als erstes betrachten wir wieder $Q \cdot Q(\varepsilon)$. Zur Abkürzung sei $P_N = P(0, \dots, 0, N)$, sodaß $Q = P_{p^{\pi(i_0)}}$. Aus Lemma 1.1.14 kennen wir die Kommutatorrelation

$$P_N Q_j = Q_j P_N + \begin{cases} Q_{i_0+j} P_{N-p^j} & \text{falls } N \geq p^j, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad (2.16)$$

Wir behaupten, daß wieder nur der erste Summand von Bedeutung ist. Wegen $N < p^{\pi(i_0)}$ folgt aus 2.12 – angewendet auf (π', σ') – daß $\sigma(i_0 + j) = 2$, sodaß Q_{i_0+j} immer ein Bockstein aus B ist. Sei $\{Q_{j_1}, \dots, Q_{j_L}\}$ mit $j_1 < \dots < j_L$ die Menge dieser Bocksteins. Durch wiederholte Anwendung erhalten wir aus 2.16 zunächst

$$P_N Q_{j_1} \cdots Q_{j_L} = Q_{j_1} \cdots Q_{j_L} P_N + \sum (L\text{-faches Bocksteinprodukt aus } B) \cdot (\text{irgendwas}).$$

Unter den Faktoren auf der rechten Seite kann der kleinste Bockstein aus B nicht auftreten, weil das Q_{i_0+j} aus 2.16 wegen $i_0 \geq 1$ niemals Q_{j_1} ist. Also muß dort jeweils ein Bockstein doppelt vorkommen und annulliert damit den Summanden.

Schreibt man $Q(\varepsilon) = Q_{j_1} \cdots Q_{j_L} \cdot Q_{j_{L+1}} \cdots Q_{j_{L'}}$, so ist $PQ(\varepsilon) = Q(\tilde{\varepsilon}) \cdot PQ_{j_{L+1}} \cdots Q_{j_{L'}}$. Wendet man nun 2.16 auf den zweiten Teil an, so kann man wiederum die Störterme ignorieren: es wurde schon festgestellt, daß dabei nur Bocksteinoperatoren aus B auftreten, und diese werden durch den Vorfaktor $Q(\tilde{\varepsilon})$ zu Null.

Also ist $Q \cdot Q(\varepsilon) = Q(\varepsilon) \cdot Q$ und wir müssen nur noch $Q \cdot P(R)$ betrachten. Sei $X = (x_{i,j})$ eine Multiplikationsmatrix. Wir behaupten, daß wieder nur die triviale Matrix mit $x_{i,j} = 0$ für $i \geq 1$ eine Rolle spielt. Für dieses X gilt offenbar $x_{i_0,0} = p^{\pi(i_0)}$ und $x_{i,0} = 0$ für $i \neq i_0$. Ihr Beitrag zum Produkt ist deswegen $(p^{\pi(i_0)} | r_{i_0}) \cdot P(R + (0, \dots, 0, p^{\pi(i_0)}))$. Nach Lemma 1.1.12 ist der Binomialkoeffizient gerade $(1 | z) = z + 1$, was mit der Behauptung übereinstimmt.

Sei also X jetzt eine andere Matrix, dh. es sei $x_{i,j} \neq 0$ für gewisse $i, j \geq 1$. Offenbar ist $i = i_0$, da in Q nur der i_0 te Eintrag von Null verschieden ist. Sei

2 Ein Lemma

j_0 das größte j mit $x_{i_0,j} \neq 0$. Dieselbe Abschätzung wie oben zeigt, daß $x_{i_0,j_0} \not\equiv 0 \pmod{p^{\pi(i_0+j_0)}}$ gilt. Die Maximalität von j impliziert $x_{i,i_0+j_0} = 0$ für alle $i \geq 1$. Also hat man $x_{0,i_0+j_0} = r_{i_0+j_0}$. Dies ist $\equiv -1 \pmod{p^{\pi(i_0+j_0)}}$ weil $Q(\varepsilon)P(R)$ maximale B -Signatur hat. Deswegen tritt bei der Addition $x_{i_0,j_0} + x_{0,i_0+j_0}$ ein Übertrag auf und es ist $\beta(X) = 0$. \square

Beweis von 3). Dies ist völlig trivial: z ist eben genau dann Null, wenn der Bockstein Q noch nicht in $Q(\varepsilon)$ auftaucht. \square

2) und 3) lassen sich so zusammenfassen: wenn B' ein Nachfolger von B ist, so enthält das Profil von B' genau ein Kästchen mehr als B . Hat $Q(\varepsilon)P(R)$ bereits volle B -Signatur, so erhöht die Linksmultiplikation mit $Q = Q_{B,B'}$ einfach die Ziffer in diesem zusätzlichen Kästchen, solange dabei kein Übertrag entsteht. Entsteht ein Übertrag, so ist das Ergebnis Null. Insbesondere ergibt sich

$$Q_{B,B'}^k T_B A = \mathbb{F}_p \{ Q(\varepsilon)P(R) \mid \text{sig}_B(Q(\varepsilon)P(R)) \text{ maximal, } B' \setminus B\text{-Ziffer} \geq k \}. \quad (2.17)$$

Den Kontakt zu Abschnitt 2.1.2 stellt das folgende Korollar her.

Korollar 2.2.12. *Sei B eine endliche zulässige Hopf-Unteralgebra und B' ein Nachfolger von B . Q und l seien wie oben definiert. Dann gilt: Linksmultiplikation mit Q definiert eine Abbildung*

$$Q : T_B A \rightarrow T_B A$$

und diese induziert eine freie $\mathbb{F}_p[Q]/(Q^l)$ -Modulstruktur auf $T_B A$ mit $Q^{l-1}T_B A = T_{B'} A$.

Beweis. Aus 2.2.11,1) und 2) folgt $QT_B = T_B Q$. Deswegen ist $QT_B A = T_B Q A \subset T_B A$, sodaß $Q : T_B A \rightarrow T_B A$ wohldefiniert ist. 2.2.11, 2) und 3) implizieren $Q^{l-1}T_B A = T_{B'} A$ und $Q^l T_B A = 0$. $T_B A$ ist als $\mathbb{F}_p[Q]/(Q^l)$ -Modul frei weil

$$\{ Q(\varepsilon)P(R) \mid B\text{-Signatur maximal und } B' \setminus B\text{-Ziffer} = 0 \}$$

offenbar eine $\mathbb{F}_p[Q]/(Q^l)$ -Basis ist. \square

Man beachte, daß $Q^k T_B A$ eine Vektorraumbasis hat, die eine *Teilmenge* der Milnor-Basis ist. Dies ist für die Implementierung auf dem Computer von großer Bedeutung: weder bei der Inklusion $T_B A \rightarrow A$, noch bei der Projektion $T_B : A \rightarrow T_B A$ muß nennenswert gerechnet werden, und dasselbe gilt auch für die Operation von Q .

Wir bemerken noch, daß sich 2.2.12 offenbar auf Auflösungen überträgt:

Korollar 2.2.13. *Sei C_* eine partielle Auflösung. Dann ist $T_B C_*$ ein freier $\mathbb{F}_p[Q]/(Q^l)$ -Modul mit $Q^{l-1}T_B C_* = T_{B'} C_*$.*

Beweis. Klar, weil C_* ein freier A -Modul ist. \square

Zum Abschluß noch eine Bemerkung zur Demystifikation, im Anschluß an 2.2.3:

Bemerkung 2.2.14. Als A -Rechtsmodul kann $T_B A$ mit dem Hopf-Quotienten $B \setminus \setminus A = \mathbb{F}_p \otimes_B A$ identifiziert werden. Es ist ja $T_B A = T_B B \otimes_B A$, sodaß nur $T_B B \cong_B \mathbb{F}_p$ gezeigt werden muß. Dies ist aber klar, denn nach Lemma 2.2.11 ist $T_B B = \mathbb{F}_p \{ T_B \}$.

2.2.3 Von Unten, allgemein

Wir kommen nun zu unserem Algorithmus. Wir wollen zeigen, wie man im Bereich $T - \tau_B > S \cdot d_B$ mithilfe von Lemma 2.1.9 die Berechnung von C_* auf das Rechnen mit $T_B C_*$ zurückführen kann.

Seien $S, T \in \mathbb{N}$ und C_* eine in (S, T) erweiterbare Auflösung. Sei $B \subset A$ eine endliche zulässige Hopf-Unteralgebra mit einer Schrittzzerlegung

$$0 = B(\Pi_0) \subset B(\Pi_1) \subset \cdots \subset B(\Pi_N) = B.$$

Zur Abkürzung schreiben wir $B_m = B(\Pi_m)$, $T_m = T_{B_m}$, $\tau_m = |T_m|$, $Q_m = Q_{B_m, B_{m+1}}$ und $l_m = l_{B_m, B_{m+1}}$. Das Ziel ist, die Erweiterung von C_* im Grad (S, T) mithilfe von Lemma 2.1.2 auf Rechnungen in $T_N C_*$ zurückzuführen. Dabei folgt man der Zerlegung durch die B_m , indem man die Rechnung in $T_m C_*$ auf l_m Rechnungen mit $T_{m+1} C_*$ reduziert. Der Schritt von $T_m C_*$ zu $T_{m+1} C_*$ benutzt dabei die kurzen exakten Sequenzen

$$T_{m+1} C_* = Q_m^{l_m-1} T_m C_* \twoheadrightarrow T_m C_* \xrightarrow{Q_m} Q_m T_m C_*, \quad (2.18)$$

$$T_{m+1} C_* = Q_m^{l_m-1} T_m C_* \twoheadrightarrow Q_m T_m C_* \xrightarrow{Q_m} Q_m^2 T_m C_*, \quad (2.19)$$

⋮

$$T_{m+1} C_* = Q_m^{l_m-1} T_m C_* \twoheadrightarrow Q_m^{l_m-2} T_m C_* \xrightarrow{Q_m} Q_m^{l_m-1} T_m C_*. \quad (2.20)$$

Daß dies funktioniert sagt

Satz 2.2.15. *Falls $T - \tau_B > S \cdot d_B$, so sind alle auftretenden Sequenzen 2.18, ..., 2.20 in den nötigen Bigraden freundlich.*

Vor dem Beweis brauchen wir noch zwei Lemmas.

Lemma 2.2.16. *Für alle m ist $(l_m - 1) |Q_m| \leq d_B$.*

Beweis. So war d_B gerade definiert. □

Lemma 2.2.17. *C_* sei in (S, T) erweiterbar. Dann ist für $0 \leq m < n$ und $0 \leq k < l_m$*

$$H_{s,t}(Q_m^k T_m C_*) = 0 \quad \text{für } (s, t) \in R_{S,T}^0 \cap A^{d_B, 0^-}.$$

Beweis. Für $k = m = 0$ ist dies wahr, weil C_* nach Voraussetzung in $R_{S,T}^0 \setminus \{0\}$ exakt ist. Sei die Aussage für $k = 0$ und $m = m_0 < N$ schon bekannt. Wegen Lemma 2.1.9 gilt sie dann auch für die anderen $k < l_m$: Dazu setzen wir $M_* = T_m C_*$, $Q = Q_m$, $l = l_m$, $\rho = d_B$ und $r = 0$. Wie gerade gesehen ist dann $(l - 1)q \leq \rho$, sodaß also $lq/2 \leq \rho$ und $r' = 0$, letzteres weil $(l - k)q - \rho \leq (l - 1)q - \rho \leq 0$. Also ist Lemma 2.1.9 anwendbar und die Behauptung für $k < l$ gezeigt. Da $Q_m^{l_m-1} T_m C_* = T_{m+1} C_*$ ist, haben wir die Behauptung damit auch für $k = 0$ und $m = m_0 + 1$ gezeigt, was die Induktion schließt. □

Der Satz ist jetzt eine einfache Konsequenz:

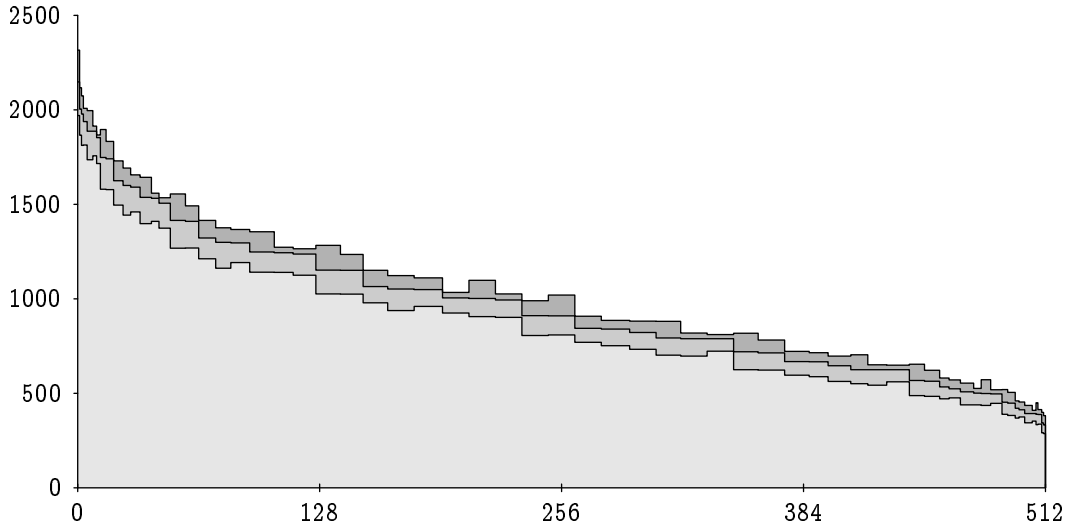


Abbildung 2.5: Zerlegung der Matrizen bei der Berechnung der Homologie von $C_{11,220} \rightarrow C_{10,220} \rightarrow C_{9,220}$ für $p = 2$. Diese Vektorräume haben die Dimension 439547, 488273 bzw. 521837. Benutzt wurde die Unteralgebra B mit Profil $\pi = (3, 3, 2, 1)$; für B hat man $d_B = 15$, $\tau_B = 64$, sodaß Satz 2.2.15 für $(S, T) = (10, 220)$ anwendbar ist. Nach Anwendung der Lemmas 2.1.2 und 2.1.3 bleiben eine Homologieberechnung und 511 Hebungsprobleme übrig. Gezeigt werden die Dimensionen der dabei auftretenden Vektorräume $T_B C_{*,210-?}$ mit $* \in \{9, 10, 11\}$. Der obere Bereich bezieht sich auf C_9 , der mittlere auf C_{10} und der untere auf C_{11} .

Beweis des Satzes. Wir müssen zeigen, daß für $T - \tau_B > S \cdot d_B$ alle auftretende Bigrade (s, t) in $A^{d_B, 0-}$ liegen. Man bedenke, daß die Inklusion $T_{m+1}C_* \hookrightarrow Q_m^k T_m C_*$ den internen Grad um $(l_m - 1 - k)q_m$ erhöht, wobei $q_m = |Q_m|$. Wird Lemma 2.1.2 also auf 2.18 angewendet, so ersetzt es die Berechnung der Homologie $H_{s,t}(T_m C_*)$ durch die Berechnung der Homologie $H_{s,t}(Q T_m C_*)$ und die Berechnung eines Lifts $L_{s,t-(l_m-1)q_m}(T_{m+1}C_*)$. Durch wiederholte Anwendung auf 2.18, ..., 2.20 wird $H_{s,t}(T_m C_*)$ schließlich durch

$$H_{s,t}(T_{m+1}C_*) \text{ und } L_{s,t-q_m}(T_{m+1}C_*), L_{s,t-2q_m}(T_{m+1}C_*), \dots, L_{s,t-(l_m-1)q_m}(T_{m+1}C_*)$$

ersetzt. Dieselbe Verteilung ergibt sich bei Anwendung von Lemma 2.1.3 auf das Hebungsproblem $L_{s,t}(T_m C_*)$. Summiert man nun über alle m zwischen 0 und $N - 1$, so ergibt sich als maximale Verschiebung des internen Grads $\sum_{0 \leq m < N} (l_m - 1)|Q_m|$. Wie man sich leicht überlegt ist dies aber gerade τ_B . \square

Bemerkung 2.2.18 (vgl. Bemerkung 2.2.3). Angenommen C_* wäre eine vollständige A -Auflösung von \mathbb{F}_p . Nach Satz 2.2.1 kann man C_* dann auch als B -Auflösung betrachten. Wie in 2.2.14 bemerkt, ist $T_B B \cong \mathbb{F}_p$, sodaß $T_B C_* = \mathbb{F}_p \otimes_B C_*$. Für $k = 0$ ist Lemma 2.2.17 dann einfach ein bekanntes Verschwindungsergebnis für $H_{*,*}(T_B C_*) = \text{Tor}_{*,*}^B(\mathbb{F}_p, \mathbb{F}_p)$ (siehe zB. [5] und/oder [33]).

Wir beschließen die Diskussion der unteren Varianten mit ein paar Statistiken. In Abbildung 2.5 sieht man wie Satz 2.2.15 bei der Berechnung von $\text{Ext}_A^{11,220}(\mathbb{F}_2, \mathbb{F}_2)$ für

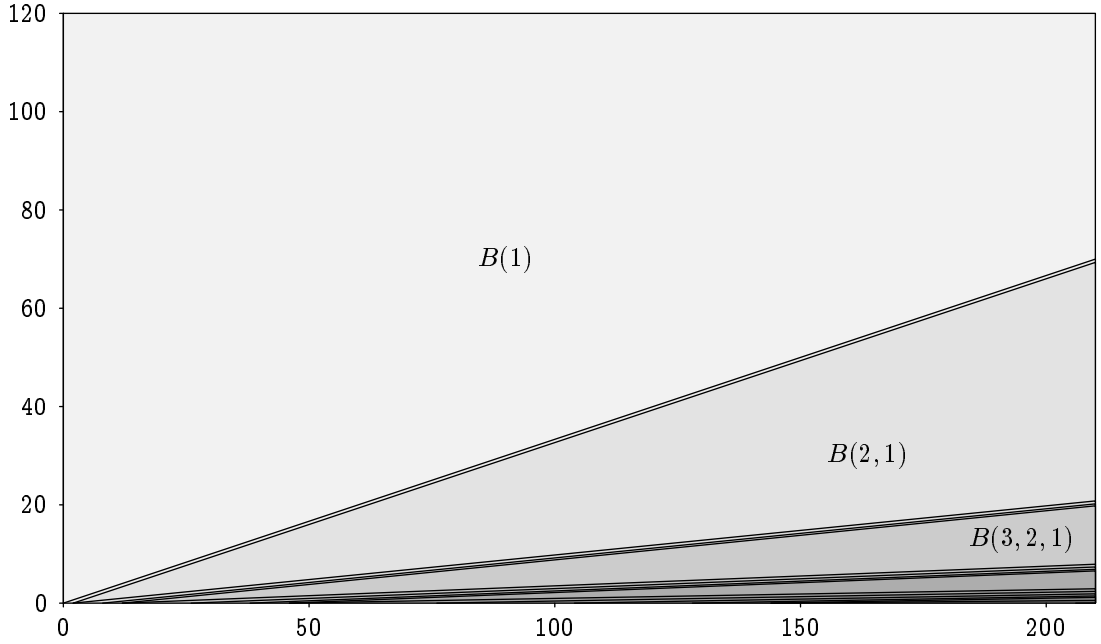


Abbildung 2.6: Anwendbarkeit von Satz 2.2.15 für $p = 2$. Für die Folge der Hopf-Unteralgebren $B(1)$, $B(1,1)$, $B(2,1)$, $B(2,1,1)$, $B(2,2,1)$, usw. wird jeweils der Bereich $t - \tau_B > d_B(s - 1)$ gezeigt. Das verwendete Koordinatensystem ist $(x, y) = (t - s, s)$.

$p = 2$ angewendet wird. Die Methode ist hier sehr effektiv, weil man eine große Unteralgebra $B = B(3, 3, 2, 1)$ verwenden kann; statt mit Vektorräumen der Dimension ≈ 500000 rechnen zu müssen, kommt man mit solchen der Dimension ≤ 2500 aus.

Allerdings ist die untere Variante weit weniger machtvoll, wenn s im Vergleich zu $t - s$ groß wird. Dies sieht man in Abbildung 2.6, in der in $(s, t - s)$ -Koordinaten jeweils die Bereiche $t - \tau_B > d_B s$ für gewisse B gezeigt werden. In diesem problematischen Bereich läßt sich jedoch die obere Version des Lemmas einsetzen, was wir als nächstes erklären möchten.

2.2.4 Von Oben

Wir benutzen wieder die Zerlegung von C_* durch die Sequenzen 2.18, ..., 2.20, wollen aber jetzt Lemma 2.1.8 statt Lemma 2.1.9 anwenden.

Sei also wie oben $B \subset A$ eine endliche zulässige Hopf-Unteralgebra mit einer Schrittzzerlegung $0 = B_0 \subset \dots \subset B_N = B$. Wir setzen

$$\rho = \rho_B = \min \{ |Q_{B_m, B_{m+1}}| : m = 0, \dots, N - 1 \}.$$

Unser Ziel ist

Satz 2.2.19. *Ist C_* in (S, T) erweiterbar, so sind für $T < \rho_B \cdot S$ alle 2.18, ..., 2.20 in allen nötigen Bigraden freundlich.*

2 Ein Lemma

Zum Beweis brauchen wir wieder zwei Lemmas:

Lemma 2.2.20. Für alle Q_m ist $|Q_m| \geq \rho$.

Beweis. So ist ρ_B gerade definiert. \square

Lemma 2.2.21. Ist C_* in (S, T) erweiterbar, so ist $H_{s,t}(T_m) = 0$ für $(s, t) \in R_{S,T}^o \cap A^{\rho, -\rho m+}$.

Beweis. Durch Induktion nach m folgt dies aus Lemma 2.1.8. Der Induktionsanfang $m = 0$ ist klar. Beim Schritt $m \Rightarrow m + 1$ setzen wir $M = T_m C_*$, $Q = Q_m$, $l = l_m$, $r = -\rho m$ und $k = l - 1$. Wegen $-2\rho + (l - k)q = -2\rho + q = -\rho + (q - \rho) \geq -\rho$ ist $r' = r + \min\{-\rho, -2\rho + (l - k)q\} = r - \rho = -m\rho - \rho = -(m + 1)\rho$, wie behauptet. \square

Beweis des Satzes. Durch wiederholte Anwendung von Lemma 2.1.2 auf 2.18, ..., 2.20 wird das Homologieproblem zu $H_{s,t}(T_m C_*)$ auf folgende Art zerlegt:

$$\begin{array}{ccccccc} H_{s,t}(T_m C_*) & \xrightarrow{\quad} & H_{s,t}(Q_m T_m C_*) & \xrightarrow{\quad} & H_{s,t}(Q_m^2 T_m C_*) & \xrightarrow{\quad} & \cdots \\ & \searrow & & \searrow & & \searrow & \\ & & L_{s,t-(l-1)q_m}(T_{m+1} C_*) & & L_{s,t-(l-2)q_m}(T_{m+1} C_*) & & \cdots \end{array}$$

Dieselbe Verteilung erhält man auch bei Anwendung von Lemma 2.1.3 auf $L_{s,t}(T_m C_*)$. Damit Lemmas 2.1.2 und 2.1.3 anwendbar sind, muß $T_{m+1} C_*$ in den Bigraden der unteren Zeile, also in $(s, t - q_m), \dots, (s, t - (l - 1)q_m)$, exakt sein. Wir schauen uns also die auftretenden t -Komponenten genauer an: für $m = 0$ braucht man die Exaktheit für $t \leq T - q_0 \leq T - \rho$. Für $m = 1$ braucht man $t \leq T - \rho - kq_1 \leq T - \rho - k\rho \leq T - 2\rho$. Für ein allgemeines m erhält man schließlich $t \leq T - (m + 1)\rho$. Nach Lemma 2.2.21 ist $T_{m+1} C_*$ aber dort jeweils wie gewünscht exakt. \square

2.2.5 Von Oben (de-Luxe-Variante)

Die Theorie aus Abschnitt 2.2.2 kann man noch ein bißchen Verallgemeinern. Sei dazu $B(\pi, \sigma)$ eine zulässige Hopf-Unteralgebra, deren Profil kein Kästchen aus den ersten $i_0 - 1$ Spalten enthält. Es sei also $\sigma(i) = 1$ für $i < i_0 - 1$, $\pi(i) = 0$ für $i < i_0$. Zu u mit $0 \leq u \leq \pi(i_0)$ bilden wir

$$B^u = \{ Q(\varepsilon)P(R) \in B \mid r_{i_0} \equiv 0 \pmod{p^u} \}.$$

Offenbar gilt

$$B' = B^{\pi(i_0)} \subset B^{\pi(i_0)-1} \subset \dots \subset B^0 = B,$$

wobei $B' = B(\pi', \sigma')$ aus B durch Streichen der i_0 ten Spalte entstanden ist:

$$\begin{aligned} \pi'(i) &= \pi(i) && \text{für } i \neq i_0, \\ \sigma'(i) &= \sigma(i) && \text{für alle } i, \\ \pi'(i_0) &= 0. \end{aligned}$$

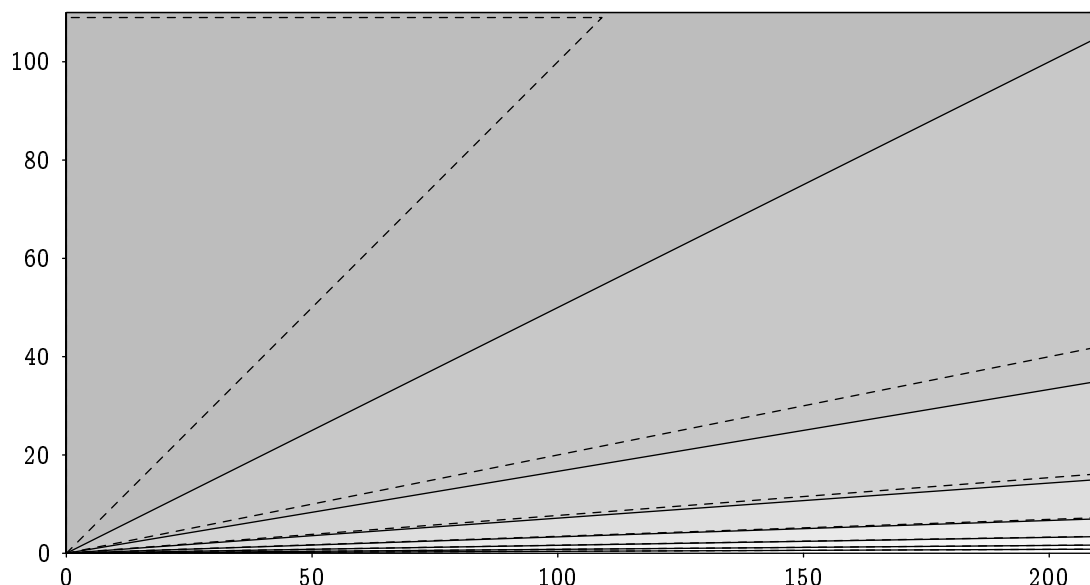
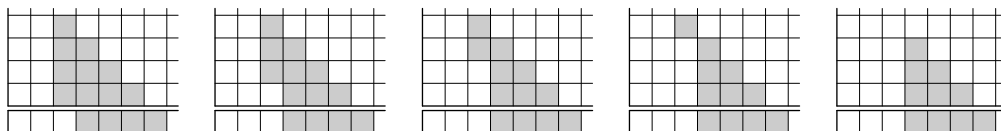


Abbildung 2.7: Bild zur Anwendbarkeit von Satz 2.2.19 für $p = 2$. Gezeigt werden die Bereiche $t < \rho_B \cdot s$ für verschiedene ρ_B . Der Bereich ist umso dunkler, je größer B genommen werden kann. Mit gestrichelten Linien sind die Teilbereiche hervorgehoben, in der die de-Luxe-Version 2.2.22 anwendbar ist.

B^u unterscheidet sich von B dadurch, daß die ersten u Kästchen aus der i_0 ten Zeile entfernt worden sind. Die Folge $B^0 \supset \dots \supset B^{\pi(i_0)}$ sieht damit im Beispiel so aus:



Die B^u sind zwar für $1 \leq u < \pi(i_0)$ keine Hopf-Algebren, können aber trotzdem zur Zerlegung von C_* benutzt werden. Dazu setzen wir $Q_{B^{u+1}, B^u} = P(0, \dots, 0, p^u)$, $l_{B^{u+1}, B^u} = p$ und $T_{B^u} = Q(\tilde{\varepsilon})P(\tilde{R})$ mit

$$\tilde{\varepsilon}_j = \sigma(j) - 1, \quad \tilde{r}_i = \begin{cases} 0 & \text{für } i < i_0, \\ p^{\pi(i_0)} - p^u, & \text{für } i = i_0, \\ p^{\pi(i)} - 1 & \text{für } i > i_0. \end{cases}$$

Ist $0 = B_0 \subset \dots \subset B_N = B'$ eine Schrittzzerlegung von B' , so können wir die Sequenz $B' = B^{\pi(i_0)} \subset \dots \subset B^u$ anschließen; die Filtrierung

$$0 = B_0 \subset \dots \subset B_N = B^{\pi(i_0)} \subset \dots \subset B^u$$

nennen wir dann Schrittzzerlegung von B^u . Wie oben sei

$$\begin{aligned} \rho_{B^u} &= \min \{ |Q_{B_m, B_{m+1}}| : m = 0, \dots, N + \pi(i_0) - u - 1 \} \\ &= \min \left(\{ |Q_{B_m, B_{m+1}}| : m = 0, \dots, N - 1 \} \cup \{ |Q_{B^{v+1}, B^v}| : u \leq v < \pi(i_0) \} \right). \end{aligned}$$

Damit gilt:

Satz 2.2.22 (De-Luxe-Variante von 2.2.19). *Lemma 2.2.11, die Korollare 2.2.12 und 2.2.13 und Satz 2.2.19 gelten weiter.*

Beweis. Es reicht, das Schlüsselresultat Lemma 2.2.11 zu übertragen. Tatsächlich bleibt der gegebene Beweis einfach gültig. Die Details überlassen wir vertrauensvoll dem Leser. \square

Abbildung 2.7 zeigt für $p = 2$ und für verschiedene B die Bereiche, in denen Satz 2.2.19 oder Satz 2.2.22 anwendbar ist. Ein Beispiel für die Anwendung von Satz 2.2.19 sieht man in Abbildung 2.8.

2.3 Der Algorithmus

Aus den Sätzen 2.2.15 und 2.2.19 (bzw. der Verschärfung 2.2.22) kennen wir nun Kriterien, unter denen 2.18, ..., 2.20 freundliche Sequenzen sind. Diese können also wie in Abschnitt 2.1.1 beschrieben zur Vereinfachung von Homologie- und Hebungsproblemen benutzt werden. Hier soll gezeigt werden, wie man daraus einen effektiven Algorithmus bastelt, der auch mit Erfolg auf zeitgenössischen Rechnern implementiert werden kann.

2.3.1 Die Signaturfiltrierung

Unser Ausgangspunkt ist eine zulässige Unteralgebra $B \subset A$ mit einer Schrittzzerlegung $0 = B(\Pi_0) \subset B(\Pi_1) \subset \dots \subset B(\Pi_N) = B$. Sei

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}_B &= \{ \text{sig}_B(Q(\varepsilon)P(R)) \mid Q(\varepsilon)P(R) \in B \} \\ &\cong \{ (\varepsilon, R) \mid \varepsilon_j < \sigma(j), r_i < p^{\pi(i)} \forall j \geq 0, i \geq 1 \} \end{aligned}$$

die Menge der möglichen B -Signaturen. Zur Abkürzung bezeichnen wir die $(\varepsilon, R) \in \mathfrak{S}_B$ in diesem Abschnitt im Regelfall mit ϖ . Wie im Abschnitt vor Lemma 2.2.9 auf Seite 39 beschrieben, induziert eine Schrittzzerlegung von B eine Ordnung auf \mathfrak{S}_B : es sei $\varpi < \varpi'$, falls für ein m die ersten m -Ziffern von ϖ und ϖ' übereinstimmen während

$$(m+1)\text{te Ziffer von } \varpi < (m+1)\text{te Ziffer von } \varpi'$$

gilt. Damit definieren wir

$$\begin{aligned} A^{[\varpi]} &= \mathbb{F}_p \{ Q(\varepsilon)P(R) \mid \text{sig}_B(Q(\varepsilon)P(R)) = \varpi \}, \\ A^{[\geq \varpi]} &= \mathbb{F}_p \{ Q(\varepsilon)P(R) \mid \text{sig}_B(Q(\varepsilon)P(R)) \geq \varpi \}. \end{aligned}$$

Sei $\mathfrak{S}_B = \{ \varpi_0, \dots, \varpi_K \}$ eine Aufzählung der verschiedenen B -Signaturen mit $\varpi_j < \varpi_{j+1}$. Die $A^{[\geq \varpi_j]}$ bilden eine absteigende Filtrierung

$$A = A^{[\geq \varpi_0]} \supset A^{[\geq \varpi_1]} \supset \dots \supset A^{[\geq \varpi_K]} \supset 0. \quad (2.21)$$

Wir nennen diese die *Signaturfiltrierung*; sie wird in unserer Implementierung des Algorithmus die Betrachtung der Sequenzen 2.18, ..., 2.20 ersetzen.

Zur Vereinfachung nehmen wir ab jetzt folgendes an:

Annahme 2.3.1. Die Schrittzzerlegung erfülle folgende Bedingungen:

- Jede σ -Ziffer sei signifikanter als jede π -Ziffer.
- Ein π -Kästchen sei signifikanter als alle π -Ziffern in höheren Zeilen.

Von den beiden in Abbildung 2.4 gezeigten Schrittzzerlegungen erfüllt zum Beispiel die linke diese Annahme, die rechte aber nicht. Es gibt auch zu jedem B eine Schrittzzerlegung, die mit dieser Voraussetzung verträglich ist: eine solche erhält man beispielsweise, wenn man der Konstruktion aus dem Beweis von Lemma 2.2.8 folgt.

Lemma 2.3.2. Die $A^{[\geq \varpi]}$ sind Rechtsideale von A , dh. es ist $A^{[\geq \varpi]} = A^{[\geq \varpi]} \cdot A$.

Beweis. Wir müssen eine Multiplikation der Form $Q(\varepsilon)P(R)Q(\varepsilon')P(R')$ betrachten, bei der $\text{sig}_B(Q(\varepsilon)P(R)) \geq \varpi$ ist. Man benutzt zunächst Lemma 1.1.14 und ersetzt ein auftretendes $P(R)Q_s$ durch $Q_sP(R) + \sum Q_{s+t}P(\dots, r_t - p^s, \dots)$. Hier kann die B -Signatur des Ausdrucks $Q_{s+t}P(\dots, r_t - p^s, \dots)$ nur dann kleiner als $P(R)$ sein, wenn das p^s , das an der t ten Stelle abgezogen wird, zu einem π -Kästchen aus B gehört. Also wäre $\pi(t) > s$, sodaß nach 2.12 $\sigma(t + s) = 2$ gilt. Das auftretende Q_{s+t} erhöht damit eine σ -Ziffer, sodaß die B -Signatur insgesamt zunimmt.

Man muß also nur noch den Ausdruck $Q(\varepsilon)Q(\varepsilon')P(R)P(R')$ betrachten. Es ist zu zeigen, daß jeder Summand von $P(R)P(R')$ mindestens die B -Signatur des ersten Faktors hat. Dazu betrachte man eine Multiplikationsmatrix $X = (x_{i,j})$ aus dem Milnor-Algorithmus. Falls

$$x_{i,j} \equiv 0 \pmod{p^{\pi(i)-j}} \quad \text{für alle } i, j \geq 1 \quad (2.22)$$

gilt, so bleibt die B -Signatur unverändert: aus $r_i = \sum_j x_{i,j}p^j$ erhält man zunächst $r_i \equiv \sum_j x_{i,j}p^j \pmod{p^{\pi(i)}} \equiv x_{i,0} \pmod{p^{\pi(i)}}$, sodaß man für den Summanden $P(t_1, \dots, t_n)$ findet, daß $t_n = \sum_{i+j=n} x_{i,j} \equiv x_{n,0} \pmod{p^{\pi(n)}} \equiv r_n \pmod{p^{\pi(n)}}$. Eine geänderte B -Signatur ergibt sich also nur, wenn 2.22 für mindestens ein Paar $i, j \geq 1$ verletzt ist.

Wir nehmen dies also probeweise an. Man wähle dann i und j so, daß $x_{i,j}$ minimale p -adische Bewertung hat: es sei $x_{i,j} \not\equiv 0 \pmod{p^k}$ mit einem $k \leq \pi(i) - j$, aber $x_{i',j'} \equiv 0 \pmod{p^{k-1}}$ für alle i', j' . Daraus ergeben sich wie oben $r_n \equiv x_{n,0} \pmod{p^k}$ und $t_n \equiv r_n \pmod{p^{k-1}}$ für alle n . Daraus folgt zunächst, daß sich die Signaturen von $P(T)$ und $P(R)$ frühestens in der k ten Zeile unterscheiden können. Und da $x_{i,j} \not\equiv 0 \pmod{p^k}$, hat $P(T)$ dort auch eine echt größere Ziffer stehen als $P(R)$. \square

Bemerkung 2.3.3. Aus dem Beweis sehen wir, daß der signaturerhaltende Teil der Multiplikation

$$A^{[\varpi]} \subset A^{[\geq \varpi]} \xrightarrow{\cdot Q(\varepsilon)P(R)} A^{[\geq \varpi]} \rightarrow A^{[\geq \varpi]} / A^{[> \varpi]} \cong A^{[\varpi]}$$

direkt, dh. ohne den Umweg über die Bestimmung des vollen Produkts, berechnet werden kann: dazu lasse man bei der Benutzung der Kommutatorformel aus Lemma 1.1.14 einfach die Terme mit einem störenden Q_{s+t} weg, und beschränke sich bei der Milnor-Multiplikation darauf, nur solche Multiplikationsmatrizen $X = (x_{i,j})$ durchzugehen, die 2.22 erfüllen.

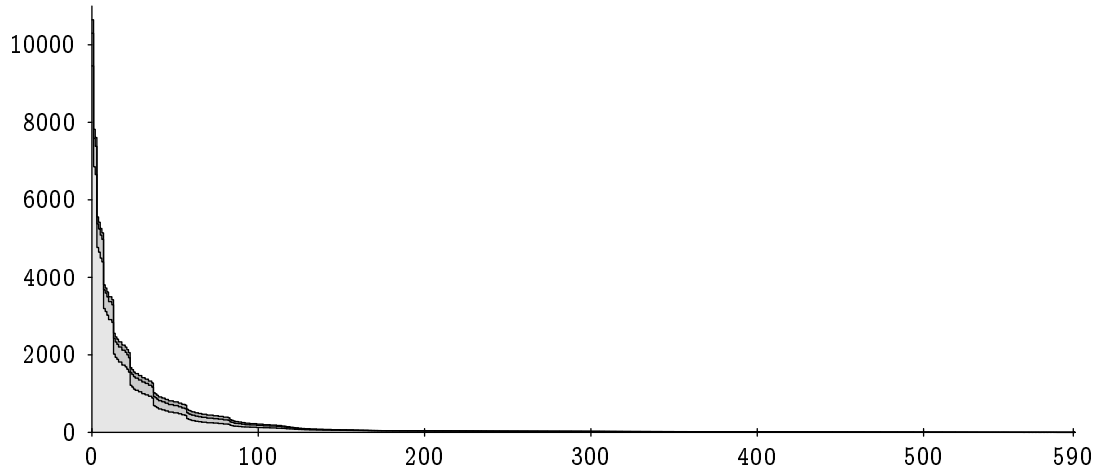


Abbildung 2.8: Zerlegung der Matrizen von $C_{35,245} \rightarrow C_{34,245} \rightarrow C_{33,245}$ für $p = 2$ bei Verwendung von 2.2.22. Hier wurde $B(\pi, \sigma)$ mit $\pi = (0, 0, 4, 3, 2, 1)$ und $\sigma = (0, 0, 0, 1, 1, 1, 1)$ benutzt. Alle Matrizen sind annähernd quadratisch. Vor der Zerlegung haben die Vektorräume Dimension ≈ 130000 . Bei der Zerlegung entstehen theoretisch $2^{14} = 16384$ kleinere Matrizen, aber nur 590 von diesen haben von Null verschiedene Abmessungen. Die Mehrzahl der Matrizen ist sehr klein, deshalb bleiben ein paar ziemlich große Matrizen mit Größe bis zu 10700 übrig. Diese sind jedoch dem 130000-dimensionalen Ausgangsproblem immer noch bei weitem vorzuziehen.

Die Multiplikation $\cdot : B \otimes A \rightarrow A$ induziert einen Isomorphismus $B \otimes_B A \xrightarrow{\cong} A$. Durch Einschränkung erhält man daraus

$$B^{[\geq \varpi]} \otimes_B A \xrightarrow{\cdot} A^{[\geq \varpi]} . \tag{2.23}$$

Lemma 2.3.4. *2.23 ist ein Isomorphismus und es ist $A^{[\geq \varpi]}/A^{> \varpi} \cong \Sigma^{|\varpi|} B \setminus \setminus A$.*

Beweis. Wir benutzen, daß A nach Satz 2.2.1 ein freier B -Linksmodul ist. Deswegen ist $- \otimes_B A$ ein exakter Funktor, sodaß in dem Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} B^{[> \varpi]} \otimes_B A & \xrightarrow{\cdot} & B^{[\geq \varpi]} \otimes_B A & \xrightarrow{\cdot} & \Sigma^{|\varpi|} \mathbb{F}_p \otimes_B A \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ A^{[> \varpi]} & \xrightarrow{\cdot} & A^{[\geq \varpi]} & \xrightarrow{\cdot} & A^{[\geq \varpi]}/A^{[> \varpi]} \end{array}$$

beide Zeilen exakt sind. 2.23 ist deswegen als Einschränkung von $B \otimes_B A \xrightarrow{\cong} A$ immer injektiv. Es muß also nur die Dimensionsgleichheit beider Seiten gezeigt werden. Diese ergibt sich durch Induktion, da man leicht nachprüfen kann, daß $A^{[\geq \varpi]}/A^{> \varpi} \cong A^{[\varpi]}$ und $\Sigma^{|\varpi|} \mathbb{F}_p \otimes_B A$ in jedem Grad dieselbe Dimension haben. Daß $A^{[\geq \varpi]}/A^{> \varpi}$ und $\Sigma^{|\varpi|} B \setminus \setminus A$ identifiziert werden können ist damit auch klar (nämlich aus der rechten Spalte). \square

Diese Aussagen über A übertragen sich sofort auf eine jede A -freie partielle Auflösung C_* : dazu setzen wir $C_*^{[\geq \varpi]} = A^{[\geq \varpi]} \cdot C_*$. Ist $G_* \subset C_*$ eine A -Basis so ist offenbar

$$C_*^{[\geq \varpi]} = \mathbb{F}_p \{ Q(\varepsilon)P(R)g \mid g \in G_*, \text{sig}_B(Q(\varepsilon)P(R)) \geq \varpi \}.$$

Passend dazu sei

$$C_*^{[\varpi]} = \mathbb{F}_p \{ Q(\varepsilon)P(R)g \mid g \in G_*, \text{sig}_B(Q(\varepsilon)P(R)) = \varpi \},$$

obwohl dieses genaugenommen auch von der gewählten Basis G_* abhängt. Wir erhalten somit die Signaturfiltrierung

$$C_* = C_*^{[\geq \varpi_0]} \supset C_*^{[\geq \varpi_1]} \supset \dots \supset C_*^{[\geq \varpi_K]} \supset 0. \quad (2.24)$$

Lemma 2.3.5. *Das Differential $d : C_* \rightarrow C_{*-1}$ respektiert diese Filtrierung.*

Beweis. Wegen $C_*^{[\geq \varpi]} = A^{[\geq \varpi]} \cdot C_*$, ist $d(C_*^{[\geq \varpi]}) = d(A^{[\geq \varpi]} \cdot C_*) \subset A^{[\geq \varpi]} \cdot d(C_*) \subset C_{*-1}^{[\geq \varpi]}$. \square

Wie in Lemma 2.3.4 können wir auch in 2.24 die sukzessiven Quotienten $C_*^{[\geq \varpi]} / C_*^{[> \varpi]}$ mit dimensionsverschobenen Kopien von $\mathbb{F}_p \otimes_B C_* \cong T_B C_*$ identifizieren. Daraus ergibt sich der

Satz 2.3.6. *Sei C_* eine in (S, T) -erweiterbare Auflösung und $B \subset A$ wie oben eine zulässige Unteralgebra mit einer Schritzerlegung. Sind die Voraussetzungen von Satz 2.2.15 oder 2.2.19/2.2.22 erfüllt, so sind*

$$C_*^{[\geq \varpi]} / C_*^{[> \varpi]} \xrightarrow{\sim} C_* / C_*^{[> \varpi]} \twoheadrightarrow C_* / C_*^{[\geq \varpi]} \quad (2.25)$$

für $\varpi \neq 0$ freundliche exakte Sequenzen.

Beweis. Es ist zu zeigen, daß die Homologie der Quotienten $C_*^{[\geq \varpi]} / C_*^{[> \varpi]} \cong T_B C_*$ in unserem Bigrad verschwindet. Diese Quotienten können nach Lemma 2.3.4 mit denen, die bei Benutzung von 2.18, ..., 2.20 auftreten, identifiziert werden. Daß deren Homologie verschwindet, ist aber gerade die Aussage von Satz 2.2.15 bzw. 2.2.19/2.2.22. \square

2.3.2 Die Implementierung

Aus Satz 2.3.6 erhält man nun ein Verfahren, das sich tatsächlich programmieren läßt. Dabei geht es uns um zwei eng verwandte Problemstellungen, die wir nacheinander diskutieren: die Berechnung der Auflösung und die Behandlung von Hebungsproblemen.

Sei zunächst C_* eine in (S, T) erweiterbare Auflösung. Man wähle ein $B \subset A$, auf das Satz 2.2.15 oder Satz 2.2.19/2.2.22 anwendbar sind, und eine Schritzerlegung, die der Annahme des vergangenen Abschnitts genügt. Zur Fortsetzung der partiellen Auflösung im Bigrad (S, T) gehe man so vor:

Algorithmus 2.3.7 (zur Erweiterung der Auflösung).

I Berechne die Homologie $H_{S,T}(C_*/C_*^{[>0]})$.

Hier geht es gerade um den Signatur-Null-Anteil

$$\begin{array}{ccccc} C_{S+1}/C_{S+1}^{[>\varpi_0]} & \xrightarrow{d} & C_S/C_S^{[>\varpi_0]} & \xrightarrow{d} & C_{S-1}/C_{S-1}^{[>\varpi_0]} \\ \cong \uparrow & & \cong \uparrow & & \cong \uparrow \\ C_{S+1}^{[\varpi_0]} & & C_S^{[\varpi_0]} & & C_{S-1}^{[\varpi_0]} \end{array}$$

Bei der Berechnung beachte man Bemerkung 2.3.3. Das Resultat dieser Rechnung sind Vektoren $n_1, \dots, n_r \in C_S$, die modulo $C_S^{[>0]}$ Zykel sind und eine Basis von $H_{S,T}(C_*/C_*^{[>0]})$ repräsentieren.

Gehe nun die Menge $\mathfrak{S}_B = \{\varpi_0 < \varpi_1 < \dots < \varpi_K\}$ der B -Signaturen der Reihe nach durch, beginnend mit ϖ_1 .

II $_{\varpi}$ Für ein solches $\varpi \in \mathfrak{S}_B$ schreibe man $d(n_i) = p_i + q_i$ wobei $p_i \in C_{S-1}^{[\varpi]}$ und $q_i \in C_{S-1}^{[>\varpi]}$.

Man berechne den signaturerhaltenden Teil

$$C_{S+1}^{[\varpi]} \subset C_{S+1}^{[\geq\varpi]} \xrightarrow{d} C_S^{[\geq\varpi]} \twoheadrightarrow C_S^{[\geq\varpi]}/C_S^{[>\varpi]} \cong C_S^{[\varpi]}$$

des Differential und hebe die p_i durch diese Matrix: das Ergebnis sind Korrekturterme $c_i \in C_{S+1}^{[\varpi]}$ mit

$$d(c_i) = p_i + \text{Terme größerer Signatur.}$$

Man setze sodann $n_i^{\text{neu}} = n_i - c_i$ und gehe zum nächsten ϖ über.

III Man führe schließlich neue Erzeugende g_i mit $dg_i = n_i$ in die Auflösung ein.

Begründung. Aufgrund der Freundlichkeit der 2.25 sind

$$H_{S,T}(C_*) = H_{S,T}(C_*/C_*^{[>\varpi_K]}) \rightarrow H_{S,T}(C_*/C_*^{[>\varpi_{K-1}]}) \rightarrow \dots \rightarrow H_{S,T}(C_*/C_*^{[>\varpi_0]})$$

sämtlich Isomorphismen. Die n_i aus Schritt I repräsentieren gerade eine Basis der letzten Gruppe; die Aufgabe der Korrekturschritte $II_{\varpi_1}, \dots, II_{\varpi_K}$ ist es gerade, die n_i zu Zykeln in C_* zu deformieren, ohne die Homologieklassen zu ändern.

Beim Eintritt in Schritt II_{ϖ} kann man induktiv $dn_i \in C_*^{[>\varpi]}$ annehmen: Wegen

$$0 = ddn_i = dp_i + dq_i \equiv dp_i \pmod{C_*^{[>\varpi]}}$$

ist p_i in $C_*^{[>\varpi]}/C_*^{[>\varpi]}$ ein Zykel; aufgrund der Freundlichkeit von 2.25 ist p_i dort also auch ein Rand, weswegen c_i existiert. Damit ist $dn_i^{\text{neu}} \equiv p_i - p_i = 0 \pmod{C_*^{[>\varpi]}}$, sodaß n_i^{neu} die Induktionsannahme für den nächsten Durchgang erfüllt.

Sind schließlich $II_{\varpi_1}, \dots, II_{\varpi_K}$ durchlaufen worden, so gilt $dn_i \in C_*^{[>\varpi_K]} = 0$. Die n_i sind somit Zykel und wir können – dem Standardalgorithmus folgend – neue Erzeugende g_i mit Rand n_i einführen. \square

Hebungsprobleme lassen sich ganz ähnlich angehen: Angenommen C_* sei bis (S, T) exakt und es sei ein Zykel $z \in C_{S, T}$ gegeben, für den ein Lift l aus C_{S+1} gesucht wird.

Algorithmus 2.3.8 (zur Lösung eines Hebungsproblems). Man setze anfangs $l := 0$, $r := z$. (r stehe für "Rest".) Gehe nun die Menge $\mathfrak{S}_B = \{\varpi_0 < \varpi_1 < \dots < \varpi_K\}$ der B -Signaturen der Reihe nach durch, beginnend mit ϖ_0 .

$\boxed{I_\varpi}$ Man schreibe $r = p + q$ mit $p \in C_S^{[\varpi]}$ und $q \in C_S^{[>\varpi]}$. Man berechne den signaturerhaltenden Teil $C_{S+1}^{[\varpi]} \rightarrow C_S^{[\geq\varpi]} \rightarrow C_S^{[\varpi]}$ des Differential und hebe p durch diese Matrix: als Resultat erhält man ein $c \in C_{S+1}$ mit

$$d(c) = p + \text{Terme größerer Signatur.}$$

Setze nun $l^{\text{neu}} = l + c$ und $r^{\text{neu}} = r - d(c)$ und gehe zur nächsten Signatur über.

Begründung. Man überlegt sich leicht, daß $E := dl + r$ bei den Durchgängen durch I_ϖ erhalten bleibt. Da zu anfang offenbar $E = z$ gilt, muß man sich nur überlegen, daß am Ende der Rest r verschwindet.

Tatsächlich gilt induktiv beim Eintritt in I_ϖ jeweils $r \in C_*^{[\geq\varpi]}$. Da außerdem $dr = 0$ gilt, ist r in $C_*^{[\geq\varpi]}/C_*^{[>\varpi]}$ ein Zykel. Aufgrund der Freundlichkeit von 2.25 ist r also modulo $C_*^{[>\varpi]}$ auch ein Rand, sodaß der gesuchte Korrekturterm c existiert.

Hat r schließlich sämtliche Schritte $I_{\varpi_0}, \dots, I_{\varpi_K}$ durchlaufen, so gilt $r \in C_*^{[>\varpi_K]} = 0$, wie gewünscht. \square

2.3.3 Zur Wahl des passenden B

Bleibt nur noch zu klären, wie man bei gegebenem S und T die am besten zum Bigrad (S, T) passende Unter algebra findet. Wir betrachten dazu die obere und die untere Variante zunächst getrennt. Sei also ein Bigrad (S, T) gegeben.

Obere Variante (Satz 2.2.22). Hier gibt es ein eindeutig bestimmtes maximales B , das die Voraussetzung von Satz 2.2.22 erfüllt und keine unnützen Kästchen enthält. Hierbei sollen die Kästchen als unnützlich gelten, deren Stellenwert größer ist als die betrachtete Dimension $T - S$. Da alle auftretenden Steenrod-Operationen in solchen Kästchen als Ziffer die Null stehen haben, kann unser Algorithmus dort nämlich keine Vereinfachung erbringen.

Das gesuchte $B = B(\pi, \sigma)$ ist explizit durch

$$\sigma(j) = \begin{cases} 2 & \text{falls } 2p^j - 1 \leq T - S \text{ und } T < (2p^j - 1) \cdot S, \\ 1 & \text{sonst,} \end{cases}$$

$$\pi(j) = \begin{cases} \min \{ k \mid p^k(2p^j - 2) \geq T - S \} & \text{falls } T < (2p^j - 2) \cdot S, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

gegeben. Die einfache Verifizierung, daß dieses B zulässig ist, überlassen wir dem Leser. Die Beziehungen $T < (2p^j - 1) \cdot S$ bzw. $T < (2p^j - 2) \cdot S$ stellen hierbei sicher, daß $T < \rho_B \cdot S$ gilt, sodaß Satz 2.2.22 anwendbar ist. Die Bedingungen, die sich auf

2 Ein Lemma

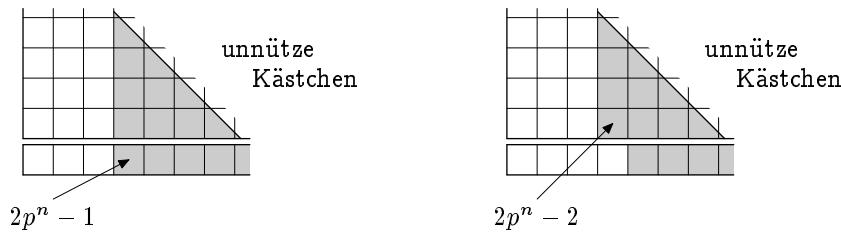
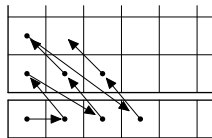


Abbildung 2.9: Bild zur Wahl von B bei Anwendung von Satz 2.2.19 oder 2.2.22. Gezeigt wird ein typisches maximales B . Das Minimum in der Definition von ρ_B wird jeweils in dem markierten Kästchen angenommen. Die unnützen Kästchen werden durch die Bedingung $2p^y(p^x - 1) > T - S$ charakterisiert, was näherungsweise der Halbebene $y + x > \log_p \frac{1}{2}(T - S)$ entspricht.

$T - S$ beziehen, dienen der Vermeidung unnützer Kästchen. Man vergleiche dazu auch Abbildung 2.9. Dort erkennt man, daß ρ_B hier immer von der Form $2p^j - 1$ oder $2p^j - 2$ ist. In Abbildung 2.7 wurden die zugehörigen Bereiche $T < (2p^j - 1) \cdot S$ und $T < (2p^j - 2) \cdot S$ für $p = 2$ graphisch dargestellt.

Untere Variante (Satz 2.2.15). Hier sind in manchen Bigraden unterschiedliche maximale B möglich. So sind zB. für $p = 2$ und $(S, T) = (1, 19)$ sowohl $B = B(1, 1, 1)$ mit $\tau_B = 11$, $d_B = 7$ wie auch $B = B(2, 1)$ mit $\tau_B = 6$, $d_B = 3$ beide unter der Nebenbedingung $T - \tau_B > S \cdot d_B$ nicht erweiterbar.

Man sollte sich hier von der Philosophie leiten lassen, möglichst viele Kästchen mit kleinem Stellenwert zu benutzen: zum einen verteilen sich so die auftretenden Steenrod-Operationen gleichmäßiger; zum anderen vermeidet man so eine Vergrößerung der inversen Steigung d_B , was den erlaubten Bereich $T - \tau_B > S \cdot d_B$ schnell verkleinern würde. In der Praxis hat es sich bewährt die Kästchen nach folgendem Schema zu allozieren:



Für $p = 2$ ergibt sich so zum Beispiel die Folge $B(1), B(1, 1), B(2, 1), B(2, 1, 1), B(2, 2, 1), B(3, 2, 1), B(3, 2, 1, 1)$, usw. Abbildung 2.6 zeigt für diese B die Bereiche, in denen sie anwendbar sind.

Aus dem Vergleich der Abbildungen 2.6 und 2.7 sieht man, daß die obere Variante eher im oberen Teil des Quadranten, die untere dagegen eher im Unteren, anzuwenden ist. Welche bei gegebenem (S, T) ratsam ist, entscheidet man am besten durch Ausprobieren: man bestimme dazu nach dem gerade geschilderten Verfahren das optimale obere bzw. untere B . Zu diesen errechne man jeweils die Dimensionen der Signatur-Null-Teile $C_*^{[0]}$. Sodann nehme man dasjenige B , welches hierfür den kleineren Wert liefert.

Wir wollen zum Schluß noch bemerken, daß somit zwar die Wahl von B als einigermaßen kanonisch gelten kann, dasselbe aber nicht für die zusätzlich benötigte Schrittzerlegung gilt. Es scheint aber, daß deren Wahl das Laufverhalten des Algorithmus nicht erkennbar beeinflusst.

2.4 Resultate, Geschichte und Statistiken

Das rechnerische Hauptresultat dieser Arbeit ist die Berechnung einer minimalen Auflösung der Steenrod-Algebra zur Primzahl 2. Mithilfe der grade geschilderten Theorie ist es möglich geworden, diese Auflösung im Bereich $t - s \leq 210$ explizit anzugeben. $\text{Ext}_A^{s,t}(\mathbb{F}_2, \mathbb{F}_2)$ ist also jetzt für $t - s \leq 210$ bekannt (siehe Abbildung 2.10).

Das Problem der Berechnung von Ext hat eine lange Geschichte. Als Adams 1958 seine Spektralreihe definierte, war ihm sicherlich ein Anfangsstück schon bekannt. Der Durchbruch kam aber erst mit May's Dissertation von 1965 ([30], siehe auch [39], Ch. 3.2), in der eine Spektralreihe mit explizitem E_2 -Term zur Berechnung von Ext angegeben wurde. Mithilfe dieser Spektralreihe gelang es dann Tangora ([44]) in 1970, den Ausgangsterm der Adams-Spektralreihe bis zur Dimension 70 zu bestimmen.

Computerunterstützte Berechnungen sind schon sehr früh, nämlich in den 1960er Jahren, von Liulevicius versucht worden [25]. Nennenswerte Ergebnisse lieferten aber erst die Arbeiten von Bruner seit Mitte der 1980er Jahre. Ihm gelang es in [12] mittels des Standardverfahrens, $\text{Ext}_A^{s,t}$ bis zu $t \leq 116$ zu berechnen. Später hat er diese Rechnungen bis zu $t \leq 140$ fortgesetzt [11]. Mit einem anderen Ansatz, nämlich der Λ -Algebra von Bousfield, Curtis, Kan, Quillen, Rector und Schlesinger (siehe [8]), hat Tangora in [45] die nicht-stabile Variante $\text{UnExt}_A^s(\Sigma^{n+t} \mathbb{F}_p, \Sigma^n \mathbb{F}_p)$ für $t \leq 80$ untersucht.

Unsere Rechnungen haben wir auf einem 300MHz AMD-K6-2 Rechner unter GNU/Linux durchgeführt. Die nötigen Programme sind in C geschrieben worden und im Prinzip portabel. In den Abbildungen 2.12, ..., 2.15 sind wichtige Kenngrößen der Rechnung graphisch dargestellt. Die berechnete Auflösung belegt ca. 1.7 Giga-byte in halb-komprimierter Form. In hohen Dimensionen brauchte das Programm mehr als 200MB RAM-Speicher, was aber glücklicherweise mittlerweile bezahlbar geworden ist. Die Berechnung dauerte insgesamt 108 Tage und erreichte Dimension 210. Die letzten 10 Dimensionen sind dabei Intel's Einführung der Multimedia Instruktionen im PC-Bereich [21] gedankt: mithilfe dieser MMX-Instruktionen lassen sich Milnorsche Basiselemente – zumindest für $p = 2$ und bis zur Dimension 255 – sehr effizient handhaben. Die Benutzung dieser Instruktionen hat die benötigte Rechenzeit annähernd halbiert. Die Ergebnisse unserer Rechnungen kann man zur Zeit unter [38] abrufen. Allerdings wird sich diese Adresse wohl in absehbarer Zukunft ändern.

Wir bemerken noch, daß man auch die Kohomologie von Unter-Hopfalgebren der Steenrod-Algebra mit den Programmen berechnen kann. Abbildung 2.11 zeigt zB. die Kohomologie der Unter algebra $B(3, 2, 1)$, die auch unter der Bezeichnung $A(2)$ bekannt ist. $\text{Ext}_{A(2)}^{*,*}(\mathbb{F}_2, \mathbb{F}_2)$ ist allerdings schon seit langem bekannt: es wurde 1967 von Shimada und Iwai in [41] vollständig berechnet. In jüngster Zeit ist $\text{Ext}_{A(2)}$ im Zusammenhang mit der Theorie der topologischen Modulformen [20] wichtig geworden.

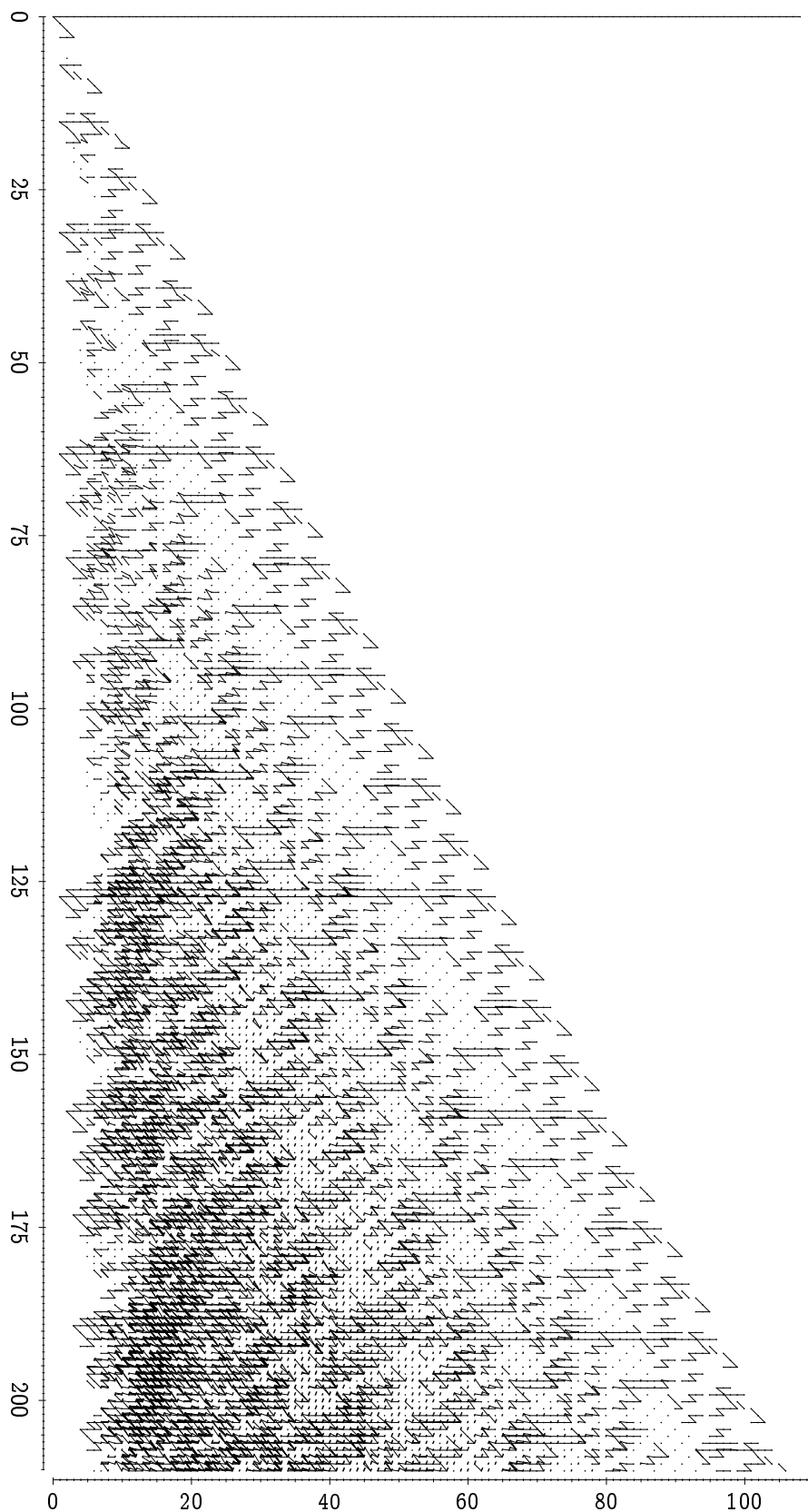


Abbildung 2.10: Panorama-Blick auf $\text{Ext}_A^{*,*}(\mathbb{F}_2, \mathbb{F}_2)$ bis zur Dimension 210.

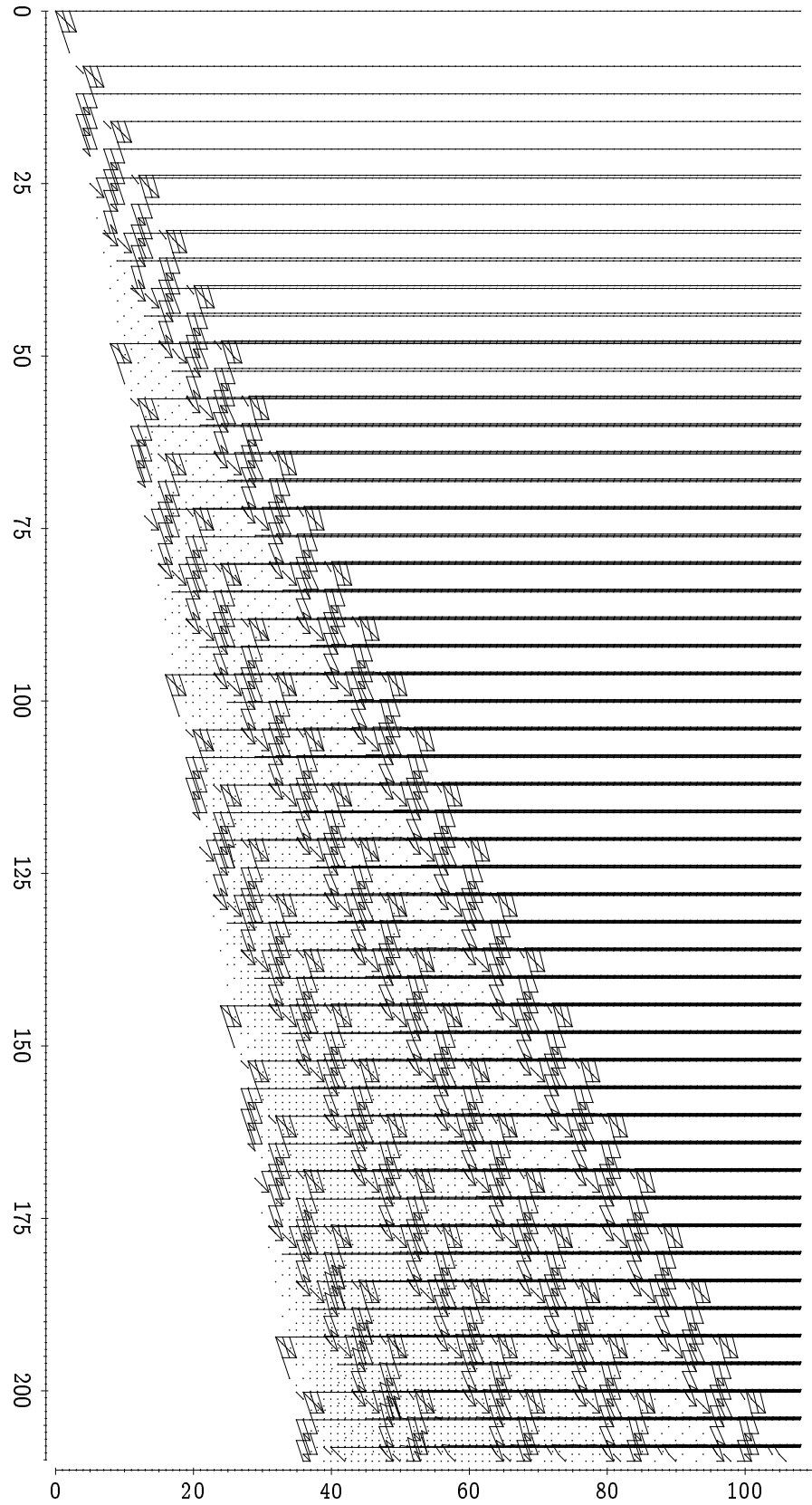


Abbildung 2.11: Panorama-Blick auf $\text{Ext}_{A(2)}^{*,*}(\mathbb{F}_2, \mathbb{F}_2)$ bis zur Dimension 210.

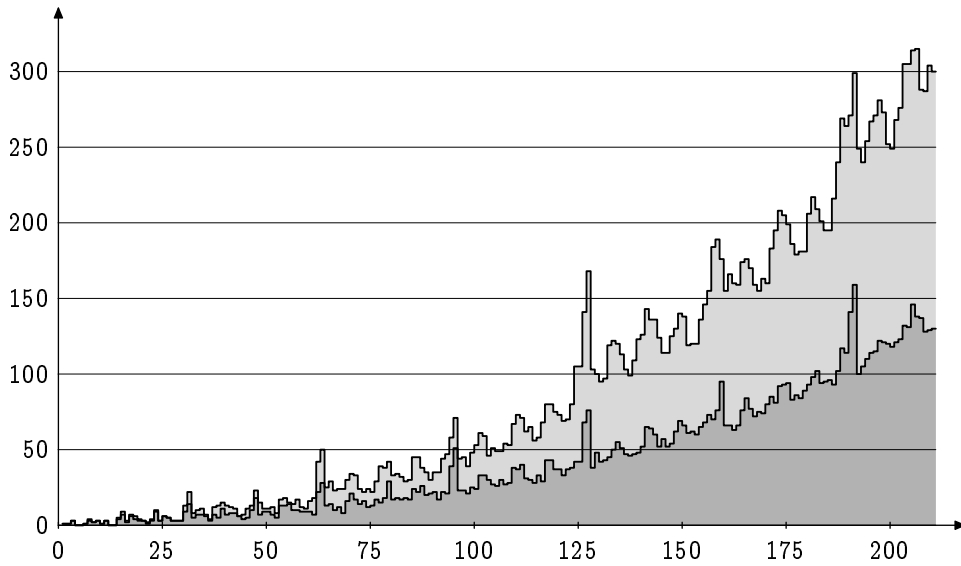


Abbildung 2.12: Dimension von $\text{Ext}_A^{s,t}(\mathbb{F}_2, \mathbb{F}_2)$ für $n = t - s \leq 210$. Insgesamt gibt es 19581 Erzeugende. Der dunklere Bereich zeigt die Zahl der Erzeugenden im Bereich $5s \geq n$.

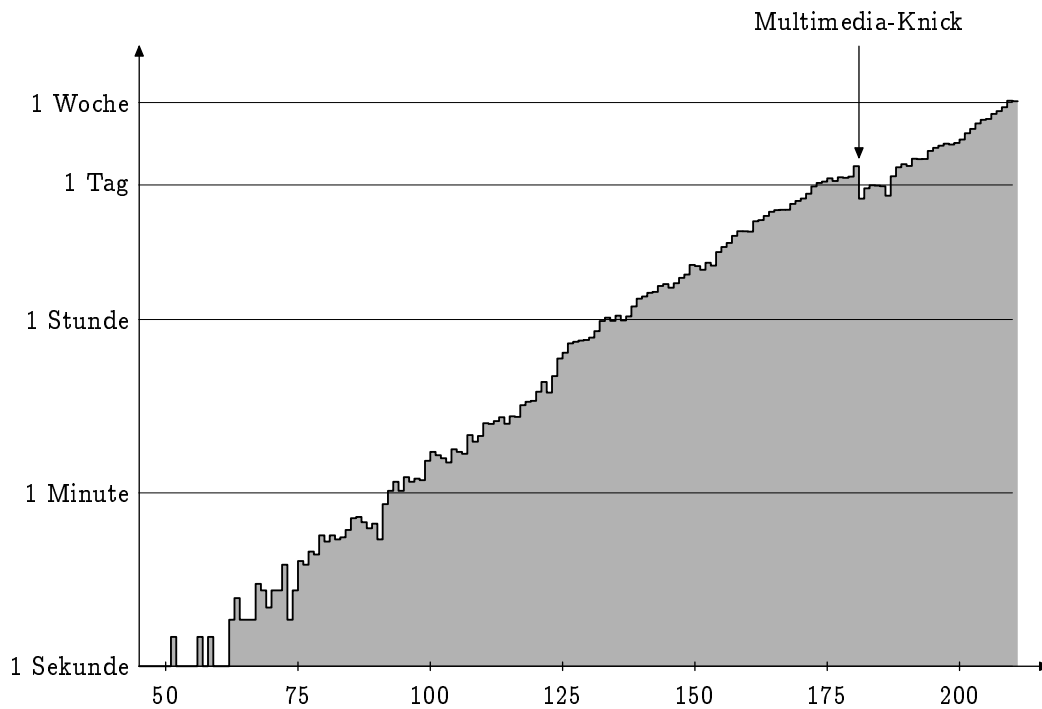


Abbildung 2.13: Rechenzeit für die Berechnung der minimalen Auflösung für $p = 2$. Die Gesamtzeit betrug 108 Tage und 18 Stunden auf einem 300MHz AMD K6-2. Die Zeit pro Dimension verdoppelt sich alle 10 Dimensionen. In Dimension 181 kann man sehr schön den “Multimedia-Knick” erkennen: dort wurde die Multiplikationsroutine in Assembler umgeschrieben, unter Benutzung der MMX^(TM)-Instruktionen; die Rechenzeit halbierte sich daraufhin.

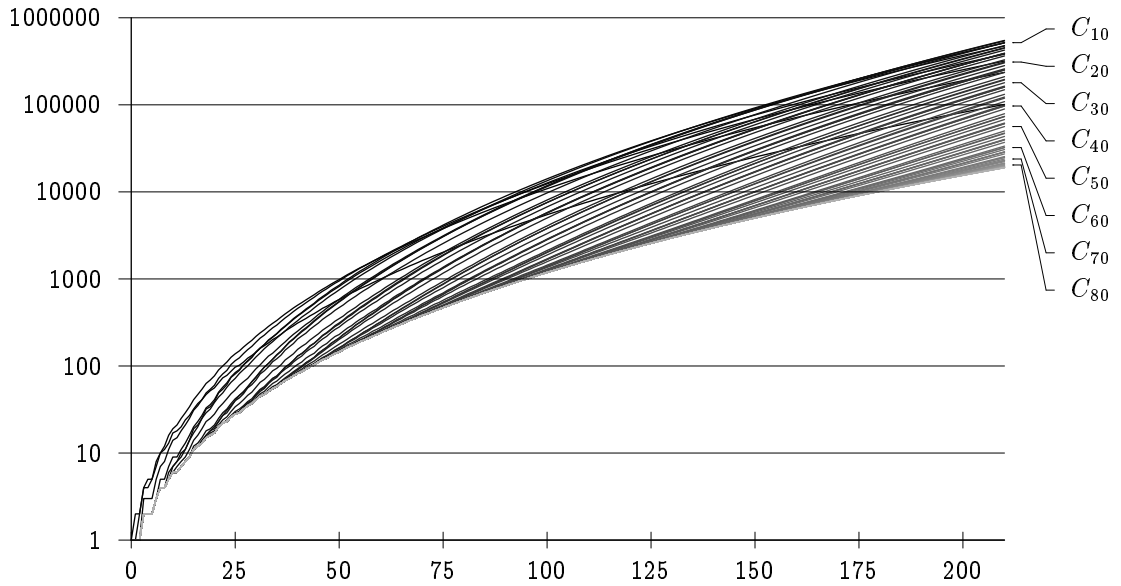


Abbildung 2.14: Wachstum der minimalen Auflösung für $p = 2$. Gezeigt wird $\dim_{\mathbb{F}_2} C_{s,s+n}$ in Abhängigkeit von $n \leq 210$. C_1 entspricht der etwas dunkleren Linie in der Mitte, die ein noch moderates Wachstum zeigt. Die Dimensionen werden dann bis circa C_{11} größer, bevor sie für $s \rightarrow \infty$ auf die Größe der Steenrod-Algebra selber zurückfallen. $C_{11,221}$ hat übrigens Dimension ≥ 500000 .

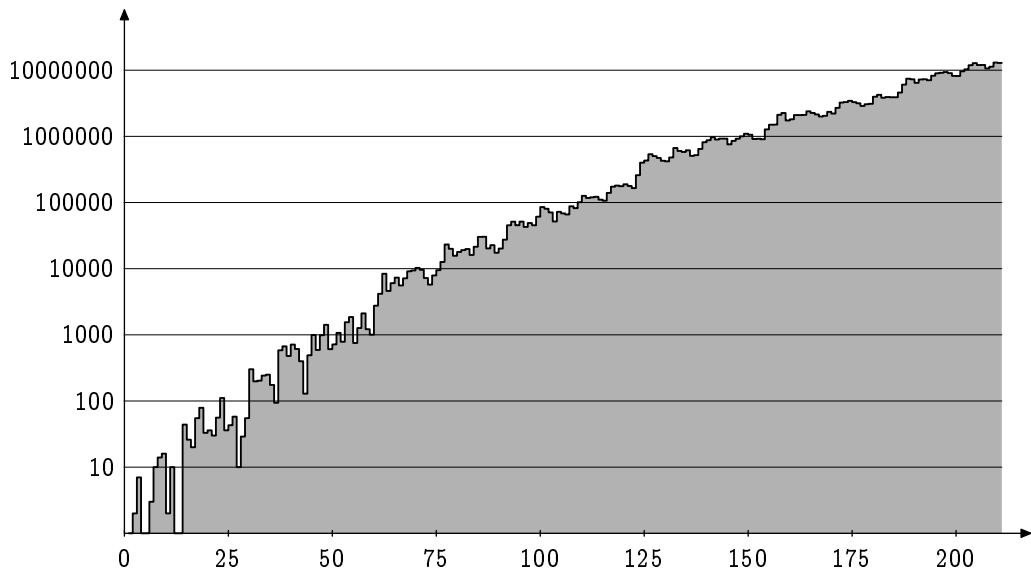


Abbildung 2.15: Größe der Beschreibung der minimalen Auflösung für $p = 2$. Gezeigt wird zu jeder Dimension $n \leq 210$ die Gesamtzahl der Milnor-Basiselemente in den Differentialen $d(g)$ für die A -Erzeugenden $g \in C_{s,s+n}$. Setzte man also Abbildung 1.7 in höhere Dimensionen fort, so wäre dies die Anzahl der Summanden, die in der rechten Spalte stehen müßten. Insgesamt stünden dort 342223927 Summanden.

3 Weitere Anwendungen

Die über 100 Tage Rechenzeit, die in die Berechnung der minimalen Auflö- sung investiert worden sind, und die immense Datenmenge, die dabei angefallen ist, erscheinen im Vergleich zur bisherigen Ausbeute noch unverhältnismäßig. Wir zeigen aber in diesem Kapitel, daß man aus diesen Daten mit relativ geringem Aufwand viele wei- tere interessante Resultate gewinnen kann.

3.1 $\text{Ext}_A(M, N)$ für kleine M und N

Lemma 1.3.2 zufolge kann man $\text{Ext}_A^{s,t}(M, N)$ für beliebige A -Moduln M und N aus einer Auflö- sung des trivialen Moduls k berechnen. Mit gewissen Einschränkungen gilt dies auch für partielle Auflösungen. Für einen A -Modul M seien $d_M, D_M \in \mathbb{Z} \cup \{\pm\infty\}$ durch

$$\begin{aligned} d_M &= \max\{d \mid M_t = 0 \text{ für } t < d\}, \\ D_M &= \min\{D \mid M_t = 0 \text{ für } t > D\} \end{aligned}$$

definiert.

Lemma 3.1.1. *Sei M ein A -Modul und C_* eine partielle Auflö- sung von k über A bis (S, T) . Dann ist $C_* \wedge M$ eine partielle Auflö- sung von M bis $(S, T + d_M)$.*

Beweis. Wegen Lemma 1.1.5 ist $C_* \wedge M$ jedenfalls ein Komplex freier A -Moduln. Aus der Künneth-Formel

$$H_{s,t}(C_* \wedge M) = (H_{s,*}(C_*) \wedge M)_t = \bigoplus_{t'+t''=t} H_{s,t'}(C_*) \otimes M_{t''}$$

folgt zunächst $H_0(C_* \wedge M) = H_0(C_*) \wedge M = k \wedge M \cong M$. Da $H_{s,t}(C_*) = 0$ für $0 < s \leq S$ und $t \leq T$, folgt außerdem $H_{s,t}(C_* \wedge M) = 0$ für $0 < s \leq S$ und $t \leq T + d_M$, denn ein nichttriviales $M_{t''}$ hat immer $t'' \geq d_M$. Also ist C_* eine partielle Auflö- sung von M bis $(S, T + d_m)$. \square

Korollar 3.1.2. *Ist C_* eine partielle Auflö- sung von k über A bis (S, T) , so ist für $s < S$*

$$\begin{aligned} \text{Ext}_A^{s,t}(M, N) &= H_{s,t}(\text{Hom}_A(C_* \wedge M, N)) && \text{für } t \leq T + d_M - D_N, \\ \text{Tor}_{s,t}^A(M, N) &= H_{s,t}(M \otimes_A (C_* \wedge N)) && \text{für } t \leq T + d_M + d_N. \end{aligned}$$

Falls C_ sogar minimal ist, kann man hier $s < S$ durch $s \leq S$ ersetzen.*

3 Weitere Anwendungen

Beweis. Man kann C_* zu einer vollständigen Auflösung \tilde{C}_* fortsetzen, und zwar so, daß man eine injektive Vergleichsabbildung $\phi_* : C_* \rightarrow \tilde{C}_*$ hat, die im Bereich $R_{S,T}$ ein Isomorphismus ist. Dann hat man kurze exakte Sequenzen

$$\begin{aligned} \text{Hom}_A(\text{coker } \phi_* \wedge M, N) &\rightarrow \text{Hom}_A(\tilde{C}_* \wedge M, N) \rightarrow \text{Hom}_A(C_* \wedge M, N), \\ M \otimes_A (C_* \wedge N) &\rightarrow M \otimes_A (\tilde{C}_* \wedge N) \rightarrow M \otimes_A (\text{coker } \phi_* \wedge N). \end{aligned}$$

Da $\text{coker } \phi_*$ auf $R_{S,T}$ null ist, verschwindet

$$\begin{aligned} \text{Hom}_A^{s,t}(\text{coker } \phi_* \wedge M, N) &\quad \text{für } (s, t) \in R_{S, T+d_M-d_N}, \\ (M \otimes_A (\text{coker } \phi_* \wedge N))_{s,t} &\quad \text{für } (s, t) \in R_{S, T+d_M+d_N}. \end{aligned}$$

Die Behauptung folgt damit aus den zugehörigen langen exakten Homologiesequenzen. Die Verschärfung im Fall eines minimalen C_* überlassen wir dem Leser als Übungsaufgabe. \square

Falls M und N endliche A -Moduln von kleiner Dimension sind, so ist Lemma 3.1.1 auch ein sehr effizientes Verfahren zur Berechnung von $\text{Ext}_A^{s,t}(M, N)$. Dies wollen wir im folgenden genauer ausführen. Sei $G_s \subset C_s$ für jedes s eine A -Basis. In der Praxis ist C_* gerade wie in Abbildung 1.7 durch eine solche Basis G_* zusammen mit einer Tabelle der Differentiale $dg \in C_{s-1}$ für $g \in G_s$ gegeben. Seien außerdem $\{m_1, \dots, m_p\} \subset M$ und $\{n_1, \dots, n_q\} \subset N$ Vektorraumbasen. Nach Lemma 1.1.5 ist $C_s \wedge M$ über A frei mit Basis $\{g \wedge m_i \mid g \in G_s, 1 \leq i \leq p\}$. Definiert man $\phi_{g,i}^j : C_s \wedge M \rightarrow N$ als A -lineare Fortsetzung von $\phi_{g,i}^j(g' \wedge m_{i'}) = \delta_{g,g'} \delta_{i,i'} n_j$, so ist also

$$\text{Hom}_A(C_s \wedge M, N) = k\{\phi_{g,i}^j \mid g \in G_s, 1 \leq i \leq p, 1 \leq j \leq q\}.$$

Nun muß man nur noch das Differential $(d_s \wedge \text{id})^* : \text{Hom}_A(C_{s-1} \wedge M, N) \rightarrow \text{Hom}_A(C_s \wedge M, N)$ in dieser Basis als Matrix darstellen. Es ist also $\phi_{g',i'}^{j'}(dg \wedge m_i)$ für diverse g, g', i, i', j' zu berechnen. Schreibt man $dg' = \sum_{g''} a_{g',g''} g''$ mit $a_{g',g''} \in A$, so muß man Ausdrücke der Form $\phi_{g',i'}^{j'}(ag \wedge m)$ auswerten. Dazu benutzt man die Beziehung

$$(ag) \wedge m = \sum a'(g \wedge \chi(a'')m),$$

die im Beweis von Lemma 1.1.5 angegeben wurde. Diese leitet sich aus

$$\begin{aligned} \sum a'(g \wedge \chi(a'')m) &= \sum (a'g) \wedge a''\chi(a''')m \\ &= \sum (a'g) \wedge \varepsilon(a'')m \\ &= (ag) \wedge m \end{aligned}$$

her. Man erhält somit

$$\phi_{g,i}^j((ag) \wedge m_{i'}) = \sum \phi_{g,i}^j(a'(g \wedge \chi(a'')m_i)) = \sum a' \phi_{g,i}^j(g \wedge \chi(a'')m_i),$$

woraus die Matrixdarstellung abgelesen werden kann.

Bemerkung 3.1.3. Ein Vorzug dieser Methode liegt darin, daß die Zuordnung $M \mapsto C_* \wedge M$ ein Funktor ist. Ist $\phi : M \rightarrow M'$ eine A -lineare Abbildung, so ist $\text{id} \wedge \phi : C_* \wedge M \rightarrow C_* \wedge M'$ eine Kettenabbildung, die ϕ hebt. Also kann man bei gegebenem $\psi : N' \rightarrow N$ die induzierte Abbildung

$$\psi_* \phi^* : \text{Ext}_A^{s,t}(M', N') \rightarrow \text{Ext}_A^{s,t}(M, N)$$

einfach aus

$$\psi_* \phi^* : \text{Hom}_A^{s,t}(C_* \wedge M', N') \rightarrow \text{Hom}_A^{s,t}(C_* \wedge M, N)$$

berechnen.

Bemerkung 3.1.4. Hat M eine zusätzliche Struktur, zB. eine Filtrierung, so wird diese auf $C_* \wedge M$ vererbt. Beispielsweise hat jeder A -Modul die *Skelettfiltrierung*

$$\dots \subset M^{\geq k-1} \subset M^{\geq k} \subset M^{\geq k+1} \subset \dots$$

mit

$$M^{\geq k} = \{ m \in M : |m| \geq k \}.$$

Die sukzessiven Quotienten $M^{\geq k}/M^{\geq k+1} \cong M_k$ haben die triviale A -Modulstruktur, sodaß sie zu einer direkten Summe von trivialen Moduln $\Sigma^k k$ isomorph sind. Man erhält somit eine Spektralreihe vom Atiyah-Hirzebruch-Typ

$$E_1^{s,t} = \bigoplus_{t'+t''=t} \text{Tor}_{s,t'}^A(k, k) \otimes M_{t''} \Rightarrow \text{Tor}_{s,t}^A(M, k),$$

die in der Literatur häufig zur Berechnung eingesetzt wird. Die grade geschilderte Methode ist mit dieser eng verwandt. Da G_s mit einer k -Basis von $\text{Tor}_{s,*}^A(k, k)$ identifiziert werden kann, ist ja

$$\text{Hom}_A(C_s \wedge M, k) \cong \text{Hom}_k(\text{Tor}_{s,*}^A(k, k) \otimes M, k).$$

Also beginnen beide Verfahren mit derselben oberen Schranke.

3.1.1 Beispiele

Zur Illustration der Effizienz dieses Verfahrens geben wir in den Abbildungen 3.1, ..., 3.6 für $p = 2$ ein paar Beispiele an. Jede dieser Kohomologie-Karten konnte innerhalb weniger Stunden erstellt werden. Würde man dagegen zur Berechnung von $\text{Ext}_A^{s,t}(M, k)$ erst eine jeweils neue Auflösung von M berechnen, so müßte man für jedes Bild wiederum ca. 100 Tage veranschlagen. Die Moduln, deren Kohomologie in den Abbildungen gezeigt wird, sind folgende:

Der Fragezeichenkomplex F (englisch: *questionmark-complex*, Abbildung 3.2 auf Seite 67): Als Vektorraum ist

$$F_t = \begin{cases} \mathbb{F}_2 & t = 0, 1, 3, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

3 Weitere Anwendungen

Seien $b \in F_0$, $m \in F_1$ und $t \in F_3$ die von Null verschiedenen Elemente. Damit sei $\text{Sq}^1 b = m$, $\text{Sq}^2 m = t$. F spielt in der K -lokalen Homotopietheorie eine besondere Rolle, siehe [7], 10.7. Der Name erklärt sich aus der gebräuchlichen bildlichen Darstellung



Mitchells $A(n)$ -freie A -Moduln für $n = 0, 1, 2$. Dazu sei $A(n) \subset A$ die Hopf-Unteralgebra $B(n+1, n, \dots, 2, 1)$. Mitchell hat in [36] gezeigt, daß man für jedes n die $A(n)$ -Operation auf $A(n)$ zu einer A -Operation fortsetzen kann. Mit anderen Worten findet man A -Moduln A_n , sodaß A_n über $A(n)$ zu $A(n)$ isomorph ist. Es gibt genau eine Wahl für A_{-1} und A_0 , 4 Wahlen für A_1 und 1600 für A_2 . Für jeweils einen solchen Modul wird in den Abbildungen 3.1, 3.3 und 3.4 die Kohomologie gezeigt.

Die A_n sind für $n \leq 2$ als Kohomologie von Spektren realisierbar: man hat $H^*(S^0) = A_{-1}$, $H^*(\Sigma^{-1} \mathbb{R} P^2) = A_0$. Für die Realisierbarkeit von A_1 und A_2 kann man den folgenden Satz benutzen:

Satz 3.1.5. *Sei M ein endlicher A -Modul, der über $A(0)$ frei ist. Falls $\text{Ext}_A^{3,t}(M, \mathbb{F}_p)$ für $t \leq D_M + 1$ verschwindet, so gibt es ein Spektrum X mit $H^*(X) = M$.*

Beweis. Siehe [29], Korollar 23 b), Ch. 16, Seite 271. □

Für die von uns betrachteten Versionen von A_1 und A_2 kann man also folgendermaßen schließen: Aus Abbildung 3.3 sieht man, daß $\text{Ext}_A^{3,t}(A_1, \mathbb{F}_2)$ für $t \leq 14$ Null ist. Da $D_{A_1} = 6$, ist A_1 also realisierbar (siehe auch [29], Ch 16., oder [16].) Genauso sieht man aus Abbildung 3.4, daß $\text{Ext}_A^{3,t}(A_2, \mathbb{F}_2) = 0$ für $t \leq 30$. Wegen $D_{A_2} = 23$, ist also auch unser A_2 realisierbar. Wir vermuten, daß sich jedes A_2 auf diese Weise realisieren läßt, haben dies aber noch nicht nachgerechnet. Über die Realisierbarkeit der A_n für $n \geq 3$ ist nichts bekannt.

Wie Mitchell in [36] (Bemerkung auf Seite 238-239) festgestellt hat, kann man eine Version von A_1 aus der kompakten Lie-Gruppe G_2 konstruieren. Dazu sei $C_2^3 \subset G_2$ ein maximaler 2-Torus mit Weyl-Gruppe $G := \text{GL}_3(\mathbb{F}_2)$; dieser läßt sich so wählen, daß $H^*(BG_2) \rightarrow H^*(BC_2^3)$ mit der Inklusion der G -Invarianten

$$\mathbb{F}_2[x_1, x_2, x_3]^G \subset \mathbb{F}_2[x_1, x_2, x_3] \cong H^*(\mathbb{R} P^\infty \times \mathbb{R} P^\infty \times \mathbb{R} P^\infty) = H^*(BC_2^3)$$

identifiziert werden kann (siehe [4], Seite 114). Da G auf G_2/C_2^3 operiert, kann man aus dem Steinberg-Idempotent $e_{\text{St}} \in \mathbb{Z}_{(2)} G$ eine Abbildung $\Sigma^\infty G_2/C_2^3 \rightarrow \Sigma^\infty G_2/C_2^3$ konstruieren. Deren Bild – worunter man das Teleskop

$$e_{\text{St}} \Sigma^\infty G_2/C_2^3 := \text{hocolim} \left(\Sigma^\infty G_2/C_2^3 \xrightarrow{e_{\text{St}}} \Sigma^\infty G_2/C_2^3 \xrightarrow{e_{\text{St}}} \Sigma^\infty G_2/C_2^3 \xrightarrow{e_{\text{St}}} \dots \right)$$

versteht – realisiert dann eine Version von A_1 .

Dwyer und Wilkerson haben in [17] eine sogenannte 2-kompakte Gruppe $DI(4)$ konstruiert. Diese hat einen 2-Torus $C_2^4 \subset DI(4)$ mit Weyl-Gruppe $\text{GL}_4(\mathbb{F}_2)$. Dieselbe Argumentation wie oben sollte dann zeigen, daß $e_{\text{St}} \Sigma^\infty DI(4)/C_2^4$ eine Version

von A_2 realisiert. Der Autor weiß aber zuwenig über p -kompakte Gruppen, als daß er sich hierfür verbürgen könnte.

Wir bemerken noch, daß die A_n für den chromatischen Zugang zur Homotopie-theorie von Bedeutung sind (siehe [40]).

$B_n = \frac{1}{2}A_n$ für $n = 1, 2$. [36] zufolge, ist $B_n := A_n/Q_n A_n$ für geeignete A_n ein A -Modul. Aufgrund der kurzen exakten Sequenzen $\Sigma^{|Q_n|} B_n \rightarrow A_n \rightarrow B_n$ bezeichnet man B_n manchmal als $\frac{1}{2}A_n$. Die Abbildungen 3.5 und 3.6 zeigen die Kohomologie der $\Sigma^{|Q_1|} B_1$ und $\Sigma^{|Q_2|} B_2$, die zu den oben betrachteten A_1 und A_2 gehören. Man sieht, daß $\text{Ext}_A^{3,t}(B_1, \mathbb{F}_2) = 0$ für $t \leq 9$ und $\text{Ext}_A^{3,t}(B_2, \mathbb{F}_2) = 0$ für $t \leq 20$. Wegen $D_{B_1} = 3$ und $D_{B_2} = 16$, sind also auch B_1 und B_2 realisierbar.

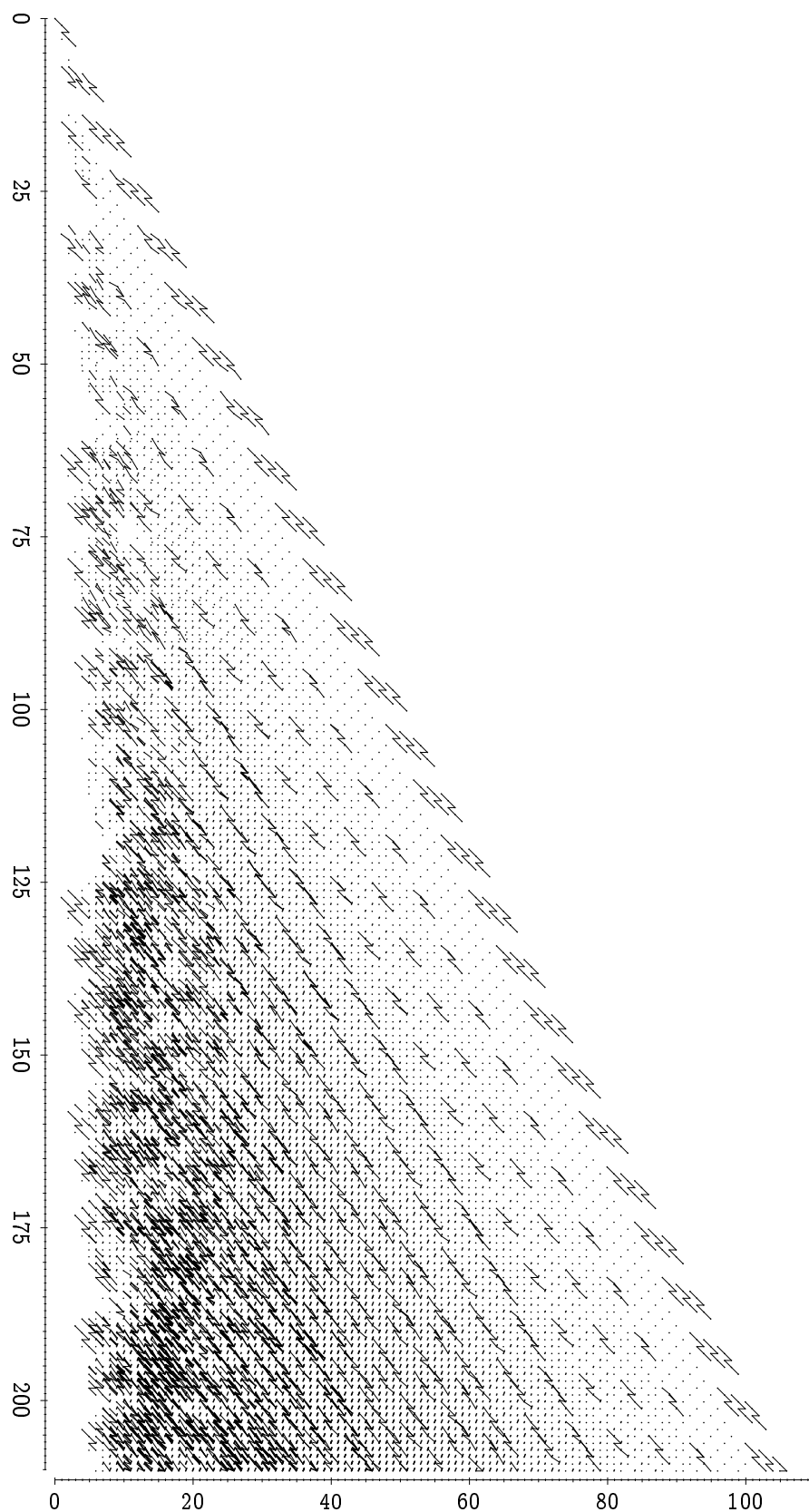


Abbildung 3.1: $\text{Ext}_A^{**}(A_0, \mathbb{F}_2)$

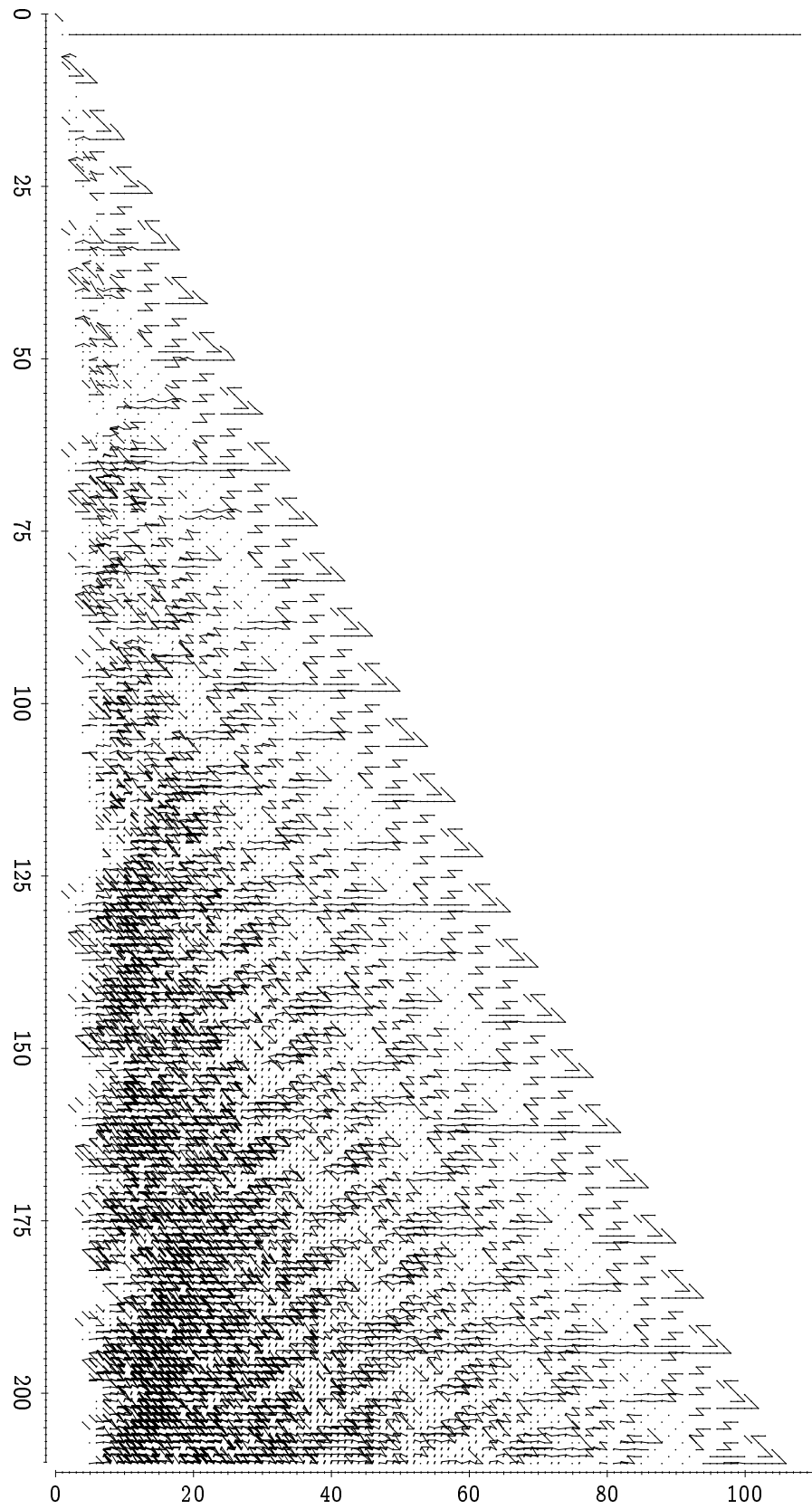


Abbildung 3.2: $\text{Ext}_A^{**}(F, \mathbb{F}_2)$

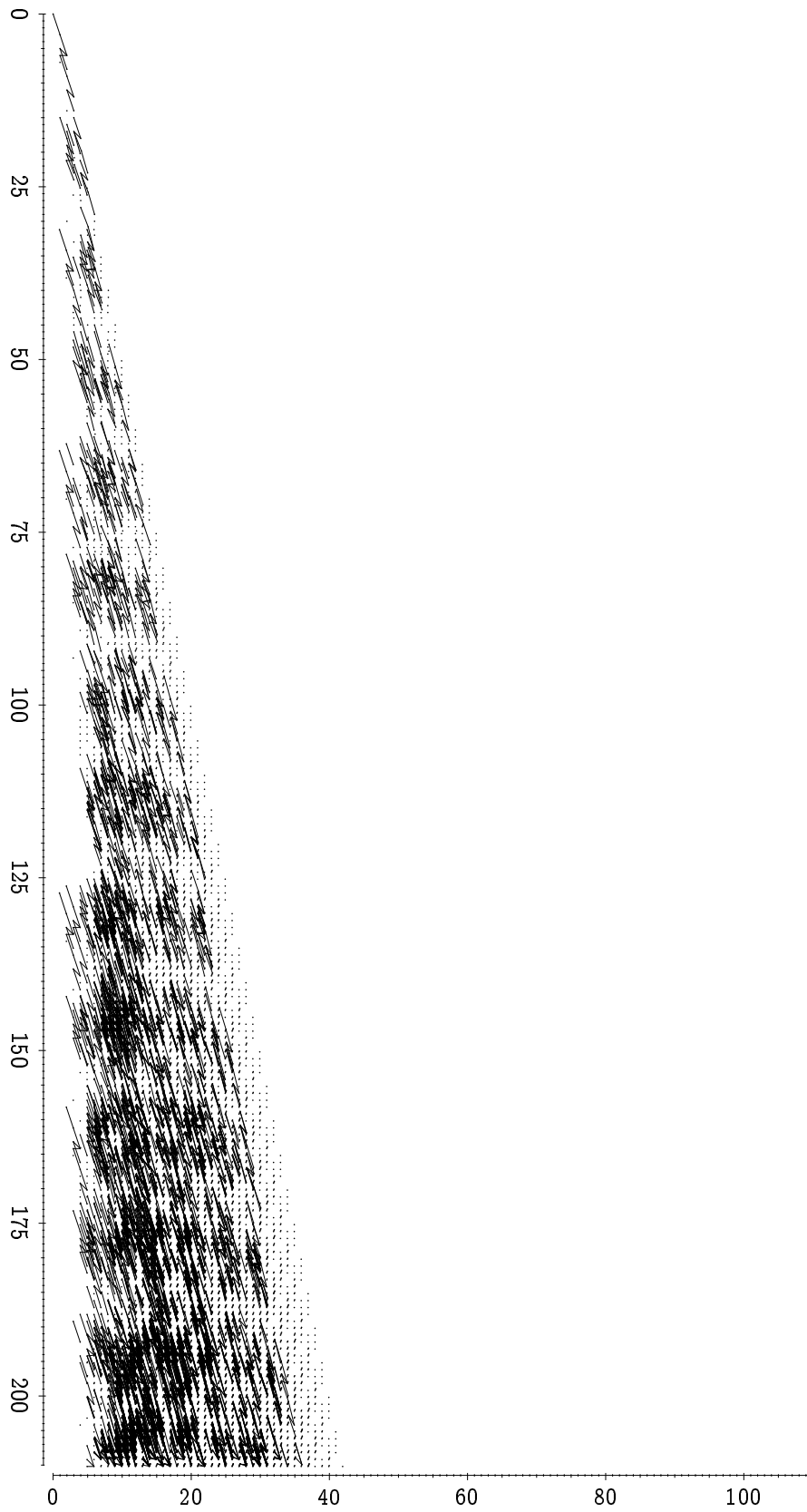


Abbildung 3.3: $\text{Ext}_A^{**}(A_1, \mathbb{F}_2)$

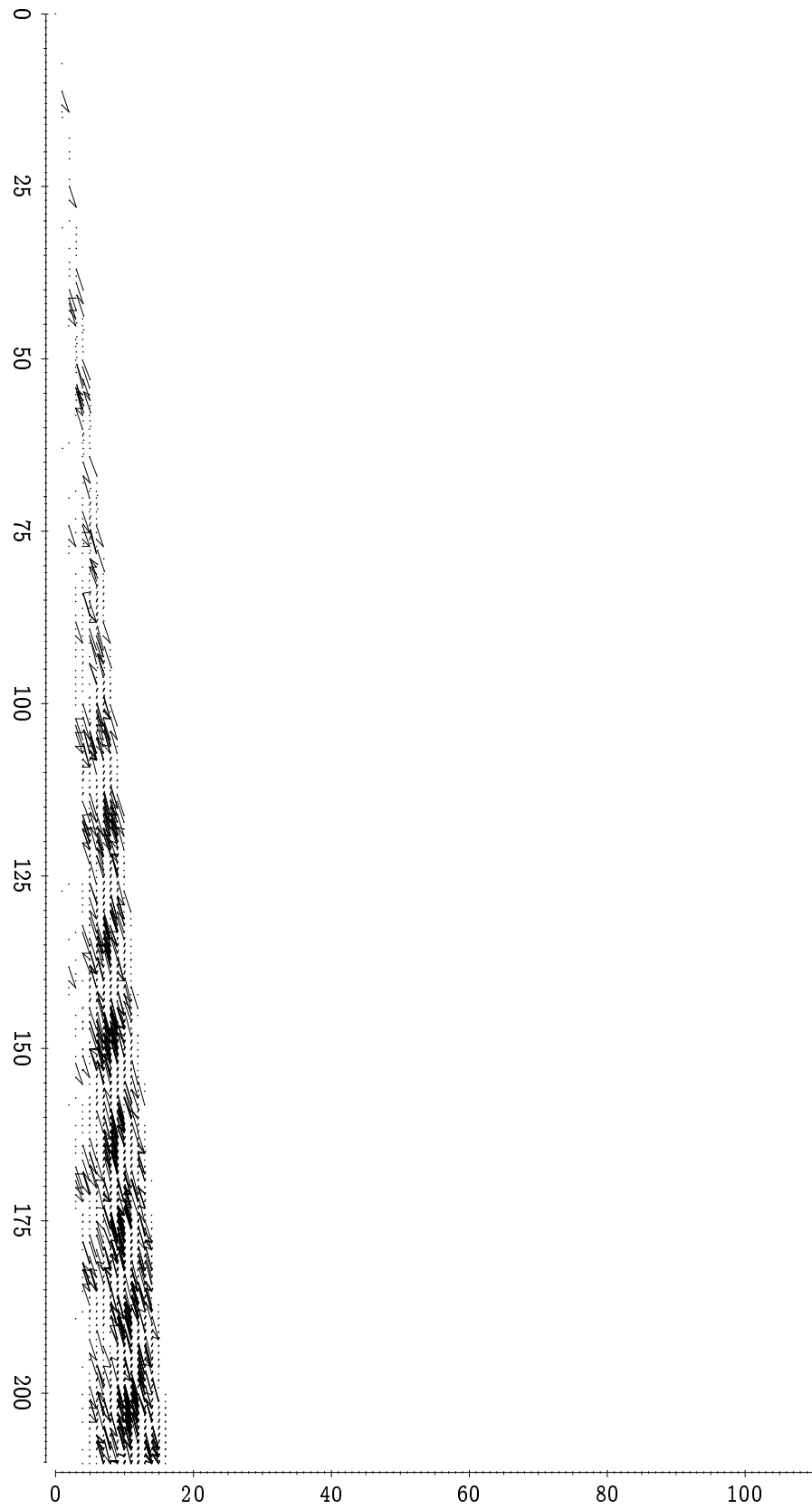


Abbildung 3.4: $\text{Ext}_A^{*,*}(A_2, \mathbb{F}_2)$

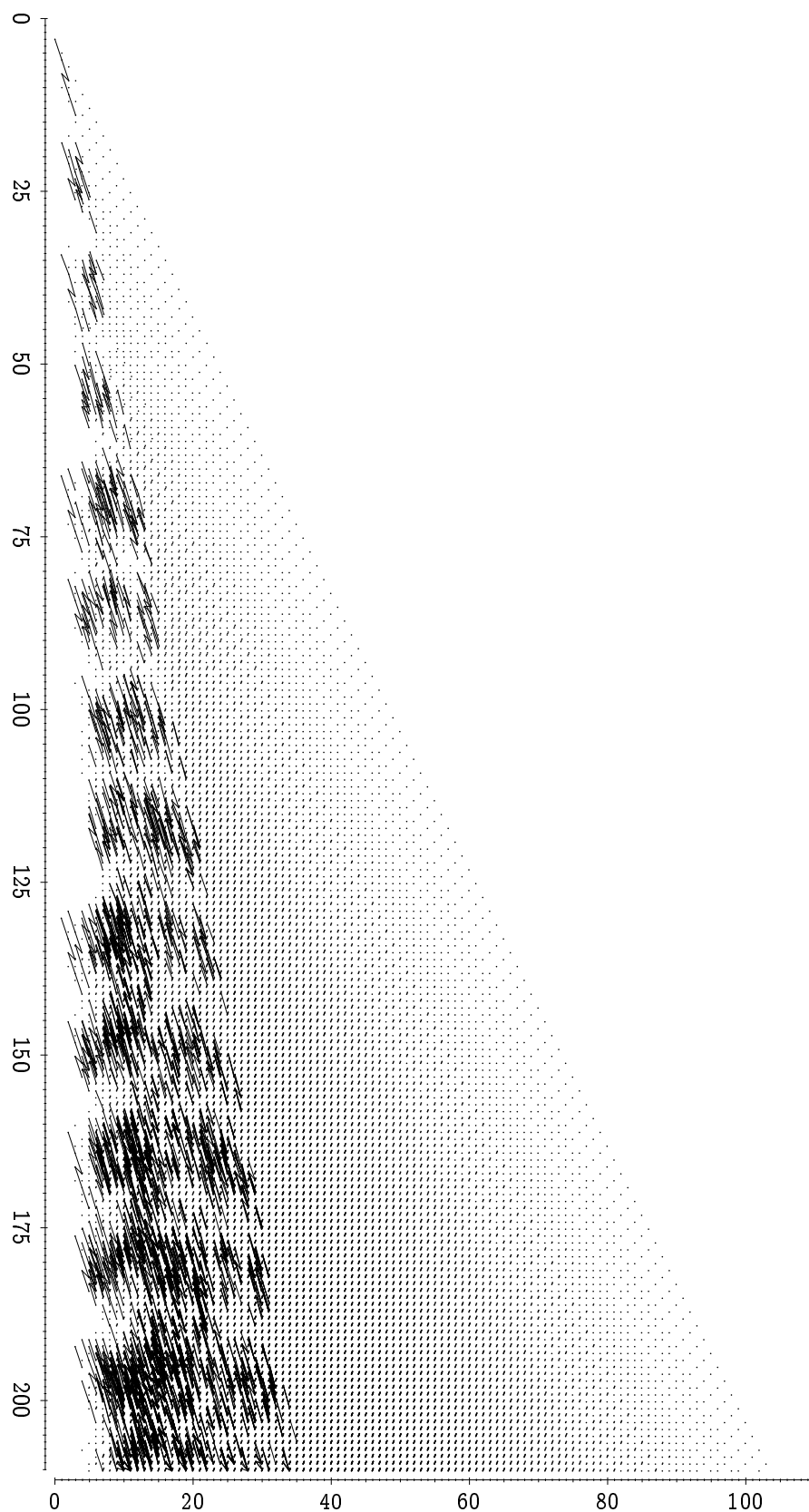


Abbildung 3.5: $\text{Ext}_A^{**}(\Sigma^3 B_1, \mathbb{F}_2)$

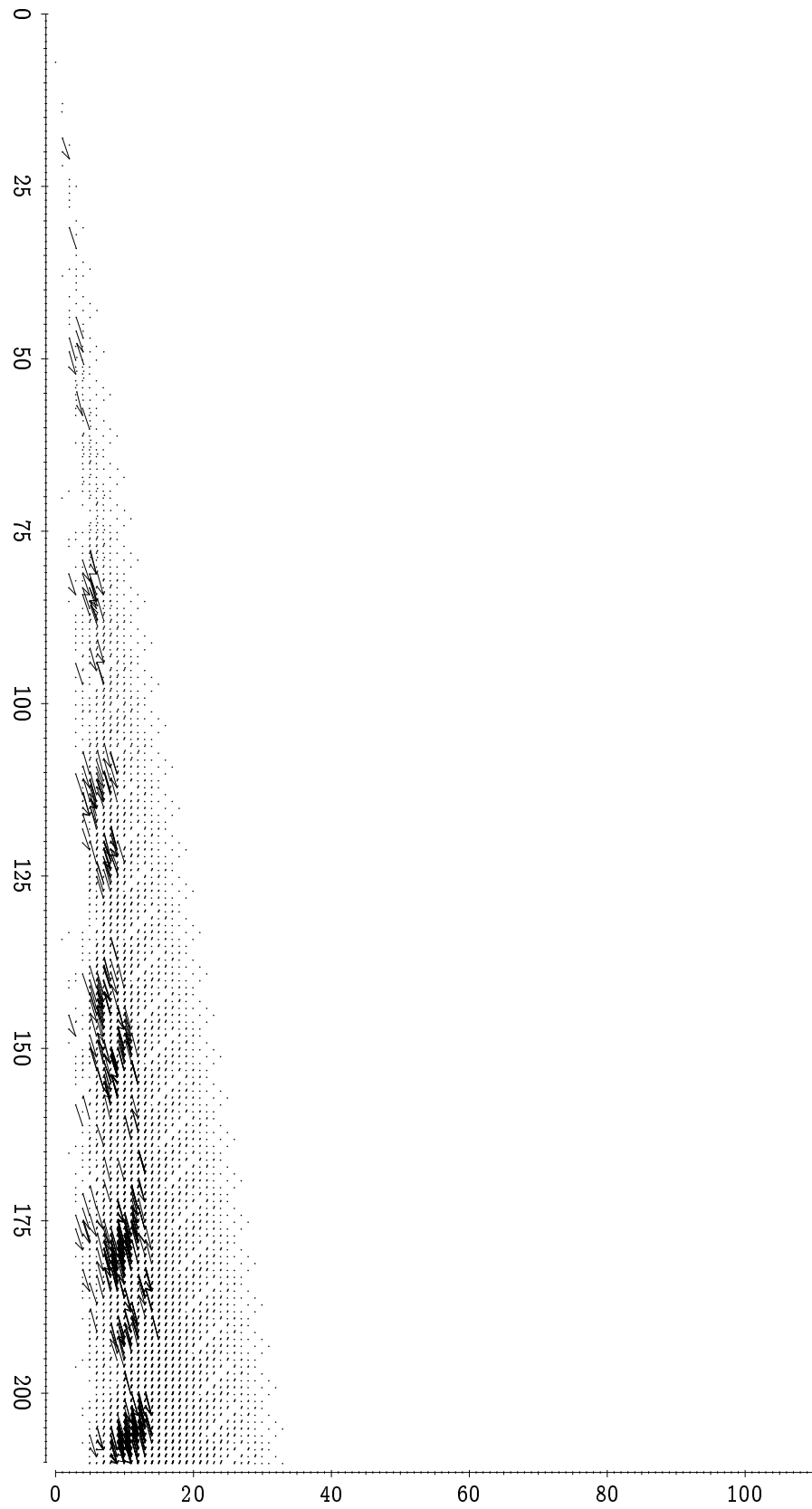


Abbildung 3.6: $\text{Ext}_A^{*,*}(\Sigma^7 B_2, \mathbb{F}_2)$

3.2 Wurzelinvarianten

Bei der im Titel erwähnten Invarianten handelt es sich um eine Konstruktion, die zuerst von Mahowald in [27] betrachtet worden ist und deshalb auch *Mahowald-Invariante* genannt wird. Wir möchten hier die topologische Herkunft und Signifikanz nicht diskutieren; der Leser kann sich darüber zB. aus [13], [10] oder [28] informieren. Stattdessen möchten wir zeigen, wie man mit der Methode des vorigen Abschnitts Wurzeln effektiv berechnen kann.

Sei dazu $P = H^*(\mathbb{R}P^\infty; \mathbb{F}_2)$. Bekanntlich ist $P = \mathbb{F}_2[x]$ mit $|x| = 1$ und $\text{Sq}^k x^n = \binom{n}{k} x^{n+k}$. Diese Formel macht auch für negatives n Sinn und definiert eine A -Modulstruktur auf dem *Lin-Modul* $L = \mathbb{F}_2[x, x^{-1}]$. Wie man sich leicht überlegt, ist die Abbildung $\eta : L \rightarrow \Sigma^{-1} \mathbb{F}_2$ mit $x^{-1} \mapsto 1$ A -linear. Erstaunlicherweise induziert diese einen Isomorphismus in $\text{Ext}_A(-, \mathbb{F}_2)$:

Satz 3.2.1 ([24]). $\eta^* : \text{Ext}_A^{s,t}(\mathbb{F}_2, \mathbb{F}_2) \rightarrow \text{Ext}_A^{s,t+1}(L, \mathbb{F}_2)$ ist ein Isomorphismus. \square

Man betrachtet nun die Filtrierung von L durch die Untermoduln $L_k \subset L$ mit $L_k = \mathbb{F}_2\{x^n : n \geq k\}$. Sinnvollerweise setzt man $L_{-\infty} = L$. Offenbar ist $L_{k+1} \subset L_k$ und $L_k/L_{k+1} = \mathbb{F}_2\{x^k\} \cong \Sigma^k \mathbb{F}_2$. Setze $\eta_k = \eta|_{L_k} : L_k \rightarrow \Sigma^{-1} \mathbb{F}_2$. Sei $0 \neq x \in \text{Ext}_A^{s,t}(\Sigma^{-1} \mathbb{F}_2, \mathbb{F}_2)$ gegeben. Da $\eta = \eta_{-\infty}$ in Ext ein Isomorphismus ist, ist $\eta_k^*(x) \neq 0$ für hinreichend kleine k . Andererseits ist offenbar $\eta_k = 0$ für $k \geq 0$, sodaß es ein maximales $k < 0$ mit $\eta_k^*(x) \neq 0$ gibt. Man betrachte zu diesem k das folgende Diagramm, in dem die obere Zeile eine kurze exakte Sequenz ist:

$$\begin{array}{ccccc} L_{k+1} & \longrightarrow & L_k & \longrightarrow & \Sigma^k \mathbb{F}_2 \\ & \searrow \eta_{k+1} & \downarrow \eta_k & & \\ & & \Sigma^{-1} \mathbb{F}_2 & & \end{array} \quad (3.1)$$

Dieses induziert

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longleftarrow & \text{Ext}_A^{s,t}(L_{k+1}, \mathbb{F}_2) & \xleftarrow{i^*} & \text{Ext}_A^{s,t}(L_k, \mathbb{F}_2) & \xleftarrow{p^*} & \text{Ext}_A^{s,t}(\Sigma^k \mathbb{F}_2, \mathbb{F}_2) & \longleftarrow \cdots \\ & & \nwarrow \eta_{k+1}^* & & \uparrow \eta_k^* & & & \\ & & & & \text{Ext}_A^{s,t}(\Sigma^{-1} \mathbb{F}_2, \mathbb{F}_2) & & & \end{array} \quad (3.2)$$

Da nun $i^*(\eta_k^*(x)) = \eta_{k+1}^*(x) = 0$, ist $p^{*-1}(\eta_k^*(x))$ nicht leer.

Definition 3.2.2. $R(x) := p^{*-1}(\eta_k^*(x)) \subset \text{Ext}_A^{s,t+k}(\mathbb{F}_2, \mathbb{F}_2)$ heißt *Wurzel* von x .

Man beachte, daß $R(x)$ kein einzelnes Element, sondern eine ganze Nebenklasse des Bildes von $\text{Ext}_A^{s-1,t}(L_{k+1}, \mathbb{F}_2) \rightarrow \text{Ext}_A^{s,t}(\Sigma^k \mathbb{F}_2, \mathbb{F}_2)$ bezeichnet.

Zur Berechnung der Wurzeln aus einer minimalen Auflösung C_* kann man die Definition ganz direkt umsetzen. Man bildet zunächst das Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} L_{k+1} \wedge C_* & \longrightarrow & L_k \wedge C_* & \longrightarrow & \Sigma^k C_* \\ & \searrow \eta_{k+1} \wedge \text{id} & \downarrow \eta_k \wedge \text{id} & & \\ & & \Sigma^{-1} C_* & & \end{array} \quad (3.3)$$

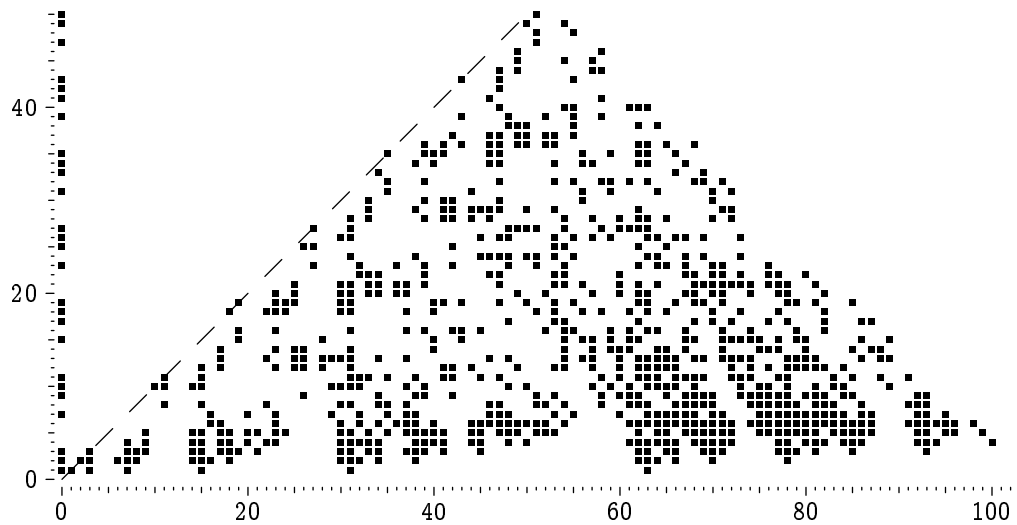


Abbildung 3.7: Bild zur Bredon-Löffler-Vermutung. Für alle $x \in \text{Ext}^{s,n+s}(\mathbb{F}_2, \mathbb{F}_2)$, für die von uns die Wurzel $R(x) \subset \text{Ext}^{s,n+s+k(x)}(\mathbb{F}_2, \mathbb{F}_2)$ berechnet werden konnte, ist ein schwarzes Kästchen mit Koordinaten $(n, k(x) - n)$ eingezeichnet. Man sieht, daß in allen positiven Dimensionen $n > 0$ jeweils $k \leq 2n$ gilt, wie es die algebraische Bredon-Löffler-Vermutung vorhersagt.

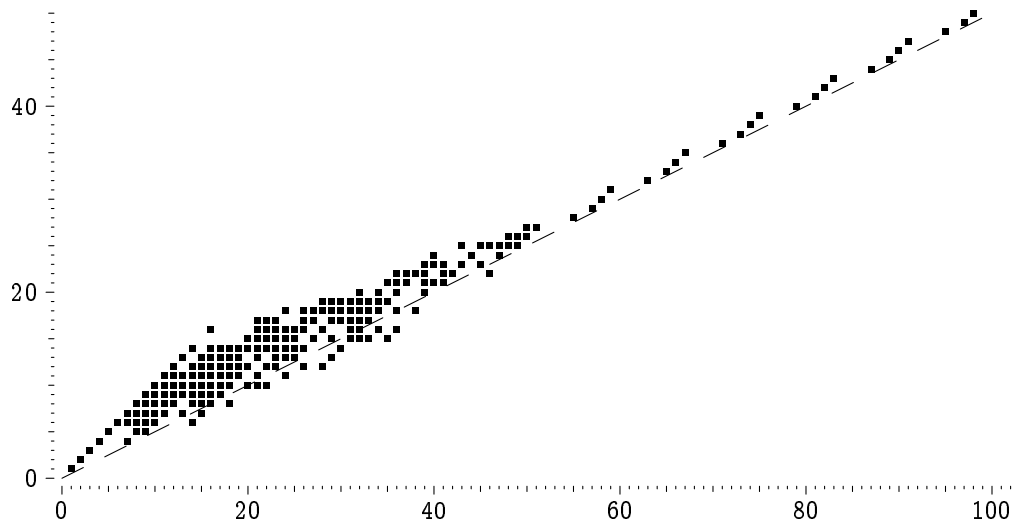


Abbildung 3.8: Bild zur starken Bredon-Löffler-Vermutung. Hier wurde für jedes $R(x) \subset \text{Ext}^{s,n+s+k(x)}(\mathbb{F}_2, \mathbb{F}_2)$ ein Kästchen im Feld $(k(x) - n, s)$ geschwärzt. Die starke Bredon-Löffler-Vermutung sagt voraus, daß alle solche Kästchen oberhalb einer Geraden mit Steigung $1/2$ liegen. Unsere Resultate scheinen dies nicht zu bestätigen.

bei dem wir stillschweigend $\Sigma^j \mathbb{F}_2 \wedge C_*$ mit $\Sigma^j C_*$ identifiziert haben. Dieses Diagramm ist eine Realisierung von 3.1, in der die Ecken durch partielle Auflösungen und die Pfeile durch zugehörige Kettenabbildungen ersetzt wurden. Das zu 3.1 gehörige Diagramm der Kohomologiegruppen 3.2 kann man also berechnen, indem man $\text{Hom}_A(-, \mathbb{F}_2)$ auf 3.3 anwendet.

Um Verwechslungen mit dem Graduierungstern zu vermeiden, bezeichnen wir im folgenden das Vektorraumdual von M mit M^\dagger . Wir benutzen den Isomorphismus $\text{Hom}_A(M \wedge C_s, \mathbb{F}_2) = M^\dagger \otimes_{\mathbb{F}_2} \text{Ext}_A^s(\mathbb{F}_2, \mathbb{F}_2)$ aus Bemerkung 3.1.4, und können das aus 3.3 entstehende Diagramm von Kettenkomplexen mit

$$\begin{array}{ccccc}
 L_{k+1}^\dagger \otimes_{\mathbb{F}_2} \text{Ext}_A^{s,t}(\mathbb{F}_2, \mathbb{F}_2) & \xleftarrow{i^*} & L_k^\dagger \otimes_{\mathbb{F}_2} \text{Ext}_A^{s,t}(\mathbb{F}_2, \mathbb{F}_2) & \xleftarrow{p^*} & \text{Ext}_A^{s,t+k}(\mathbb{F}_2, \mathbb{F}_2) \\
 & \nwarrow \eta_{k+1}^* & \uparrow \eta_k^* & & \\
 & & \text{Ext}_A^{s,t-1}(\mathbb{F}_2, \mathbb{F}_2) & &
 \end{array} \tag{3.4}$$

identifizieren. Die auftretenden $L_k^\dagger \otimes_{\mathbb{F}_2} \text{Ext}_A^{s,*}(\mathbb{F}_2, \mathbb{F}_2)$ sind dabei allesamt Quotientenkomplexe von $L^\dagger \otimes_{\mathbb{F}_2} \text{Ext}_A^{s,*}(\mathbb{F}_2, \mathbb{F}_2)$, sodaß man im Grunde nur diesen auf dem Rechner realisieren muß, und dies geht genau wie in Abschnitt 3.1 beschrieben. Unsere Implementierung war in der Lage, innerhalb eines Tages alle Wurzeln, die im Bereich $\text{Ext}_A^{s,t}(\mathbb{F}_2, \mathbb{F}_2)$ mit $t - s \leq 210$ liegen, zu berechnen. Die Ergebnisse findet man unter [38].

Es ist bekannt, daß die Wurzel eines $x \in \text{Ext}_A^{s,n+s}(\mathbb{F}_2, \mathbb{F}_2)$ immer mindestens den doppelten internen Grad $2n + 2s$ hat. Damit ist insbesondere auch die topologische Dimension der Wurzel mindestens $2n + 2s - s$, also $\geq 2n$. Es wird vermutet, daß diese aber nie größer als $3n$ sein kann:

Vermutung 3.2.3 (algebraische Bredon-Löffler-Vermutung, [10], [13]). *Sei $n > 0$ und $0 \neq x \in \text{Ext}_A^{s,n+s}(\mathbb{F}_2, \mathbb{F}_2)$ mit $R(x) \subset \text{Ext}_A^{s,n+s+k}(\mathbb{F}_2, \mathbb{F}_2)$. Dann ist $k \leq 2n$.*

Die Abbildung 3.7 zeigt, daß die von uns berechneten Wurzeln sich an diese Regel halten. Dagegen scheint uns die folgende, von Bruner in [13] und [14] betrachtete Verschärfung im Lichte von Abbildung 3.8 etwas fragwürdig:

Vermutung 3.2.4 (starke algebraische Bredon-Löffler-Vermutung, [13]). *Es gibt eine Konstante C , sodaß für $n > 0$ und $0 \neq x \in \text{Ext}_A^{s,n+s}(\mathbb{F}_2, \mathbb{F}_2)$ mit $R(x) \subset \text{Ext}_A^{s,n+s+k}(\mathbb{F}_2, \mathbb{F}_2)$ jeweils $s < (k - n - C)/2$ gilt.*

Ursprünglich wurde dies in [13] für $C = 0$ vermutet, bevor der Ausreißer $r_1 \in R(h_2^2g)$ mit Koordinaten $(s, k) = (6, 14)$ bekannt war (siehe [14]). Uns scheint, daß die Häufung solcher Ausreißer für $s \leq 20$ zu einer skeptischeren Betrachtung einlädt.

3.3 Die Frobeniusoperation

Da die duale Steenrod-Algebra A_* eine (graduiert-) kommutative Hopf-Algebra über dem Primkörper \mathbb{F}_p ist, kann man die Frobeniusabbildung $F : A_t \rightarrow A_{pt}$, $z \mapsto z^p$, betrachten.

Lemma 3.3.1. $F : A_* \rightarrow A_{p*}$ ist ein Homomorphismus von Hopf-Algebren. \square

Der duale Homomorphismus $F^\dagger : A \rightarrow A$ ist auf Milnorschen Basiselementen wie folgt gegeben:

$$F^\dagger(Q(\varepsilon)) = \begin{cases} 1 & \text{falls } Q(\varepsilon) = 1, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

$$F^\dagger(P(r_1, \dots, r_n)) = \begin{cases} P\left(\frac{r_1}{p}, \dots, \frac{r_n}{p}\right) & \text{falls alle } r_i \equiv 0 \pmod{p}, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Man definiert einen Funktor $F^\dagger : A\text{-Mod} \rightarrow A\text{-Mod}$ durch

$$(F^\dagger M)_t := \begin{cases} M_{t/p} & \text{falls } t \equiv 0 \pmod{p}, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

wobei die A -Operation $A_t \otimes F_k^\dagger \rightarrow F_{t+k}^\dagger$ nur für $t \equiv 0 \pmod{p}$ und $k \equiv 0 \pmod{p}$ nicht null sei. In diesem Fall sei sie durch

$$A_{pt} \otimes F^\dagger M_{pk} \xrightarrow{F^\dagger \otimes \text{id}} A_t \otimes M_k \xrightarrow{\nu_M} M_{t+k} \cong F_{pt+pk}^\dagger$$

gegeben. Man vergleiche [29], Ch. 15.3.

F^\dagger ist offenbar ein exakter Funktor. Er induziert damit eine natürliche Transformation

$$F^\dagger : \text{Ext}_A^{s,t}(M, N) \rightarrow \text{Ext}_A^{s,t}(F^\dagger M, F^\dagger N),$$

die man folgendermaßen berechnet: sei dazu C_* eine A -freie Auflösung von M und \tilde{C}_* eine A -freie Auflösung von $F^\dagger M$. Da F^\dagger exakt ist, kann man die Homologie $H_s(F^\dagger C_*)$ mit $F^\dagger H_s(C_*)$ identifizieren. Es ist also

$$H_s(F^\dagger C_*) = \begin{cases} F^\dagger M & s = 0, \\ 0 & s \neq 0, \end{cases}$$

sodaß $F^\dagger C_*$ eine (nicht-freie) Auflösung von $F^\dagger M$ ist. Es gibt mithin eine bis auf Homotopie eindeutig bestimmte Vergleichsabbildung $\phi_* : \tilde{C}_* \rightarrow F^\dagger C_*$. Ist nun $\alpha : C_s \rightarrow N$ ein Kozykel, der eine Klasse $[\alpha] \in \text{Ext}_A^{s,t}(M, N)$ repräsentiert, so setzt man $F^\dagger([\alpha]) = [F^\dagger \alpha \circ \phi_s] \in \text{Ext}_A^{s,t}(F^\dagger M, F^\dagger N)$.

Da $F^\dagger \Sigma^k \mathbb{F}_p = \Sigma^{pk} \mathbb{F}_p$ ist, erhält man als Spezialfall eine Transformation

$$\text{Ext}_A^{s,t}(\mathbb{F}_p, \mathbb{F}_p) \rightarrow \text{Ext}_A^{s,pt}(\mathbb{F}_p, \mathbb{F}_p).$$

Hier kann man oben $\tilde{C}_* = C_*$ setzen, sodaß nur eine Vergleichsabbildung $\phi_* : C_* \rightarrow F^\dagger C_*$ berechnet werden muß. Auf dem Computer ist dies überraschend einfach: einerseits ist nämlich die rechte Seite deutlich kleiner als C_* selbst, und andererseits kann man die Theorie aus Kapitel 2 auch für $F^\dagger C_*$ benutzen. Schließlich wurde dort nur die Exaktheit gewisser Sequenzen benutzt und diese bleibt bei Anwendung von F^\dagger erhalten. Für $p = 2$ dauerte die Berechnung im ganzen verfügbaren Bereich $2t - s \leq 210$

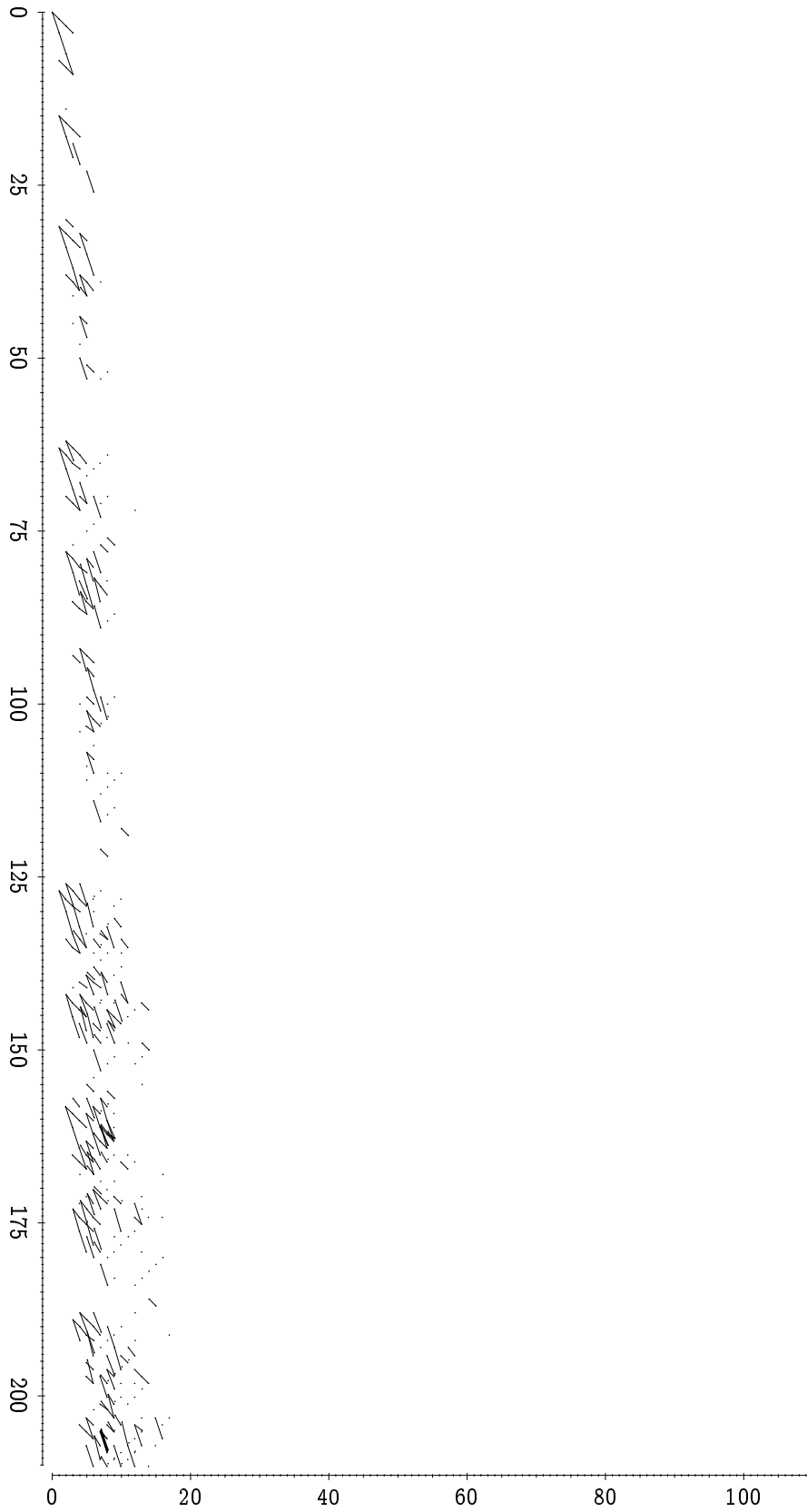


Abbildung 3.9: Bild von $Sq^0 : \text{Ext}_A^{*,*}(\mathbb{F}_2, \mathbb{F}_2) \rightarrow \text{Ext}_A^{*,2*}(\mathbb{F}_2, \mathbb{F}_2)$

nur wenige Stunden. Detaillierte Resultate findet man wiederum in [38]. Wir geben hier nur in Abbildung 3.9 das Bild von $F^\dagger : \text{Ext}_A^{*,*}(\mathbb{F}_2, \mathbb{F}_2) \rightarrow \text{Ext}_A^{*,2*}(\mathbb{F}_2, \mathbb{F}_2)$ an.

Tatsächlich ist F^\dagger nur die nullte einer ganzen Familie interessanter Operationen: so wie die Steenrod-Algebra auf der Kohomologie topologischer Räume operiert, operiert auch eine Variante auf der Kohomologie kokommutativer Hopf-Algebren über \mathbb{F}_p . Für $p = 2$ und $i \in \mathbb{N}_0$ zB. erhält man Abbildungen

$$\text{Sq}^i : \text{Ext}_A^{s,t}(\mathbb{F}_2, \mathbb{F}_2) \rightarrow \text{Ext}_A^{s+i,2t}(\mathbb{F}_2, \mathbb{F}_2)$$

und für $p > 2$

$$\begin{aligned} P^i &: \text{Ext}_A^{s,t}(\mathbb{F}_p, \mathbb{F}_p) \rightarrow \text{Ext}_A^{s+i,pt}(\mathbb{F}_p, \mathbb{F}_p), \\ \beta P^i &: \text{Ext}_A^{s,t}(\mathbb{F}_p, \mathbb{F}_p) \rightarrow \text{Ext}_A^{s+i+1,pt}(\mathbb{F}_p, \mathbb{F}_p). \end{aligned}$$

Diese Abbildungen sind

- rein algebraisch definiert (siehe zB. [31] oder [32] Th. 9.10),
- für die Berechnung der Differentiale in der Adams-Spektralreihe von Bedeutung (siehe Bruners Beiträge in [9]),
- und sie verhalten sich ähnlich wie die Operation der $\text{Sq}^i \in A$ (bzw. $P^i, Q_0 P^i \in A$ falls $p > 2$) auf der Kohomologie von Räumen.

Leider sind die P^i und Sq^i für $i > 0$ praktisch unberechenbar: außer in zwei Grenzfällen ist kein Verfahren bekannt, das diese Operationen mit vertretbarem Aufwand aus einer Auflösung berechnen könnte (siehe Bruners Diskussion in [15]).

Die zwei genannten Ausnahmen sind folgende: zum einen ist (für $p = 2$) $\text{Sq}^s x = x^2$ falls x den homologischen Grad s hat, und eine entsprechende Formel gilt auch für $p > 2$; zum anderen hat man

Satz 3.3.2. *Es ist $F^\dagger = P^0 : \text{Ext}_A^{s,t}(\mathbb{F}_p, \mathbb{F}_p) \rightarrow \text{Ext}_A^{s,pt}(\mathbb{F}_p, \mathbb{F}_p)$. Für $p = 2$ lese man P^0 als Sq^0 .*

Beweis. Dies ist Prop. 11.10 aus [31]. Dort wird gezeigt, daß man P^0 auf Repräsentanten in der Kobar-Auflösung der dualen Steenrod-Algebra durch $P^0([\alpha_1 | \cdots | \alpha_s]) = [\alpha_1^p | \cdots | \alpha_s^p]$ für $\alpha_i \in A_*$ berechnen kann. Offenbar ist dies gerade die vom Frobenius F induzierte Abbildung auf der Kohomologie. \square

Die Kenntnis von Sq^0 kann für die Berechnung der höheren Sq^i manchmal hilfreich sein. Für die Sq^i gilt nämlich die Rechenregel $\text{Sq}^i \text{Sq}^0 = \text{Sq}^0 \text{Sq}^i$, sodaß im Sq^0 unter den Sq^i abgeschlossen ist. Da im Sq^0 nach Abbildung 3.9 sehr klein ist, kommen für die $\text{Sq}^i \text{Sq}^0(x)$ also immer nur wenige Elemente in Frage.

Wir erwähnen noch, daß Sq^0 und die Wurzelinvariante eng miteinander verbunden sind: falls nämlich $\text{Sq}^0(x)$ und $R(x)$ dieselbe Dimension haben, so ist $\text{Sq}^0(x) \in R(x)$ [28, 2.9].

3.4 Hurewicz-Abbildung für tmf

Die im Titel gemeinte Abbildung ist schlicht die natürliche Transformation

$$H_2 : \text{Ext}_A^{s,t}(\mathbb{F}_2, \mathbb{F}_2) \rightarrow \text{Ext}_{A(2)}^{s,t}(\mathbb{F}_2, \mathbb{F}_2).$$

$A(2)$ sei dabei die Hopf-Unteralgebra $B(3, 2, 1) \subset A$. Die beiden auftretenden Ext-Gruppen sind bereits in den Abbildungen 2.10 und 2.11 gezeigt worden. Wir stellen hier H_2 in Abbildung 3.11 durch sein Bild dar; detailliertere Informationen findet man unter [38]. Wir müssen also nur noch zwei Sachen erklären:

- Wie die Transformation H_2 zustande kommt und wie man sie berechnet.
- Welche topologische Bedeutung mit H_2 verbunden ist.

Algebraisch betrachtet geht es hier um folgende Konstruktion: uns stehen bereits zwei Auflösungen zur Verfügung, nämlich

- eine minimale A -freie Auflösung C_* von \mathbb{F}_2 und
- eine minimale $A(2)$ -freie Auflösung D_* von \mathbb{F}_2 .

Wir berechnen nun eine $A(2)$ -lineare Vergleichsabbildung $\Phi_* : D_* \rightarrow C_*$, die die Identität auf \mathbb{F}_2 liftet. Ein solches Φ_* ist bis auf Homotopie eindeutig bestimmt. Bei der Berechnung kann man natürlich wiederum die Theorie aus Kapitel 2 zur Vereinfachung der auftretenden Hebungsprobleme in C_* benutzen. Hat man Φ_* und ist ein $[\alpha] \in \text{Ext}_A^{s,t}(\mathbb{F}_2, \mathbb{F}_2)$ durch einen Kozykel $\alpha : C_s \rightarrow \Sigma^t \mathbb{F}_2$ gegeben, so wird $H_2([\alpha]) \in \text{Ext}_{A(2)}^{s,t}(\mathbb{F}_2, \mathbb{F}_2)$ durch $\alpha \circ \Phi_s : D_s \rightarrow \Sigma^t \mathbb{F}_2$ repräsentiert. H_2 kann man also aus Φ_* einfach ablesen. Die Berechnung von Φ_* im gesamten Bereich $t - s \leq 210$ dauerte etwas weniger als zwei Tage.

Topologisch würde man das H_2 wie folgt interpretieren: man betrachte allgemeiner

$$H_n : \text{Ext}_A^{s,t}(\mathbb{F}_2, \mathbb{F}_2) \rightarrow \text{Ext}_{A(n)}^{s,t}(\mathbb{F}_2, \mathbb{F}_2).$$

Es gibt einen Isomorphismus (siehe zB. [32, Seite 438]) $\text{Ext}_{A(n)}^{s,t}(\mathbb{F}_2, \mathbb{F}_2) \cong \text{Ext}_A^{s,t}(A//A(n), \mathbb{F}_2)$, bei dem H_n mit der von $A//A(n) \rightarrow \mathbb{F}_2$ induzierten Abbildung identifiziert werden kann. Für $n \leq 2$ kann man außerdem $A//A(n)$ als Kohomologie eines Spektrums schreiben:

$$\begin{aligned} H^*(H\mathbb{F}_2; \mathbb{F}_2) &= A//A(-1) && (= A \text{ weil } A(-1) = \mathbb{F}_2) \\ H^*(H\mathbb{Z}; \mathbb{F}_2) &= A//A(0) && (= A/AQ_0, \text{ siehe Abschnitt 1.2.5}) \\ H^*(ko; \mathbb{F}_2) &= A//A(1) && ko = \text{zusammenhängende reelle } K\text{-Theorie} \\ H^*(tmf; \mathbb{F}_2) &= A//A(2) && tmf = \text{Theorie der topologischen Modulformen.} \end{aligned}$$

Ist $H^*(X_n; \mathbb{F}_2) = A//A(n)$, so wird zudem $A//A(n) \rightarrow \mathbb{F}_2$ von einer Abbildung $\iota_n : S \rightarrow X_n$ induziert. Betrachtet man die Adams-Spektralreihen für die Homotopiegruppen von X_n bzw. der Sphäre S , so erhält man das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \text{Ext}_{A(n)}^{s,t}(\mathbb{F}_2, \mathbb{F}_2) & \Longrightarrow & \pi_{t-s} X_{n(2)} \\ \uparrow H_n & & \uparrow \pi_* \iota_n \\ \text{Ext}_A^{s,t}(\mathbb{F}_2, \mathbb{F}_2) & \Longrightarrow & \pi_{t-s} S(2) \end{array}$$

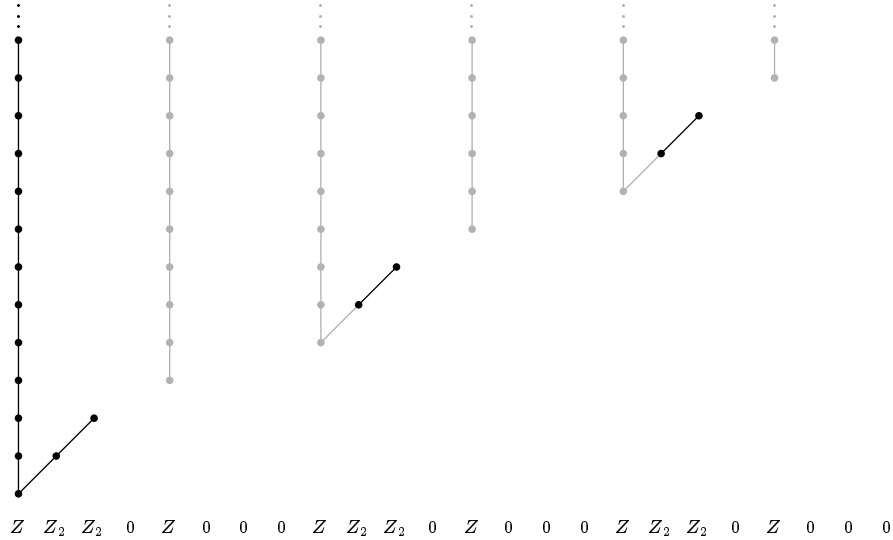


Abbildung 3.10: Ausgangsterm $E_2^{s,t} = \text{Ext}_A^{s,t}(A//A(1), \mathbb{F}_2)$ der Adams-Spektralreihe für $\pi_* \text{ko}_{(2)}$, welche kollabiert. In schwarz werden die Klassen hervorgehoben, die dem Bild von $\pi_* S \rightarrow \pi_* \text{ko}$ entsprechen.

in dem H_n offenbar zu $\pi_* \iota_n : \pi_* S \rightarrow \pi_* X_n$ assoziiert ist. Diese nennt man oft auch die X_n -Hurewicz-Abbildung. Für $n < 2$ ist diese bereits völlig verstanden:

$n = -1$. Hier ist $X_{-1} = H\mathbb{F}_2$. Die Abbildung $\pi_* S \rightarrow \pi_* H\mathbb{F}_2$ ordnet einem $f \in \pi_0 S$ den Abbildungsgrad $\deg f \pmod 2$ zu.

$n = 0$. Hier ist $X_0 = H\mathbb{Z}$. Dies ist der klassische Fall, dem die Bezeichnung *Hurewicz-Abbildung* geschuldet ist: die Abbildung $\iota_0 : S \rightarrow H\mathbb{Z}$ induziert gerade die Transformation $\pi_n(X) \rightarrow H_n(X; \mathbb{Z})$, bei der einem $f : S^n \rightarrow X$ das Bild $f_*([S^n]) \in H_n(X; \mathbb{Z})$ der Fundamentalklasse $[S^n] \in H_n(S^n)$ zugeordnet wird. Setzt man hier $X = S^0$, so erhält man eine Invariante für Abbildungen zwischen Sphären: eine Klasse $f \in \pi_0(S)$ der Dimension Null wird auf ihren Abbildungsgrad $\deg f \in \mathbb{Z} \cong H_0(S^0, \mathbb{Z})$ abgebildet, Klassen anderer Dimension auf Null.

In Ext ergibt sich dasselbe Bild: $\text{Ext}_A^{s,t}(A//A(0), \mathbb{F}_2)$ wurde in Abbildung 1.3 gezeigt. Die Hurewicz-Abbildung $\text{Ext}_A^{s,t}(\mathbb{F}_2, \mathbb{F}_2) \rightarrow \text{Ext}_A^{s,t}(A//A(0), \mathbb{F}_2)$ ist für $0 = t-s$ ein Isomorphismus und entspricht dort dem Abbildungsgrad $\mathbb{Z} \cong \pi_0(S) \rightarrow \pi_0 H\mathbb{Z} = \mathbb{Z}$. Für $t-s \neq 0$ ist sie Null.

$n = 1$. Hier ist $X_1 = \text{ko}$ das Spektrum der zusammenhängenden reellen K -Theorie. Diese unterscheidet sich von der gewöhnlichen reellen K -Theorie KO nur dadurch, daß die Homotopiegruppen in negativen Dimensionen getötet wurden: für KO hat man die bekannten Bott-periodischen Gruppen

$k \pmod 8$	0	1	2	3	4	5	6	7
$\pi_k(\text{KO})$	\mathbb{Z}	\mathbb{Z}_2	\mathbb{Z}_2	0	\mathbb{Z}	0	0	0

3 Weitere Anwendungen

und für ko gilt (nach Konstruktion)

$$\pi_k(ko) = \begin{cases} \pi_k(KO) & k \geq 0, \\ 0 & k < 0. \end{cases}$$

Außerdem hat man eine Transformation $ko \rightarrow KO$, die für nichtnegatives k den Isomorphismus $\pi_k(ko) \rightarrow \pi_k(KO)$ induziert.

Daß $H^*(ko; \mathbb{F}_2) = A//A(1)$ ist findet man zB. in [26]. In Abbildung 3.10 sieht man zunächst $\text{Ext}_A^{*,*}(H^*(ko), \mathbb{F}_2)$, worin diejenigen Klassen in Schwarz hervorgehoben sind, die von $\text{Ext}_A^{*,*}(\mathbb{F}_2, \mathbb{F}_2)$ herkommen. Neben den Klassen mit Dimension $t - s = 0$, die durch den Abbildungsgrad beschrieben werden können, erkennt man die sogenannte μ -Familie von Adams [1] in den Dimensionen $\equiv 1, 2 \pmod{8}$.

$n = 2$. Hier ist $X_2 = \text{tmf}$ das noch ziemlich mysteriöse Spektrum der *topologischen Modulformen*. Daß $H^*(\text{tmf}; \mathbb{F}_2) = A//A(2)$ gilt, ist Theorem 9.2 aus [20]. Dort sind auch die Differentiale der Adams-Spektralreihe

$$\text{Ext}_{A(2)}^{s,t}(\mathbb{F}_2, \mathbb{F}_2) \Rightarrow \pi_* \text{tmf}_{(2)}$$

vollständig berechnet worden.

Was topologische Modulformen sind (oder sein sollen), können wir hier nicht erklären, weil dies den Wissensstand zumindest dieses Autors übersteigt. Unter anderem geht es darum, Witten's Beobachtung aus [47], daß nämlich die S^1 -äquivariante Indices gewisser hypothetischer Dirac-Operatoren auf freien Schleifenräumen die Fourierdarstellungen von Modulformen sind, in richtiger Allgemeinheit neu zu verstehen (siehe [19]). Wir verweisen den Leser dazu auf [20], [6].

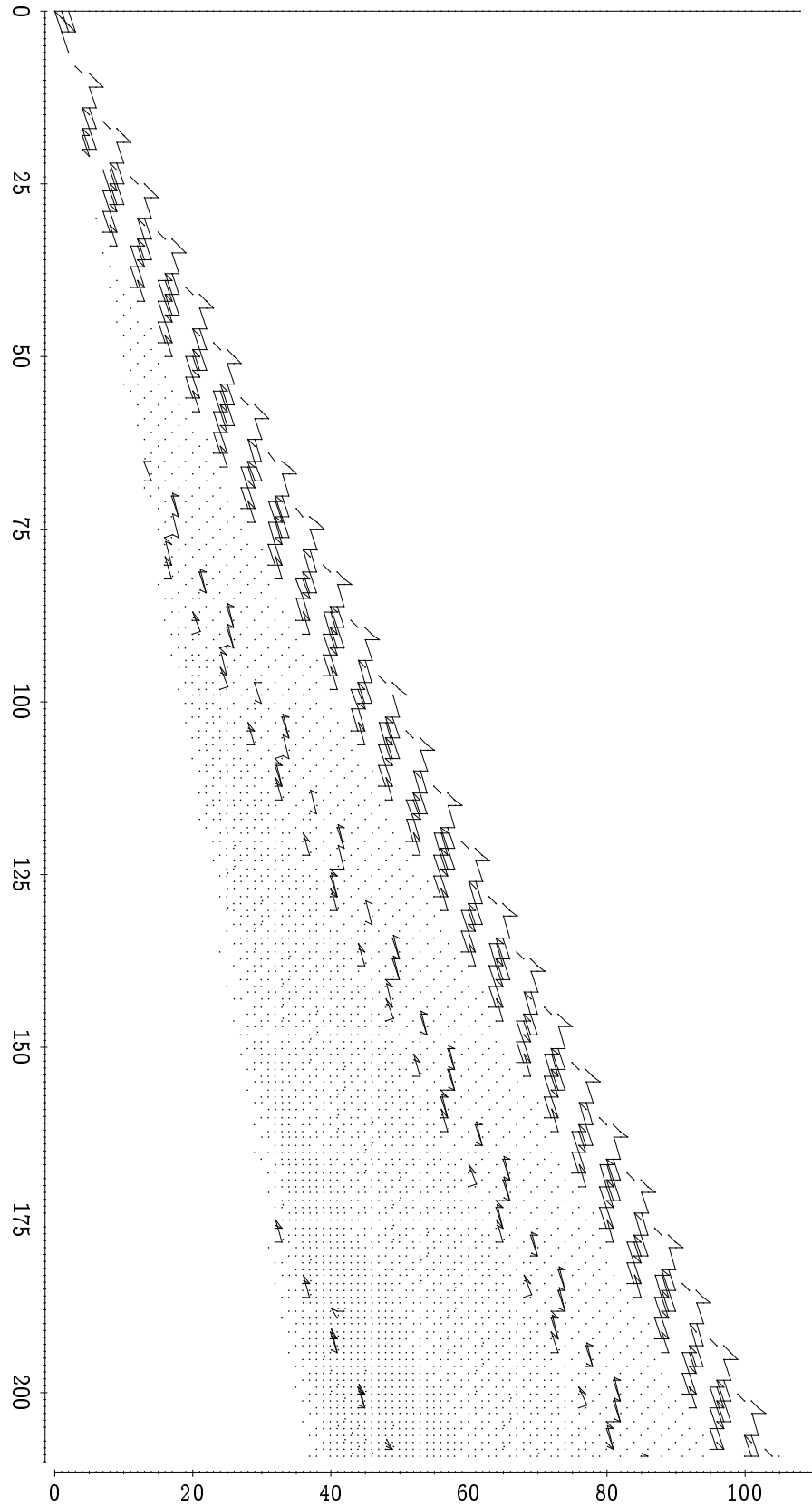


Abbildung 3.11: Bild von $\text{Ext}_A^{*,*}(\mathbb{F}_2, \mathbb{F}_2) \rightarrow \text{Ext}_{A(2)}^{*,*}(\mathbb{F}_2, \mathbb{F}_2)$

Abbildungsverzeichnis

1.1	Multiplizieren in der Milnorbasis	8
1.2	$\pi_{n+k}(S^n)$ nach [46]	14
1.3	E_2 -Term für $\pi_*(H\mathbb{Z})$	19
1.4	E_2 -Term für $\pi_*(S)_{(2)}$	20
1.5	$R_{s,t}$ und $R_{s,t}^o$	23
1.6	Dimension der Steenrod-Algebra	25
1.7	Anfang der minimalen Auflösung	26
2.1	Lemma, obere Version	32
2.2	Lemma, untere Version	33
2.3	Graphische Darstellung einer Profilfunktion	36
2.4	Schrittzerlegungen	38
2.5	Zerlegungsstatistik bei unterer Anwendung	44
2.6	Anwendbarkeit der unteren Version	45
2.7	Anwendbarkeit der oberen Version	47
2.8	Zerlegungsstatistik bei oberer Anwendung	50
2.9	Bild zur Wahl der Unteralgebra	54
2.10	Ext-Panorama für die Sphäre, $p = 2$	56
2.11	Ext über $A(2)$ für $p = 2$	57
2.12	Dimension von $\text{Ext}_A^{s,t}(\mathbb{F}_2, \mathbb{F}_2)$	58
2.13	Rechenzeit	58
2.14	Wachstum der minimalen Auflösung	59
2.15	Datenmenge	59
3.1	E^2 -Term für $\Sigma^{-1} \mathbb{R} P^2$	66
3.2	E^2 -Term für den Fragezeichen-Komplex	67
3.3	E^2 -Term für A_1	68
3.4	E^2 -Term für A_2	69
3.5	E^2 -Term für $\Sigma^3 B_1$	70
3.6	E^2 -Term für $\Sigma^7 B_2$	71
3.7	Wurzelinvarianten in $(n, k - n)$ -Koordinaten	73
3.8	Wurzelinvarianten in $(k - n, s)$ -Koordinaten	73
3.9	Bild von $\text{Sq}^0 : \text{Ext}_A^{*,*}(\mathbb{F}_2, \mathbb{F}_2) \rightarrow \text{Ext}_A^{*,2*}(\mathbb{F}_2, \mathbb{F}_2)$	76
3.10	E_2 -Term für $\pi_* \text{ko}_{(2)}$ mit Hurewicz-Bild	79
3.11	$A(2)$ -Hurewicz-Bild für $p = 2$	81

Literaturverzeichnis

- [1] J. F. Adams. On the groups $J(X)$. IV. *Topology*, 5:21–71, 1966.
- [2] J. F. Adams. *Stable homotopy and generalised homology*. University of Chicago Press, Chicago, Ill., 1974. Chicago Lectures in Mathematics.
- [3] J. F. Adams and H. R. Margolis. Sub-Hopf-algebras of the Steenrod algebra. *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 76:45–52, 1974.
- [4] Alejandro Adem and R. James Milgram. *Cohomology of finite groups*. Springer-Verlag, Berlin, 1994.
- [5] Donald W. Anderson and Donald M. Davis. A vanishing theorem in homological algebra. *Comment. Math. Helv.*, 48:318–327, 1973.
- [6] M. Ando, M. Hopkins, and N. P. Strickland. Elliptic spectra, the Witten genus and the Theorem of the cube. Preprint.
- [7] A. K. Bousfield. A classification of K -local spectra. *J. Pure Appl. Algebra*, 66(2):121–163, 1990.
- [8] A. K. Bousfield, E. B. Curtis, D. M. Kan, D. G. Quillen, D. L. Rector, and J. W. Schlesinger. The mod $-p$ lower central series and the Adams spectral sequence. *Topology*, 5:331–342, 1966.
- [9] R. R. Bruner, J. P. May, J. E. McClure, and M. Steinberger. *H_∞ ring spectra and their applications*. Springer-Verlag, Berlin, 1986.
- [10] Robert Bruner and John Greenlees. The Bredon-Löffler conjecture. *Experiment. Math.*, 4(4):289–297, 1995.
- [11] Robert R. Bruner. Internetseite. <http://www.math.wayne.edu/~rrb/cohom>.
- [12] Robert R. Bruner. Ext in the nineties. In *Algebraic topology (Oaxtepec, 1991)*, pages 71–90. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1993.
- [13] Robert R. Bruner. Some remarks on the root invariant. In *Stable and unstable homotopy (Toronto, ON, 1996)*, pages 31–37. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1998.
- [14] Robert R. Bruner. Some root invariants and Steenrod operations in $\text{Ext}_A(F_2, F_2)$. In *Homotopy theory via algebraic geometry and group representations (Evanston, IL, 1997)*, pages 27–33. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1998.

- [15] Robert R. Bruner. A Yoneda description of the Steenrod operations. *Proc. Symp. Pure Math.* 63, 1998.
- [16] Donald M. Davis and Mark Mahowald. v_1 - and v_2 -periodicity in stable homotopy theory. *Amer. J. Math.*, 103(4):615–659, 1981.
- [17] W. G. Dwyer and C. W. Wilkerson. A new finite loop space at the prime two. *J. Amer. Math. Soc.*, 6(1):37–64, 1993.
- [18] A. D. Elmendorf, I. Kriz, M. A. Mandell, and J. P. May. *Rings, modules, and algebras in stable homotopy theory*. American Mathematical Society, Providence, RI, 1997. With an appendix by M. Cole.
- [19] M. Hopkins. Topological modular forms, the Witten genus, and the Theorem of the cube. In *Proceedings of the International Congress of Mathematicians*, pages 554–565. Birkhäuser, Basel, 1994.
- [20] M. Hopkins and M. Mahowald. From elliptic curves to homotopy theory. A preliminary report, 1998.
- [21] Intel Corporation. *Pentium Processor Family Developer's Manual*.
- [22] L. G. Lewis, Jr., J. P. May, M. Steinberger, and J. E. McClure. *Equivariant stable homotopy theory*. Springer-Verlag, Berlin, 1986. With contributions by J. E. McClure.
- [23] Elon L. Lima. The Spanier-Whitehead duality in new homotopy categories. *Summa Brasil. Math.*, 4:91–148 (1959), 1959.
- [24] W. H. Lin, D. M. Davis, M. E. Mahowald, and J. F. Adams. Calculation of Lin's Ext groups. *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 87(3):459–469, 1980.
- [25] A. Liulevicius. Coalgebras, resolutions, and the computer. *Math. Algorithms*, 1:4–11, 1966.
- [26] M. Mahowald and R. James Milgram. Operations which detect Sq^4 in connective K -theory and their applications. *Quart. J. Math. Oxford Ser. (2)*, 27(108):415–432, 1976.
- [27] Mark Mahowald. *The metastable homotopy of S^n* . American Mathematical Society, Providence, R.I., 1967.
- [28] Mark E. Mahowald and Douglas C. Ravenel. The root invariant in homotopy theory. *Topology*, 32(4):865–898, 1993.
- [29] H. R. Margolis. *Spectra and the Steenrod algebra*. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1983. Modules over the Steenrod algebra and the stable homotopy category.
- [30] J. P. May. The cohomology of restricted Lie algebras and of Hopf algebras. *J. Algebra*, 3:123–146, 1966.

- [31] J. Peter May. A general algebraic approach to Steenrod operations. In *The Steenrod Algebra and its Applications (Proc. Conf. to Celebrate N. E. Steenrod's Sixtieth Birthday, Battelle Memorial Inst., Columbus, Ohio, 1970)*, pages 153–231. Springer, Berlin, 1970.
- [32] John McCleary. *A user's guide to spectral sequences*. Cambridge University Press, Cambridge, second edition, 2001.
- [33] H. R. Miller and C. Wilkerson. Vanishing lines for modules over the Steenrod algebra. *J. Pure Appl. Algebra*, 22:293–307, 1981.
- [34] John Milnor. The Steenrod algebra and its dual. *Ann. of Math. (2)*, 67:150–171, 1958.
- [35] John W. Milnor and John C. Moore. On the structure of Hopf algebras. *Ann. of Math. (2)*, 81:211–264, 1965.
- [36] Stephen A. Mitchell. Finite complexes with $A(n)$ -free cohomology. *Topology*, 24(2):227–246, 1985.
- [37] Robert E. Mosher and Martin C. Tangora. *Cohomology operations and applications in homotopy theory*. Harper & Row Publishers, New York, 1968.
- [38] C. Nassau. Internetseite. <http://www.math.uni-frankfurt.de/~nassau/Ext2>.
- [39] Douglas C. Ravenel. *Complex cobordism and stable homotopy groups of spheres*. Academic Press Inc., Orlando, FL, 1986.
- [40] Douglas C. Ravenel. *Nilpotence and periodicity in stable homotopy theory*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1992. Appendix C by Jeff Smith.
- [41] Nobuo Shimada and Akira Iwai. On the cohomology of some Hopf algebras. *Nagoya Math. J.*, 30:103–111, 1967.
- [42] N. E. Steenrod. *Cohomology operations*. Princeton University Press, Princeton, N.J., 1962.
- [43] R. M. Switzer. *Algebraic Topology – Homotopy and Homology*. Springer Verlag, Berlin and New York, 1975.
- [44] Martin C. Tangora. On the cohomology of the Steenrod algebra. *Math. Z.*, 116:18–64, 1970.
- [45] Martin C. Tangora. Computing the homology of the lambda algebra. *Mem. Amer. Math. Soc.*, 58(337):v+163, 1985.
- [46] Hirosi Toda. *Composition methods in homotopy groups of spheres*. Princeton University Press, Princeton, N.J., 1962.
- [47] Edward Witten. The index of the Dirac operator in loop space. In *Elliptic curves and modular forms in algebraic topology (Princeton, NJ, 1986)*, pages 161–181. Springer, Berlin, 1988.



Danksagung

```
karma police
arrest this man
he talks in maths
he buzzes like a fridge
he's like a detuned radio
...
(Radiohead, OK COMPUTER)
```

Zuerst gilt mein Dank Prof. Kultze für die unproblematische und großzügige Betreuung. Damit hat sich eine Tradition, die mit meiner Diplomarbeit begann, glücklich fortgesetzt. Zu danken ist auch Bob Bruner, für eine Reihe ermutigender E-Mails, die im Laufe der Jahre eintrudelten, und für seinen meist offenen E-Briefkasten.

Matthias Schork hat freundlicherweise Teile einer Frühfassung Korrektur gelesen. Meine tiefsitzende Dudenskepsis machte dies vermutlich zu einem etwas frustrierenden Unterfangen, was wohl meine Dankesschuld verdoppelt. Dank gilt außerdem Prof. Ossa für das Aufspüren kleinerer Fehler. Ihm ist es auch zu Gute zu halten, daß der Algorithmus jetzt etwas expliziter beschrieben wird, als es zunächst von mir geplant war.

Um eine schöne Tradition fortzuführen gilt mein Dank natürlich auch den – mittlerweile zumeist ehemaligen – An- und Zugehörigen der Arbeitsgruppe 8:1 von und um Prof. Weidmann, nämlich mindestens Holger Altenhofen, Dirk Buschmann, David Damanik, Jacqueline Habash, Steffen Klassert, Frank Kleespies, Daniel Lenz, Bernd Metzger, Andreas U. Schmidt, Matthias Schork, Peter Stollmann sowie (last, not least) Andreas Weng, geb. Hoffmann, deretwegen ich meinen Kaffee all die Jahre nicht alleine trinken mußte. Gott vergelt's.

Schließlich bleibt nur noch Dank an Douglas Ravenel für das Schreiben von [39]. Ohne diese Sphären- oder Sirenenmusik, die nicht so heißen durfte [und mittlerweile, wie's scheint, auch nicht mehr so heißen soll], wäre zumindest mein akademisches Leben anders verlaufen.

Finally, I apologize for not writing this thing in English. (No joke)

```
cn@maths:~/ > ls -l fu**  
lrwxrwxrwx 1 cn idiots 0 Feb 29 2002 future -> /dev/null  
cn@maths:~/ >
```


Logos Verlag Berlin

ISBN 3-89722-881-5