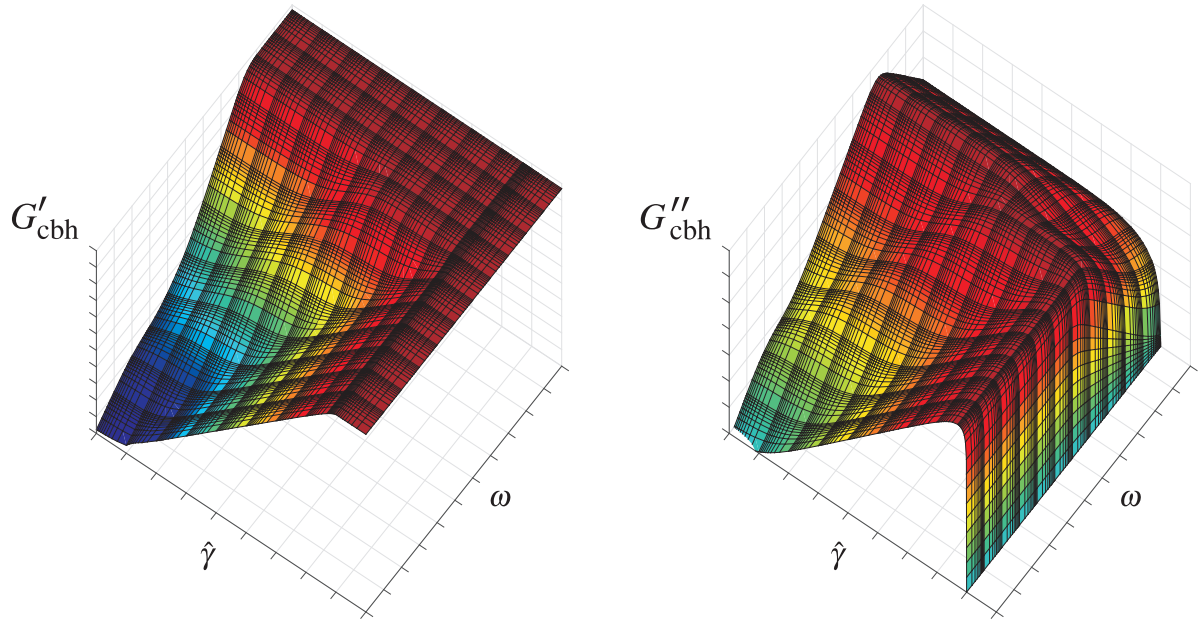
Martin Boisly

Modellierung des Materialverhaltens Magnetorheologischer Fluide unter Verwendung der Fourier-Transformations Rheologie



λογος

Modellierung des Materialverhaltens Magnetorheologischer Fluide unter Verwendung der FOURIER-Transformations Rheologie

Der Fakultät Maschinenwesen
der Technischen Universität Dresden
zur
Erlangung des akademischen Grades
Doktoringenieur (Dr.-Ing.)
vorgelegte Dissertation

Dipl.-Ing. Martin Boisly (geb. Obst)
geboren am 9. Mai 1984 in Dresden

Tag der Einreichung: 4. Juli 2017
Tag der Verteidigung: 28. Juni 2018

1. Gutachter: Prof. Dr.-Ing. habil. Volker Ulbricht
2. Gutachter: Prof. Dr. rer. nat. habil. Stefan Odenbach

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.d-nb.de abrufbar.

©Copyright Logos Verlag Berlin GmbH 2018
Alle Rechte vorbehalten.

ISBN 978-3-8325-4751-6

Logos Verlag Berlin GmbH
Comeniushof, Gubener Str. 47,
10243 Berlin
Tel.: +49 (0)30 42 85 10 90
Fax: +49 (0)30 42 85 10 92
INTERNET: https://www.logos-verlag.de

Vorwort des Autors

Die vorliegende Arbeit entstand während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Festkörpermechanik der Technischen Universität Dresden im Rahmen des Spitzentechnologieclusters ECEMP – European Centre for Emerging Materials and Processes Dresden.

Für die Unterstützung über all die Jahre gilt meinem Betreuer Prof. Dr.-Ing. habil. Volker Ulbricht ein besonderer Dank. Durch sein mir entgegengebrachtes Vertrauen legte er den Grundstein für das Gelingen dieser Arbeit. Gleichermaßen verdanke ich ihm den wissenschaftlichen Freiraum, der ein kreatives Auseinandersetzen und das tiefgründige Bearbeiten des Themas überhaupt erst ermöglichte.

Prof. Dr.-Ing. habil. Markus Kästner danke ich für seinen wissenschaftlichen Einsatz. Seinen intensiven Forschungsaktivitäten ist es zu verdanken, dass ich mich seit meiner Zeit als studentische Hilfskraft vielfältigen und interessanten Aufgabestellungen zum Thema Materialmodellierung widmen konnte.

Bei Prof. Dr. rer. nat. habil. Stefan Odenbach möchte ich mich für die Einführung in die Welt der Rheologie und magnetorheologischer Materialien bedanken. Ebenso danke ich ihm für das Interesse an meiner Arbeit und die Bereitschaft, ein zweites Gutachten zu verfassen.

Ein entscheidender Faktor zum Gelingen dieser Arbeit war und ist die angenehme Arbeitsatmosphäre mit Dr.-Ing. Jörg Brummund. Seine ruhige und besonnene Art hat mich über all die Jahre begleitet und immer wieder eingefangen. Sie hat mich als Mensch ebenso geprägt, wie die zahlreichen Gespräche und der kreative Gedankenaustausch. Mit seinen außergewöhnlichen fachlichen Fähigkeiten stand mir Jörg stets mit Rat und Tat zur Seite. Diese haben sowohl zum eleganten Lösen mathematischer Teilprobleme als auch zum Klären grundlegender Fragestellungen beigetragen. Für die fachlichen Diskussionen, die mich in meiner wissenschaftlichen Arbeit prägten, bin ich ihm sehr dankbar.

Bei meinen Kollegen bedanke ich mich für das angenehme Arbeitsklima und die gute Zusammenarbeit. Seit dem Hauptstudium in der Fachrichtung Angewandte Mechanik habe ich von der guten Lehrausbildung und der kollegialen Arbeitsumgebung am Institut für Festkörpermechanik profitiert. In diesem Zusammenhang möchte ich neben meinem Betreuer Prof. Dr.-Ing. habil. Volker Ulbricht ebenso Prof. Dr.-Ing. habil. Herbert Balke, Prof. Dr.-Ing. habil. Klaus-Georg Eulitz und Prof. Dr. rer. nat. habil. Karl-Heinz Modler danken. Ohne die ermutigenden Worte und die charismatische Art von Prof. Dr.-Ing. habil. Klaus-Georg Eulitz hätte ich möglicherweise nicht das Fachstudium der Angewandten Mechanik aufgenommen. Der sachlich analytische Arbeitsstil von Prof. Dr.-Ing. habil. Herbert Balke hat mich seit der Grundlagenvorlesung zur Technischen Mechanik im ersten Semester motiviert. Gleichermaßen haben mich seine gründliche Arbeitsweise, sein kritisches Hinterfragen sowie seine ausdauernde und beharrliche Art inspiriert.

Schließlich danke ich meiner Familie für die Unterstützung sowie meinen Kindern für ihre kraftspendende Zuneigung. Es ist sowohl dem Verständins und Rückhalt meiner Frau Susann als auch ihrer Geduld zu verdanken, dass ich das Thema dieser Arbeit lange Zeit mit großem Einsatz bearbeiten konnte.

Dresden, im Juli 2018 Martin Boisly

Inhaltsverzeichnis

Inhaltsverzeichnis **i**

Nomenklatur **v**
Symbolverzeichnis v
Mathematische Symbole ix
Indizes xi
Abkürzungen xi

1 Zielstellung und Aufbau der Arbeit **1**

2 Informationen zu magnetorheologischen Fluiden und Ansätze zur Materialmodellierung **5**
2.1 Bestandteile von magnetorheologischen Fluiden 5
2.2 Zusammensetzung des verwendeten magnetorheologischen Fluids 6
2.3 Materialverhalten von Suspensionen in Abhängigkeit der Partikel Volumen Konzentration 7
2.4 Magnetorheologischer Effekt 8
2.5 Phänomenologischer fest-flüssig Übergang eines magnetorheologischen Fluids 10
2.6 Anwendungsbereich magnetorheologischer Fluide 11
2.7 Magnetorheologisches Fluid – das magnetische Analogon zum elektrorheologischen Fluid 12
2.8 Magnetomechanische Eigenschaften des verwendeten magnetorheologischen Fluids . . 13
2.9 Ansätze zur Modellierung des Materialverhaltens magnetorheologischer Fluide 14
2.10 Zweistufige phänomenologische Materialmodellierung auf Grundlage eindimensionaler Materialgleichungen rheologischer Elemente 16

3 Grundlegende Betrachtungen für die Materialmodellierung **23**
3.1 Physikalisch nichtlineares Materialverhalten im Bereich geometrisch linearer Theorie . 23
3.2 Kinematische Beschreibung von einfachem Schub 25
3.3 Gleichgewichtsrelation 30
3.4 Praktische Bestimmung der Gleichgewichtsrelation und Konsequenzen für die Modellierung 31
3.4.1 Viskoelastizität mit von Null verschiedener Gleichgewichtsspannung 32
3.4.2 Viskoelastizität mit Gleichgewichtsspannung von Null 34
3.5 Untersuchung des Materialverhaltens auf Ratenabhängigkeit 38
3.5.1 Bogenlänge u als pseudo Zeitmaßstab 38
3.5.2 Arbeitsweise der kinematischen Bogenlänge 39
3.5.3 Experimentelle Möglichkeiten zur Feststellung von Ratenabhängigkeit 40
3.6 Phänomenologische Materialklassifizierung nach HAUPT 40
3.7 Stationäre Materialfunktion für eine konstante Schubverzerrungrate 42
3.7.1 Fließkurve 42
3.7.2 Viskosität 43
3.8 Stationäre Materialfunktionen für eine sinusförmige verzerrungsgesteuerte Anregung im Bereich geometrisch linearer Theorie 46
3.8.1 Oszillatorische Scherung physikalisch kleiner Amplituden (SAOS) 48
3.8.2 Oszillatorische Scherung physikalisch großer Amplituden (LAOS) 50

3.8.3 Visualisierung des rheologischen Fingerabdrucks mittels LISSAJOUS Diagrammen im PIPKIN Raum . . . 57

4 Phänomenologische Klassifizierung von Stoffen in Festkörper, Flüssigkeiten und Materialien mit fest-flüssig Übergang 61
4.1 Viskoses und plastisches Fließen . . . 61
4.2 Bestehende Ansätze zur Klassifikation von Materialien in Festkörper und Flüssigkeiten 62
4.3 Klassifizierung von Stoffen in Festkörper, Flüssigkeiten und Materialien mit fest-flüssig Übergang . . . 65
4.3.1 Definition der Stoffklasse *Flüssigkeit* . . . 68
4.3.2 Definition der Stoffklasse *Festkörper* . . . 70
4.3.3 Definitionen für *Flüssigkeit mit Fließspannung* und *Flüssigkeit mit pseudo Fließspannung* als Teilmenge der Stoffklasse *Material mit fest-flüssig Übergang* 71

5 Charakteristische Punkte von Materialfunktionen des rCROSS-BINGHAM-HOOKE Elements 75
5.1 Konstitutive Gleichungen des rCROSS-BINGHAM-HOOKE Elements . . . 75
5.2 Numerische Implementierung des rCROSS-BINGHAM-HOOKE Elements . . . 77
5.3 Materialantwort des rCROSS-BINGHAM-HOOKE Elements für eine konstante Schubverzerrungsrate . . . 81
5.4 Verhalten des rCROSS-BINGHAM-HOOKE Elements unter verzerrungsgeregelter sinusförmiger Anregung mit physikalisch großer Amplitude . . . 84
5.4.1 FOURIER Transformierte in Abhängigkeit der Schubverzerrungsamplitude für konstante Kreisfrequenzen . . . 88
5.4.2 FOURIER Transformierte in Abhängigkeit der Kreisfrequenz für konstante Schubverzerrungsamplitude . . . 97

6 Charakteristische Punkte von Materialfunktionen des endochronen MAXWELL Elements 103
6.1 Korrespondenzprinzip zum Ableiten endochroner Materialgesetze . . . 104
6.2 Konstitutive Gleichungen des endochronen MAXWELL Elements . . . 104
6.3 Materialantwort des endochronen MAXWELL Elements für eine konstante Schubverzerrungsrate . . . 106
6.4 Verhalten des endochronen MAXWELL Elements unter verzerrungsgeregelter sinusförmiger Anregung mit physikalisch großer Amplitude . . . 109

7 Konzept und Identifikation der Fließspannung 117
7.1 Fließspannung als phänomenologischer Materialparameter . . . 117
7.2 Fließkurve zur Extrapolation auf die dynamische Fließspannung . . . 119
7.3 Verzerrungsrampe zur Identifizierung der statischen Fließspannung . . . 120
7.4 Spannungsrampe zur Bestimmung der statischen Fließspannung . . . 122
7.5 Amplitudensweep zur Identifizierung der statischen Fließspannung . . . 125
7.6 LISSAJOUS Diagramme im PIPKIN-Raum zur Bestimmung der statischen Fließspannung 128
7.7 Relaxationsversuche zum Ermitteln der statischen Fließspannung . . . 128
7.8 Kriechversuche zur Identifizierung der statischen Fließspannung . . . 129
7.9 Identifikation der Fließspannung einer magnetorheologischen Flüssigkeit . . . 130

8 Modellierung des Materialverhaltens magnetorheologischer Fluide unter einfachem Schub 131
8.1 Modellierung des Materialverhaltens eines magnetorheologischen Fluids ohne dem Einfluss eines äußeren Magnetfelds . . . 131
8.1.1 Identifikationsstrategie zur bestmöglichen Modellierung von Speicher- und Verlustmodul . . . 132
8.1.2 Identifikationsstrategie zur bestmöglichen Modellierung der Fließkurve . . . 133
8.2 Modellierung des Materialverhaltens eines magnetorheologischen Fluids unter dem Einfluss eines äußeren Magnetfeldes auf Basis des rCROSS-BINGHAM-HOOKE Elements . 135
8.2.1 Qualitativer Modellierungsschritt – Entwicklung einer Modellstruktur . . . 135
8.2.2 Quantitative Modellierung – Identifikation der Materialparameter . . . 136

8.2.3 Vergleich der Messungen mit Modellvorhersagen . . . 144
8.3 Modellierung des Materialverhaltens eines magnetorheologischen Fluids unter dem Einfluss eines äußeren Magnetfelds auf Basis des PRANDTL Elements . . . 146
8.3.1 Qualitativer Modellierungsschritt – Entwicklung einer Modellstruktur . . . 146
8.3.2 Quantitative Modellierung – Identifikation der Materialparameter . . . 147
8.3.3 Vergleich der Messungen mit Modellvorhersagen . . . 150
8.4 Modellierung des Materialverhaltens eines magnetorheologischen Fluids unter dem Einfluss eines äußeren Magnetfelds auf Basis des endochronen MAXWELL Elements . . . 152
8.4.1 Qualitativer Modellierungsschritt – Entwicklung einer Modellstruktur . . . 152
8.4.2 Quantitative Modellierung – Identifikation der Materialparameter . . . 153
8.4.3 Vergleich der Messungen mit Modellvorhersagen . . . 156
8.5 Auswertung und Gültigkeitsbereich der Modellierungsansätze . . . 158

9 Modellierung des Materialverhaltens eines magnetorheologischen Komposites 161
9.1 Phänomenologische Modellierung des Materialverhaltens eines Polyurethan Schaumstoffs 162
9.2 Materialmodell eines magnetorheologischen Fluids unter Berücksichtigung geometrischer Restriktionen für die Simulation des Verhaltens eines magnetorheologischen Komposites . . . 164
9.3 Simulation des Druckverhaltens eines magnetorheologischen Komposites bei verschiedenen Stärken der äußeren magnetischen Induktion . . . 165

10 Zusammenfassung und Ausblick 169

11 Folgerungen 173

A Anhang 181
A.1 Definition des LAGRANGEschen und EULERschen Verzerrungstensors . . . 181
A.2 Geometrische Linearisierung des LAGRANGEschen und EULERschen Verzerrungstensors 186
A.3 Linearisierung des LAGRANGEschen und EULERschen Deformationsgeschwindigkeitstensors für geometrisch linearen einfachen Schub . . . 188
A.4 Komplexe Schreibweise von LAOS in elastischer und dissipativer Interpretation . . . 189
A.4.1 Komplexe Schreibweise in dissipativer Interpretation . . . 189
A.4.2 Komplexe Schreibweise in elastischer Interpretation . . . 190
A.5 Identifikation der Spannung des endochronen MAXWELL Elements als Gleichgewichtsspannung . . . 190
A.6 LAOS-Verhalten des endochronen MAXWELL Elements . . . 191
A.6.1 Asymptotische Spannungsantwort für sinusförmige verzerrungsgeregelte Anregung . . . 191
A.6.2 Speichermodul des endochronen MAXWELL Elements . . . 193
A.6.3 Höherharmonische des endochronen MAXWELL Elements . . . 195
A.6.4 Numerische Eigenschaften der analytischen Lösungen der harmonischen Materialfunktionen . . . 197
A.6.5 Harmonische Materialfunktionen des endochronen MAXWELL Elements im Vergleich zu denen des PRANDTL Elements . . . 200
A.7 Rohdaten der Messungen zur Fließkurve sowie Speicher- und Verlustmodul einer 40 vol% Suspension aus Carbonyleisen Pulver von BASF^{TM} suspendiert in die Trägerflüssigkeit MOTUL 300V . . . 203

Literaturverzeichnis 205

Stichwortverzeichnis 237

Nomenklatur

Symbolverzeichnis

Symbol	Bedeutung	Seite
$Q(x)$	Summenverteilung als Funktion der Partikelgröße x	6
$q(x)$	Dichteverteilung als Funktion der Partikelgröße x	6
Φ	Partikel Volumen Konzentration	7
V_{part}	Volumen der Festkörperphase einer Suspension	7
V_{susp}	Gesamtvolumen der Suspension	7
$\mathbf{M}$	Magnetisierung; Tensor 1. Stufe	8
$\mathbf{F}_{\text{pre}}$	mechanische Kraft die zu einer Beanspruchung im Vorfließbereich des MRF führt; Tensor 1. Stufe	10
$\mathbf{F}_{\text{post}}$	mechanische Kraft die zu einer Beanspruchung im Nachließbereich des MRF führt; Tensor 1. Stufe	11
$\mathbf{B}$	magnetische Induktion im äußeren Magnetfeld (außerhalb magnetisierbarer Materie); Tensor 1. Stufe	13
$\mathbf{B}_{\text{i}}$	magnetische Induktion im inneren Magnetfeld (innerhalb magnetisierbarer Materie); Tensor 1. Stufe	13
$\mathbf{H}_{\text{i}}$	magnetische Feldstärke im inneren Magnetfeld (innerhalb magnetisierbarer Materie); Tensor 1. Stufe	13
x, x_1, x_2	unabhängige Variable	15, 23
y	abhängige Variable	15
t	Zeit	15
γ	Gleitung (Schubverzerrung)	17, 28
τ	Schubspannung	17
σ_{kl}	Koordinaten des technischen Spannungstensors $\boldsymbol{\sigma}$; symmetrischer Tensor 2. Stufe	17
ε_{kl}	Koordinaten des technischen Verzerrungstensors $\boldsymbol{\varepsilon}$; symmetrischer Tensor 2. Stufe	17, 187
ε	Dehnung	17
σ	Normalspannung	17
γ_{cr}	kritische Schubverzerrung; Scherung ab der sich ein rheologisches Element physikalisch nichtlinear verhält	23
$\dot{\gamma}_{\text{cr}}$	kritische Rate der Schubverzerrung; Scherrate ab der sich ein rheologisches Element physikalisch nichtlinear verhält	23
n	Laufvariable $\in \mathbb{N}$ oder $\in \mathbb{N}^+$	23, 42
$\mathbf{e}_K$	Basisvektor des Koordinatensystems zur Beschreibung der Referenzkonfiguration	25
$\mathbf{e}_k$	Basisvektor des Koordinatensystems zur Beschreibung der Momentankonfiguration	25
t_{R}	Zeitpunkt der die Referenzkonfiguration definiert	25
t_0	Anfangszeitpunkt eines Prozesses	25

Symbol	Bedeutung	Seite
$\mathbf{X}$	Ortsvektor des materiellen Punktes $\mathcal{P}$ in der Referenzkonfiguration; Tensor 1. Stufe	25
$\mathbf{x}$	unabhängige Variable *Ort* in der Momentankonfiguration; Tensor 1. Stufe	26
$\mathbf{x}_\mathcal{P}$	Trajektorie des materiellen Punktes $\mathbf{X}$; Tensor 1. Stufe	26
$\mathbf{x}(\mathbf{X} \cdot \mathbf{e}_M, t)$	Trajektorie des materiellen Punktes $\mathbf{X}$; Tensor 1. Stufe	26
$\boldsymbol{\chi}(\,)$	Vektorfunktion zur Beschreibung der Trajektorie $\mathbf{x}_\mathcal{P} = \mathbf{x}(\mathbf{X} \cdot \mathbf{e}_M, t)$ des materiellen Punktes $\mathbf{X}$	26
$\boldsymbol{\chi}^{-1}(\,)$	Vektorfunktion zur Invertierung der Trajektorie eines materiellen Punktes; Tensor 1. Stufe; beschreibt den materiellen Punkt $\mathbf{X}$ an einem festen Raumpunkt $\mathbf{x}$ zur Zeit t	26
$\mathbf{u}$	Verschiebung des materiellen Punktes $\mathbf{X}$; Tensor 1. Stufe	26
$\mathbf{b}$	Abstandsvektor zwischen Koordinatensystemen $\mathbf{e}_K$ und $\mathbf{e}_k$; Tensor 1. Stufe	26
$\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$	Platzhalter für Tensoren 2. Stufe	26
$s(t)$	Verschiebung eines materiellen Punktes innerhalb der lasteinleitenden Fläche	27
b_0	Breite eines Körpers in der Referenzkonfiguration	27
b	Breite eines Körpers in der Momentankonfiguration	27
h_0	Höhe eines Körpers in der Referenzkonfiguration	27
h	Höhe eines Körpers in der Momentankonfiguration	27
ℓ_0	charakteristische Länge eines Körpers in der Referenzkonfiguration (hier: spannungsfrei)	27, 186
m	Laufvariable $\in \mathbb{N}/\mathbb{N}^+$	30
k	Laufvariable $\in \mathbb{N}^+$	30
G	Schubmodul	32
η	Viskosität	32
α	Relaxationszeit (Zeitkonstante)	32
$f_\gamma(t)$	Funktion zur Beschreibung des Zusammenhangs zwischen der Zeit t (unabhängige Variable) und der Schubverzerrung (Gleitung) γ (abhängige Variable)	38
u	kinematische Bogenlänge	38
$f_u(t)$	Funktion zur Beschreibung des Zusammenhangs zwischen der Zeit t (unabhängige Variable) und der Bogenlänge u (abhängige Variable)	38
$f(\,)$	Funktion von ( ); auch mit Inidizes gebräuchlich $f_1(\,)$, $f_2(\,)$, $f_3(\,)$	39, 53
$\dot{\bar{\gamma}}$, $\dot{\bar{\gamma}}_1$, $\dot{\bar{\gamma}}_2$	konstante Scherrate	42
i	Laufvariable $\in \mathbb{N}/\mathbb{N}^+$	42
τ_∞	eingeschwungener Zustand („steady state“) der Schubspannung bezüglich einer Anregung mit konstanter Scherrate	42
$\tau_{\infty.\mathrm{meas}}$	im Experiment gemessene Fließkurve	42
Δt	Zeitintervall	43
η_{dyn}	dynamische Viskosität	43
η_{diff}	differentielle Viskosität	43
$\eta_{0.(\,)}$	Wert der Nullviskosität (allgemein)	44
$\eta_{0.\mathrm{dyn}}$	Nullviskosität der dynamischen Viskosität	44
E	Elastizitätsmodul	46
E_{diff}	differentieller Elastizitätsmodul	46
$\hat{\gamma}$	Amplitude einer sinusförmigen Schubverzerrung	47
ω	Kreisfrequenz einer sinusförmigen Anregung	47
ϕ_0	Phasenverschiebung der Sinusfunktion	47
j	imaginäre Einheit	47

Symbol	Bedeutung	Seite
$\tilde{t}_0$	Zeitpunkt ab dem eine Systemantwort bezüglich einer sinusförmigen Anregung im eingeschwungenen Zustand („steady state“) ist	47
T	Periodendauer einer sinusförmigen Funktion; $T = \frac{2\pi}{\omega}$	47
G'	Speichermodul	48
G''	Verlustmodul	48
$\tau_{\tilde{\infty}}$	eingeschwungener Zustand („steady state“) der Schubspannung bei einer sinusförmigen verzerrungsgeregelten Anregung	48
G^*	komplexer Modul	48
η'	Materialfunktion bezüglich einer sinusförmigen verzerrungsgeregelten Anregung	49
η''	Materialfunktion bezüglich einer sinusförmigen verzerrungsgeregelten Anregung	49
η^*	komplexe Viskosität	49
a_k, b_k	FOURIER Koeffizienten	51
I_k	Intensität der k-ten FOURIER Koeffizienten	55
ϕ_k	Phasenverschiebung der k-ten Intensität I_k zur Sinus-Funktion	55
$\tilde{\phi}_k$	Phasenverschiebung der k-ten Intensität I_k zur Kosinusfunktion	55
$\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3$	Steuergrößen zur Beschreibung des Abbruchkriteriums eines iterativen Prozesses	56
τ_y	Fließspannung	70, 76
K_1	Materialparameter des rCROSS Elements (Boisly et al. 2015)	75
η_∞	differentielle Viskosität des rCROSS Elements (Boisly et al. 2015) für $\dot{\gamma} \gg \frac{1}{K_1}$	75
ξ	Parameter zur Beschreibung der Vorfließbereichsspannung des Reibelements innerhalb einer Parallelschaltung	76
F	Fließfunktion	76
λ	innere Variable	76
α_0	Relaxationszeit $\frac{\eta_0}{G}$ des rCROSS-MAXWELL Elements (Boisly et al. 2015; Gl. 63)	76
α_∞	Relaxationszeit $\frac{\eta_\infty}{G}$ des rCROSS-MAXWELL Elements (Boisly et al. 2015; Gl. 64)	76
$g(\ )$	Gleichung nichtlinear für $(\ )$; wird mittels dem NEWTON Verfahren gelöst	79
q	Iterationsindex	79
A_{abs}	absolutes Abbruchkriterium des NEWTON Verfahrens	79
A_{rel}	relatives Abbruchkriterium des NEWTON Verfahrens	79
$\dot{\tilde{\gamma}}_{\text{c.1}}$	maximal mögliche Scherrate für das rCROSS Element (Boisly et al. 2015; Gl. 30), um in einem Versuch konstanter Scherrate „rein“ NEWTONsches Verhalten mit Viskosität η_0 sicherzustellen; ist über die Fließkurve definiert	82
$\dot{\tilde{\gamma}}_{\text{c.2}}$	minimal notwendige Scherrate für das rCROSS Element (Boisly et al. 2015; Gl. 34), um in einem Versuch konstanter Scherrate „rein“ NEWTONsches Verhalten mit Viskosität η_∞ sicherzustellen; ist über die Fließkurve definiert	82
$\dot{\gamma}_{\text{c.3}}$	minimal notwendige Scherrate für das rCROSS Element (Boisly et al. 2015; Gl. (48)), um in einem sinusförmigen dehnungsgesteuerten Versuch „rein“ NEWTONsches Verhalten mit Viskosität η_∞ sicherzustellen; hängt vom Parameter h ab	90
h	von κ_3 abhängiger Parameter zur Definition von $\dot{\gamma}_{\text{c.3}}$	90
$G'_{\text{m}.\infty}$	Speichermodul eines MAXWELL Elements der Viskosität $\eta = \eta_\infty$ nach (Boisly et al. 2015; Gl. (82))	90
$G''_{\text{m}.\infty}$	Verlustmodul eines MAXWELL Elements der Viskosität $\eta = \eta_0$ nach (Boisly et al. 2015; Gl. (83))	90

Symbol	Bedeutung	Seite
$G'_{\mathrm{m}.0}$	Speichermodul eines MAXWELL Elements der Viskosität $\eta = \eta_0$ nach (Boisly et al. 2015; Gl. (80))	90
$G''_{\mathrm{m}.0}$	Verlustmodul eines MAXWELL Elements der Viskosität $\eta = \eta_0$ nach (Boisly et al. 2015; Gl. (81))	90
δ_{kK}	KRONECKER Delta	103
β	Pseudofließspannung des endochronen MAXWELL Elements	104
l	Laufvariable $\in \mathbb{N}/\mathbb{N}^+$	113
$\bar{n}$	Laufvariable $\in \mathbb{N}/\mathbb{N}^+$	113
θ	akkumulierter Winkel in Radiant für konstante Kreisfrequenz ω; $\theta = \omega t$	114
τ_{yd}	dynamische Fließspannung	119
τ_{ys}	statische Fließspannung	119
$\dot{\tilde{\tau}}$	konstante Spannungsrate	122
γ_{y}	Scherung zum Fließbeginn	126
ξ	Parameter zur Beschreibung der Vorfließbereichsspannung des Reibelements	147
F_z	Koordinate des Kraftvektors **F** in z-Richtung	163
u_z	Koordinate des Verschiebungsvektors **u** in z-Richtung	163
s_{kl}	Koordinaten des technischen Spannungsdeviators **s**	163
e_{kl}	Koordinaten des technischen Verzerrungsdeviators **e**	163
ν	Querkontraktionszahl	163
K	Kompressionsmodul	163
η_G	Viskosität zur Beschreibung des Schubverhaltens	163
η_E	Viskosität zur Beschreibung des Zug- Druckverhaltens	163
η_K	Viskosität zur Beschreibung des Kompressionsverhaltens	163
u_x	Koordinate des Verschiebungsvektors **u** in x-Richtung	165
u_y	Koordinate des Verschiebungsvektors **u** in y-Richtung	165
E_{MR}	Verhältnis zwischen gemessener Druckkraft mit und ohne Feldeinfluss zur Quantifizierung des magnetorheologischen Effektes	167
F, F_{kL}	Deformationsgradient; Tensor 2. Stufe	181
H, $u_{k,L}$	materieller Verschiebungsgradient; Tensor 2. Stufe	181
Q_{kK}	Matrix der Tansformationskoeffizienten	182
1	Einheitstensor zweiter Stufe	182
$\mathbf{F}^{-1}$, F_{Kl}^{-1}	inverser (räumlicher) Deformationsgradient; Tensor 2. Stufe	183
h, $u_{K,l}$	inverser (räumlicher) Verschiebungsgradient; Tensor 2. Stufe	183
E, E_{KL}	LAGRANGEscher Verzerrungstensor; Tensor 2. Stufe	183
e, e_{kl}	EULERscher Verzerrungstensor; Tensor 2. Stufe	184
D, D_{KL}	LAGRANGEscher Deformationsgeschwindigkeitstensor; Tensor 2. Stufe	185
L, L_{kl}	Geschwindigkeitsgradient; Tensor 2. Stufe	185
v	Geschwindigkeit; Tensor 1. Stufe	185
d, d_{kl}	EULERscher Deformationsgeschwindigkeitstensor; Tensor 2. Stufe	185
C	Integrationskonstante	194

Mathematische Symbole

Symbol	Bedeutung	Seite
$\mathbb{N}$	Raum der natürlichen Zahlen	vi
$(\,)$	Platzhalter	vii, 183
Ψ	Linearoperator	23
$\mathcal{P}$	materieller Punkt	25
$\mathcal{B}$	Körper	25
$(\,)^{-1}$	Inverse des Tensors 2. Stufe $(\,)$	26, 183
$(\,)\cdot(\,)$	einfache Verjüngung von Tensoren	26
$\|(\,)\|$	Norm von $(\,)$	28
$\|(\,)\|$	Betrag von $(\,)$	28
$\mathrm{MAX}\{(\,)\}$	Maximum von $(\,)$	33
$(\,)\lesssim[\,]$	$(\,)$ ist geringfügig kleiner als $[\,]$	36
$(\,)^{\mathsf{T}}$	Transponierte des Tensors 2. Stufe $(\,)$	42, 181
$(\,)\|^{\cdots}$	Auswertung von $(\,)$ unter Beachtung von $\ldots$	42
$(\,)\|_{\cdots}$	Auswertung von $(\,)$ unter Beachtung von $\ldots$	42
$\underline{(\,)}$	mathematischer Spaltenvektor	42
$\underline{(\,)}^{i}$	i-te Komponente eines mathematischen Vektors $\underline{(\,)}$	42
$\forall$	für alle	43
$\dot{(\,)}$	für die Funktion $(\,)(t)$ einer Unbekannten t gilt $\dot{(\,)}=\frac{d(\,)}{dt}$; für die kontinuumsmechanische Feldgröße $(\,)(\mathbf{x},t)$ gilt $\dot{(\,)}=\frac{\partial(\,)}{\partial t}$	47, 184
$\mathfrak{I}(\,)$	Imaginärteil von $(\,)$	47
$\mathfrak{R}(\,)$	Realteil von $(\,)$	47
$\mathrm{STEADYSTATE}\{\,\}$	Operator definiert den eingeschwungenen Zustand; er filter jeden Beitrag von $\{\,\}$, der für $t\to\infty$ zu Null strebt	47
$\mathbb{N}^{+}$	Raum der positiven natürlichen Zahlen	51
$\overline{\mathrm{sign}}(\,)$	Funktion basierend auf der Signum-Funktion	75
$\mathrm{sign}(\,)$	Signum-Funktion	77
δ	DIRAC Funktion	81
$(\,)\|_{\omega/i}$	Auswertung von $(\,)$ für die Kreisfrequenz von MODE ω/i	89
$\mathfrak{F}\{(\,)\}$	Operator gibt mathematische Funktionsbeschreibung von $(\,)$ aus	89
$\gg$	viel größer als	91
$\mathrm{MIN}\{(\,)\}$	Minimum von $(\,)$	97
$(\,)\|_{\hat{\gamma}/i}$	Auswertung von $(\,)$ für die Scheramplitude von MODE $\hat{\gamma}/i$	98
$\ll$	viel kleiner als	98
$f'(\,)$	Ableitung von $f(\,)$ nach $(\,)$: $f'(\,)=\frac{df(\,)}{d(\,)}$ (Ableitungsoperator gilt nicht bei G', G'', η' und η'', für welche $'$ zum Symbol gehört)	105
$\mathrm{EXT}\{(\,)\}$	Extrapolation von $(\,)$ zu $\dot{\hat{\gamma}}\to 0$	119
$(\,)\gtrsim[\,]$	$(\,)$ ist geringfügig größer als $[\,]$	122
$\widetilde{\mathrm{sign}}(\,)$	Funktion basierend auf der Signum-Funktion	147
$\boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{X}}\otimes(\,)$	Ableitung nach materiellen Koordinaten $\mathbf{X}$ in symbolischer Notation	181
$(\,)_{(\,),N}$	Ableitung nach materiellen Koordinaten in Koordinatenschreibweise	181
$\boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{x}}\otimes(\,)$	Ableitung nach räumlichen Koordinaten $\mathbf{x}$ in symbolischer Notation	183
$(\,)_{(\,),n}$	Ableitung nach räumlichen Koordinaten in Koordinatenschreibweise	183
$\mathring{\mathbf{A}}$	materielle Ableitung	184
$(\,)!$	Fakultätsoperator; $x!=x\cdot(x-1)\cdot(x-2)\cdot(\ldots)\cdot 1$	198

Indizes

Symbol	Bedeutung	Seite
$(\,)_{\mathrm{pre}}$	eine dem Vorfließbereich zugeordnete Größe $(\,)$	10
$(\,)_{\mathrm{post}}$	eine dem Nachfließbereich zugeordnete Größe $(\,)$	11
$(\,)_{\mathrm{R}}$	Größe $(\,)$ bezieht sich auf die Referenzkonfiguration	25
$(\,)^{\mathrm{ov}}$	Spannung $(\,)$ ist eine Überspannung	30
$(\,)^{\mathrm{eq}}$	Spannung $(\,)$ ist eine Gleichgewichtsspannung	30
$(\,)_{\mathrm{m}}$	Größe $(\,)$ bezieht sich auf ein MAXWELL Element	32
$(\,)_{\mathrm{max}}$	Maximum von $(\,)$	36
$(\,)_{\mathrm{min}}$	Minimum von $(\,)$	36
$(\,)_{\mathrm{meas}}$	$(\,)$ messtechnisch erfasste Größe	42
$(\,)_{\mathrm{o}}$	$(\,)$ ist eine ungerade Funktion	53
$(\,)_{\mathrm{e}}$	$(\,)$ ist eine gerade Funktion	53
$(\,)_{\mathrm{s}}$	Größe $(\,)$ bezieht sich auf eine HOOKEsche Feder	75
$(\,)_{\mathrm{d}}$	Größe $(\,)$ bezieht sich auf einen NEWTONschen Dämpfer	75
$(\,)_{\mathrm{f}}$	Größe $(\,)$ bezieht sich auf ein Reibelement (Boisly et al. 2014a)	75
$(\,)_{\mathrm{b}}$	Größe $(\,)$ bezieht sich auf ein BINGHAM Element (Boisly et al. 2014a)	75
$(\,)_{\mathrm{cbh}}$	Größe $(\,)$ bezieht sich auf ein rCROSS-BINGHAM-HOOKE Element	75
$(\,)^{\mathrm{trial}}$	„trial“-Schritt unter Annahme von elastischem Materialverhalten	78
$(\,)_{\mathrm{c}}$	Größe $(\,)$ bezieht sich auf ein rCROSS Dämpfer (Boisly et al. 2015)	82
$(\,)_{\mathrm{p}}$	Größe $(\,)$ bezieht sich auf ein PRANDTL Element (Boisly et al. 2014b)	89
$(\,)_{\mathrm{cm}}$	Größe $(\,)$ bezieht sich ein rCROSS-MAXWELL Element (Boisly et al. 2015)	121
$(\,)_{\mathrm{model}}$	$(\,)$ über eine Modellvorhersage berechnete Größe	133
$(\,)^{G'}$	Größe $(\,)$ wird aus Messungen zum Speichermodul G' ermittelt	137
$(\,)^{G''}$	Größe $(\,)$ wird aus Messungen zum Verlustmodul G'' ermittelt	137
$(\,)^{\tau_{\mathrm{yd}}}$	Berechnung der Größe $(\,)$ mittels der dynamischen Fließspannung τ_{yd}	138
$(\,)^{\eta_0}$	Berechnung der Größe $(\,)$ mittels der Nullviskosität η_0	139
$(\,)^{\mathrm{lin}}$	geometrisch linearisierte Größe von $(\,)$	186

Abkürzungen

Abkürzung	Bedeutung	Seite
MRF	magnetorheologisches Fluid	1
MR	magnetorheologisch	1
PU	Polyurethan	1
MRK	magnetorheologischer Kompositwerkstoff	1
ERF	elektrorheologisches Fluid	1
S.	Seite; Abkürzung in Quellennachweis	2
Absch.	Abschnitt; Abkürzung in Quellennachweis	2
CIP	Carbonyl Eisen Pulver	3
FE	Finite Elemente	3
SEM	Rasterelektronenmikroskopie	6
Abb.	Abbildung; Abkürzung in Quellennachweis	6
Gl.	Gleichung; Abkürzung in Quellennachweis	8
FF	Ferrofluide	10
LVE	linear viskoelastisch	58
PTFE	Polytetrafluoroethylen	103

1. Zielstellung und Aufbau der Arbeit

Ziel dieser Arbeit ist die Modellierung des makroskopischen Materialverhaltens eines *magnetorheologischen Komposit* (MRK). Das MRK besteht aus einem offenzelligen Polyurethan (PU) Schaum mit gerichteten Hohlraumstrukturen, welche mit einem *magnetorheologischen Fluid* (MRF) befüllt sind. Auf die Herstellung des MRK sei an dieser Stelle nicht weiter eingegangen. Sie ist in Dohmen et al. (2014) detailliert erklärt. Die mehrskalige Betrachtung des hierarchischen Werkstoffaufbaus ist in Abbildung 1.1 schematisch dargestellt. Die Bestandteile des MRK sind die polymere Matrix inklusive Lufteinschlüssen

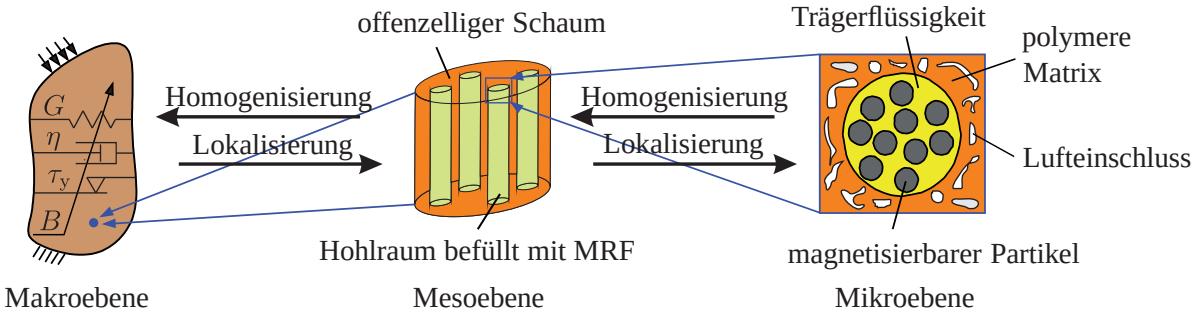


Abbildung 1.1: Mehrskalige Betrachtung des hierarchischen Werkstoffaufbaus eines magnetorheologischen Komposites, bestehend aus einem Polyurethan Matrixwerkstoff mit vier zylinderförmigen Hohlraumstrukturen, die nach Dohmen et al. (2014) mit einem magnetorheologischen Fluid befüllt sind.

und die in eine Trägerflüssigkeit eingebrachten magnetisierbaren Partikel. Diese elementaren Bestandteile sind auf der Mikroebene vollständig aufgelöst. Die vier zylinderförmigen Hohlraumstrukturen des MRK sind auf der Mesoebene zu erkennen. Sie sind mit MRF befüllt und verleihen dem Komposit magnetorheologische (MR) Eigenschaften. Unter *magnetorheologischen Eigenschaften* versteht man die Veränderbarkeit der Materialeigenschaften in Abhängigkeit eines Magnetfeldes. Dieser Effekt wird deshalb als *magnetorheologischer Effekt* bezeichnet. Er ist in Abbildung 1.1 durch die auf der Makroebene magnetisch veränderbaren elastischen, viskosen und reibungsbehafteten Eigenschaften schematisch dargestellt.
Die Modellierung des effektiven Materialverhaltens setzt die konstitutive Beschreibung sowohl des Matrixwerkstoffs als auch des MRF voraus. Weil es in der Literatur ausreichend viele Materialgesetze zur Beschreibung des mechanischen Verhaltens von Polymeren [1] gibt, ist diese Arbeit auf die Modellierung des Materialverhaltens magnetorheologischer Fluide fokussiert.
Allgemeine Informationen zu magnetorheologischen Fluiden sowie die in dieser Arbeit angewendete Strategie zur Materialmodellierung werden in Abschnitt 2 erklärt. Die Bestandteile von MRF sind in Abschnitt 2.1 vorgestellt. Die Zusammensetzung des in dieser Arbeit verwendeten MRF ist in Abschnitt 2.2 hinterlegt. Auf das von der Partikel Volumen Konzentration abhängige Verhalten wird in Abschnitt 2.3 eingegangen. Im Anschluss dessen wird auf den Wirkmechanismus des MR Effekts (Abschnitt 2.4) sowie den aus phänomenologischer Sicht definierten fest-flüssig Übergang (Abschnitt 2.5) eingegangen. Es folgen in Abschnitt 2.6 die Anwendungsbereiche von MRF. Die Parallelen zu elektrorheologischen Fluiden (ERF) werden in Abschnitt 2.7 aufgezeigt, um Erkenntnisse auch zur Modellierung für MRF zu nutzen. Die magnetischen und mechanischen Eigenschaften der in dieser Arbeit verwendeten magnetorheologischen Flüssigkeit werden in Abschnitt 2.8 vorgestellt. Um diese abbilden zu können, werden in Abschnitt 2.9 Ansätze zur Modellierung des Materialverhaltens magnetorheologischer Fluide diskutiert. Im Hinblick auf

[1] (Tschoegl 1989), (Schwarzl 1990), (Lion 1994), (Keck 1998), (Sedlan 2000), (Nasdala 2000) (Lion 2000b), (Haupt 2002), (Kardelky 2004), (Kästner 2010)

die Modellierung des makroskopischen Materialverhaltens des magnetorheologischen Komposites, bietet sich für MRF die phänomenologische Materialbeschreibung an. Eine zweistufige phänomenologische Modellierungsstrategie auf der Grundlage eindimensionaler Materialbeziehungen von rheologischen Elementen wird in Abschnitt 2.10 vorgestellt. Die phänomenologische Materialmodellierung erfolgt in dieser Arbeit auf der Grundlage von Scherversuchen. Dazu werden die eindimensionalen Zusammenhänge zwischen der Schubspannungskoordinate τ und der zugeordneten Schubverzerrung γ[2] für Versuche sowohl mit konstanter Scherrate als auch sinusförmiger Scherung im Bereich *geometrisch linearer Theorie* ausgewertet. Die Abfolge von Teilarbeitsschritten einer zweistufigen Modellierungsstrategie ist in Abbildung 2.8 gegeben. Entsprechend werden Schwerpunkte dieser Arbeit definiert. Dazu gehören die Berechnung der Modellvorhersagen für die Fließkurve und für FOURIER Transformierte. Sie bilden die Voraussetzung zur Entwicklung von Materialmodellen auf Grundlage von Messdaten. Diese Arbeit zielt ebenfalls auf die Identifizierung sogenannter charakteristischer Punkte von Materialfunktionen ab. Diese charakteristischen Punkte dienen als Startwerte für eine physikalisch motivierte Parameteridentifikation, welche rein mathematisch arbeitende nichtlineare Optimierungsverfahren ersetzt. Weitere Schwerpunkte sind die wenn möglich analytische Berechnung von Materialantworten zu gegebenen Lasten, die Klassifikation von Materialien in die drei Stoffklassen *Festkörper, Flüssigkeit* und *Material mit fest-flüssig Übergang* sowie die Motivation zur Definition der Viskosität als differentielle Viskosität.

In Abschnitt 3 werden die für diese Arbeit benötigten grundlegenden Aspekte zur Materialmodellierung betrachtet. Auf die kinematische Beschränkung hinsichtlich der Modellierung von physikalisch nichtlinearem Materialverhalten im Bereich geometrisch linearer Theorie wird in Abschnitt 3.1 eingegangen. Anschließend werden in Abschnitt 3.2 die kinematischen Beziehungen für einfachen Schub ausgewertet. Die Bestimmung der Gleichgewichtsspannung wird in Abschnitt 3.3 diskutiert. Sie beruht nach Haupt (2002) auf der additiven Aufteilung der Gesamtspannung in eine Gleichgewichts- und Überspannung. Auf praktische Aspekte hinsichtlich der Interpretation von Experimenten wird in Abschnitt 3.4 eingegangen. Dabei werden die Gedanken von HAUPT zur Bestimmung der Gleichgewichtsrelation fortgeführt und auf alle Stoffklassen angewendet. Als Ergebnis wird die Gleichberechtigung zwischen der Bestimmung der Gleichgewichtsrelation mittels Relaxations- oder Kriechexperimenten aufgezeigt. In Abschnitt 3.5 wird eine Möglichkeit zum Nachweis von *Ratenabhängigkeit* aufgeführt. Neben der Gleichgewichtsrelation werden in Abschnitt 3.6 ratenabhängige Eigenschaften für die Einteilung von Materialverhalten nach Haupt (2002; S. 269) in die vier Materialklassen *Elastizität*, *Plastizität*, *Viskoelastizität* und *Viskoplastizität* ausgewertet. Die Materialklassifikation nach HAUPT ermöglicht eine systematische Einordnung der in dieser Arbeit verwendeten rheologischen Elemente. Die Bestimmung von Materialfunktionen rheologischer Elemente zu verzerrungsgesteuerten Anregungen, sowohl konstanter als auch oszillatorischer Scherrate, ist in den Abschnitten 3.7 und 3.8 erklärt.

Die Begriffe *verzerrungsgesteuert* und *spannungsgesteuert* werden in dieser Arbeit folgendermaßen verstanden: Sowohl theoretische als auch praktische Experimente können entweder kraft- oder verschiebungsgeregelt gesteuert werden. Bei kraftgesteuerten Versuchen sind Kräfte und/oder Momente als *äußere Belastung* beziehungsweise *äußere Anregungen* bekannt (Balke 2010b; Absch. 1.2). Verschiebung und/oder Verdrehungen stellen sich dementsprechend ein. Für verschiebungsgesteuerte Versuche werden Verschiebungen und/oder Verdrehungen als äußere Anregungen vorgegeben. Kräfte und/oder Momente werden gemessen. Daher sind die Begriffe *spannungsgeregelt* und *verzerrungsgeregelt* für homogene Feldverteilungen zutreffend (Haupt 1977; S. 139). Infolgedessen können Spannungen aus Kräften und/oder Momenten beziehungsweise Verzerrungen aus Verschiebungen und/oder Verdrehungen direkt ermittelt werden. Die Begriffe *Anregung* und *Belastung* werden im Folgenden gleichbedeutend interpretiert. Entsprechend einer analogen Argumentation unter der Voraussetzung homogener Feldverteilungen, werden in dieser Arbeit das „Messen einer Spannung“, „Messen einer Verzerrung“ sowie das „Messen einer Materialfunktion“, wie beispielsweise der Fließkurve als auch Speicher- und Verlustmodul, verstanden.

Ein Ergebnis dieser Arbeit ist die Einführung einer Stoffklassifizierung in Abschnitt 4. Sie berücksichtigt eine dritte Stoffklasse, den Materialien mit fest-flüssig Übergang, in die sich viele Vertreter von Soft Matter (weiche Materie) einordnen. Diese Stoffklasse ist eine Art Zwischenklasse von Flüssigkeiten und Festkörpern. Weil die Begriffsdefinition teilweise mit *Fließen* verknüpft ist, wird in Abschnitt 4.1 zwischen viskosem (ratenabhängigem) und reibungsbehaftetem (ratenunabhängigem) Fließen unterschieden. Um Nutzen und Notwendigkeit der Stoffklassifizierung zu motivieren, werden im Abschnitt 4.2 einige

[2] (Mezger 2010; S. 249), (Mezger 2015; S. 82)

in der Literatur bestehenden Ansätze zur Begriffsdefinition von *Festkörper* und *Flüssigkeit* präsentiert. Darauf aufbauend ergibt sich in Abschnitt 4.3 die Klassifizierung von Stoffen in drei Stoffklassen, den Festkörpern, Flüssigkeiten und Materialien mit fest-flüssig Übergang.
In den Abschnitten 5 und 6 werden rheologische Modelle untersucht, die im Anschluss zur Modellierung der in Abschnitt 2.8 dargestellten Messergebnisse eines magnetorheologischen Fluids genutzt werden. Das sogenannte rCROSS-BINGHAM-HOOKE Element wird in Abschnitt 5 eingeführt. Die theoretische Vorbetrachtung des endochronen MAXWELL Elements wird in Abschnitt 6 dargelegt. Zu Beginn werden in den Abschnitten 5.1 und 6.2 die konstitutiven Beziehungen der rheologischen Elemente hergeleitet. Weil der Autor dieser Arbeit die konstitutiven Beziehungen des rCROSS-BINGHAM-HOOKE Elements bezüglich gegebener Anregungen nicht mehr analytisch lösen konnte, wurden stattdessen numerische Lösungen berechnet. Die numerische Implementierung der Materialgleichungen des rCROSS-BINGHAM-HOOKE Elements ist in Abschnitt 5.2 erklärt. Die Materialantwort bezüglich einer konstanten Verzerrungsrate wird für das rCROSS-BINGHAM-HOOKE Element in Abschnitt 5.3 und für das endochrone MAXWELL Element in Abschnitt 6.3 hergeleitet, um die Modellvorhersage für die Fließkurve bestimmen zu können. Die Modellvorhersagen für Speicher- und Verlustmodul sowie Höherharmonische werden in den Abschnitten 5.4 und 6.4 ermittelt. Ziel dabei ist es, charakteristische Punkte der Materialfunktionen zu identifizieren, die es ermöglichen, Materialparameter rheologischer Modelle zu bestimmen, ohne rein mathematisch arbeitende nichtlineare Optimierungsverfahren zur Minimierung von Residuen verwenden zu müssen.
Ein für Materialien mit fest-flüssig Übergang entscheidender Materialparameter ist die Fließspannung beziehungsweise die pseudo Fließspannung. Weil das *Konzept der Fließspannung* in der Literatur teils kontrovers diskutiert wird, positioniert sich der Autor diesbezüglich in Abschnitt 7. Auf die Berechtigung des Konzepts der Fließspannung, im Sinne der phänomenologischen Materialmodellierung, wird in Abschnitt 7.1 näher eingegangen. Die Fließspannung wird in dieser Arbeit als phänomenologischer Materialparameter interpretiert, der im Rahmen der Materialmodellierung unter idealisierten Annahmen und Arbeitshypothesen Anwendung findet. Um die Arbeitsweise ausgewählter Methoden zur Identifizierung der Fließspannung zu untersuchen, werden diese in den Abschnitten 7.2 bis 7.8 für rheologische Modelle verschiedener Material- und Stoffklassen diskutiert.
Die Materialmodellierung eines magnetorheologischen Fluids unter einfachem Schub wird in Abschnitt 8 durchgeführt. Das in dieser Arbeit verwendete MRF hat eine Partikel Volumen Konzentration von $\Phi = 40\,\text{vol\%}$. Es besteht aus BASF^{TM} Carbonyleisen Pulver (CIP) vom Typ CC mit einem mittleren Durchmesser von einem bis fünf Mikrometer, welches in die Trägerflüssigkeit MOTUL 300V suspendiert ist. Zunächst wird in Abschnitt 8.1 das Materialverhalten ohne dem Einfluss eines äußeren Magnetfeldes modelliert. Das MRF verhält sich in diesem Fall wie eine „normale“ *Suspension*. Anschließend werden verschiedene Gesamtmodelle zur Modellierung des Materialverhaltens unter dem Einfluss eines äußeren Magnetfeldes aufgezeigt. Diese unterscheiden sich in der Wahl des viskoplastischen beziehungsweise plastischen Teilmodells, welchem ein rCROSS-MAXWELL Element (Boisly et al. 2015) parallel geschalten wird. In Abschnitt 8.2 wird das Gesamtmodell auf Basis des rCROSS-BINGHAM-HOOKE Elements aus Abschnitt 5 für die Modellierung der Messergebnisse von Abschnitt 2.8 zugrunde gelegt. Anschließend wird in Abschnitt 8.3 ein Gesamtmodell basierend auf dem PRANDTL Element (Boisly et al. 2014b) ausgewertet. Das auf dem endochronen MAXWELL Element (Abschnitt 6) aufgebaute Gesamtmodell findet in Abschnitt 8.4 Anwendung. Die Motivation für jedes dieser Modelle wird anhand deren qualitativen Eigenschaften zu Beginn des ersten Modellierungsschrittes aufgezeigt. Anschließend werden die Materialparameter mittels den in Experimenten ermittelten charakteristischen Punkten iterativ bestimmt. Die Modellvorhersagen werden mit den Messwerten verglichen und diskutiert. In Abschnitt 8.5 werden abschließend die Modellierungsstrategien evaluiert.
Somit stehen alle phänomenologischen Materialmodelle zur Beschreibung des makroskopischen Verhaltens eines magnetorheologischen Komposites unter Druckbelastung zur Verfügung. Auf der Grundlage des auf dem rCROSS-BINGHAM-HOOKE Element basierenden Gesamtmodells wird für das MRK in Abschnitt 9 ein Finite Elemente (FE) Modell im Programmsystem MSC.Marc/Mentat® erstellt. Dabei werden die geometrischen Gegebenheiten des MRK berücksichtigt, welche Annahmen hinsichtlich der Modellierung des Materialverhaltens von MRF zur Vereinfachung rechtfertigen. Als Resultat dessen wird die linearisierte Form des auf dem rCROSS-BINGHAM-HOOKE Element basierenden Gesamtmodells aus Abschnitt 8.2 ermittelt und für die Materialbeschreibung des MRF im MRK benutzt. Anschließend werden Messergebnisse und makroskopische Modellvorhersagen gegenübergestellt.

2. Informationen zu magnetorheologischen Fluiden und Ansätze zur Materialmodellierung

Magnetorheologische Fluide können in die Klasse *intelligenter Materialien* [1] eingeordnet werden [2]. Intelligente Materialien sind Stoffe, für welche mindestens eine ihrer Eigenschaften über eine äußere Stimulierung beeinflusst werden kann [3]. Das Materialverhalten eines MRF kann man mithilfe eines äußeren Magnetfeldes gezielt einstellen.

2.1 Bestandteile von magnetorheologischen Fluiden

Vom Wesen sind magnetorheologische Fluide *Suspensionen*, das heißt ein Gemisch aus festen Partikeln und einer Trägerflüssigkeit [4]. Die Partikel magnetorheologischer Fluide sind *magnetisierbar* und Mikrometer groß. Als Ausgangsmaterial für magnetisierbare Partikel werden in der Literatur verschiedene Werkstoffe verwendet. Rabinow (1948; S. 1312 ff.) erwähnt die Herstellung von MRF mittels Carbonyleisen Pulver [5], Eisenlegierung aus Eisen–Kobalt oder Eisen–Nickel (Ashour et al. 1996; S. 125), nicht-rostenden Stahlspänen, wasserstoff reduziertes Eisen und Eisenoxid (Magnetit) [6]. Carbonyleisen Pulver wird durch die thermische Trennung von Eisenpentacarbonyl hergestellt. Es ist aufgrund der großen Sättigungsmagnetisierung von $\mu_0 M_s = 2.1\,\mathrm{T}$ weit verbreitet (Vicente et al. 2011; S. 3701) [7]. Zwar ist die Sättigungsmagnetisierung von Eisen–Kobalt Legierungen größer, sie beträgt circa 2.4 T, jedoch ist die Herstellung von Carbonyleisen preiswerter [8]. Eine weitere vorteilhafte Eigenschaft von Carbonyleisen ist die „geringe“ [9] Koerzitivfeldstärke [10]. Carbonyleisen ist in guter Näherung weichmagnetisch, dass heißt die magnetische Hysterese ist vernachlässigbar [11]. Diese Eigenschaft ist zwingend notwendig für die Herstellung von ma-

[1] „There is no standard definition for smart materials, and terms such as intelligent materials, smart materials, adaptive materials, active devices, and smart systems are often used interchangeably“ (Schwartz 2002; S. 545, 860).

[2] (Kordonsky 1993; S. 395), (Jolly et al. 1996; S. 607), (Yeh und Chen 1997; S. 274), (Carlson und Jolly 2000; S. 555), (Simon et al. 2001; S. 273), (Chen und Yeh 2002b; S. 461), (Butz und von Stryk 2002; S. 3), (Schwartz 2002; S. 217, 392), (Zschunke 2005; S. 1), (Brigadnov und Dorfmann 2005; S. 29), (Chaudhuri et al. 2006; S. 261), (Harris 2011; S. 2), (Vicente et al. 2011; S. 3701)

[3] „The term *smart material* generally designates a material that changes one or more of its properties in response to an external stimulus“ (Schwartz 2002; S. 545, 860). „SMART materials (SM). Generally speaking by SMs we mean such materials whose main utility characteristics expressed by means of the magnitude of one physical field strongly depends on the magnitude of another field“ (Kaleta et al. 2009; S. 35). „What all smart materials have in common is the ability to convert one type of energy to another. [...] A key to practical applications is the fact that this conversion can occur in a controlled manner. Materials that manifest this property of responding in a controllable fashion to changes in the environment are commonly termed smart materials“ (Bhavsar et al. 2008; S. 32).

[4] (Hackley und Ferraris 2001; S. 3), (Figura 2004; S. 59), (Verein Deutscher Ingenieure 2006; S. Lah 1), (Pal 2007; S. 73), (Sato et al. 2013; S. 2)

[5] (Harvey 1953), (Ashour et al. 1996; S. 125), (Laun et al. 1996; S. 417), (Bölter und Janocha 1997; S. 149), (Volkova et al. 2000; S. 91), (Bossis et al. 2002; S. 224), (Genc und Phule 2002; S. 140), (Carlson 2002; S. 431), (Trendler 2007; S. 4967), (Samouhos und McKinley 2007; S. 433)

[6] (Harvey 1953), (Rosensweig 1982; S. 89), (Lemaire und Bossis 1991; S. 1473)

[7] (Bölter und Janocha 1997; S. 149), (Tao 2001; S. R979), (Brigadnov und Dorfmann 2005; S. 30), (Michalowsky 2006; S. 135)

[8] (Ashour et al. 1996; S. 124), (Genc und Phule 2002; S. 141), (Zschunke 2005; S. 17), (Brigadnov und Dorfmann 2005; S. 30)

[9] (Jolly et al. 1996; Abb. 4), (Bölter und Janocha 1997; S. 149), (Bossis et al. 2002; S. 224), (Genc und Phule 2002; S. 140, Abb. 4), (Michalowsky 2006; S. 135), (Chaudhuri et al. 2006; S. 261), (Lopez-Lopez et al. 2009; Abb. 2)

[10] (Racho et al. 1987; S. 384), (Recknagel 1990; S. 314), (O'Handley 2000; S. 21), (Kories und Schmidt-Walter 2004; S. 80), (Stöcker 2005; S. 445), (Fasching 2005; S. 434), (Michalowsky 2006; S. 45), (Hering et al. 2007; S. 374)

[11] (O'Handley 2000; S. 21), (Kories und Schmidt-Walter 2004; S. 81), (Stöcker 2005; S. 444), (Brandt und Dahmen 2005; S. 270), (Fasching 2005; S. 441), (Michalowsky 2006; S. 131), (Hering et al. 2007; S. 376)

gnetorheologischen Fluiden, da sie die reversible Schaltbarkeit des magnetorheologischen Effektes sowie einen großen Anwendungsbereich sicherstellt (Lord Corporation 2011).
Das Trägerfluid ist nicht-magnetisierbar [12] und kann aus Mineralöl [13], synthetischem Öl [14], Silikonöl[15], auf Petroleum basierten Öl [16] oder aus Wasser [17] bestehen. Im Allgemeinen können Flüssigkeiten Verwendung finden, die über einen „großen“ Bereich temperaturstabil und nicht entflammbar sind. Damit der magnetorheologische Effekt eines Probekörpers im Vergleich zum Verhalten ohne äußerem Magnetfeld nicht vernachlässigbar ist, sollte die Anfangsviskosität der Trägerflüssigkeit ausreichend „gering“ sein [18]. Darunter wird der Bereich von $\eta_0 = 0.01 - 1\,\mathrm{Pa\,s}$ verstanden.
Der Trägerflüssigkeit werden ebenfalls Additive und Stabilisatoren beigemengt, um Eigenschaften bezüglich Sedimentation, Abrasion, Agglomeration (Aggregation) und Redispergierbarkeit zu verbessern[19]. Dafür kommen thixotrope Substanzen und Tenside wie beispielsweise Xanthan, Kieselsäuregel, Stearate und Carboxylsäure infrage (Carlson und Jolly 2000; S. 556). Die Verwendung von Ölsäure wird bei Rosensweig (1982; S. 89) und Gans et al. (1999; S. 210) erwähnt. Eine Übersicht über Stabilisatoren in Abhängigkeit von der Partikel Volumen Konzentration ist bei Zschunke (2005; S. 18) zu finden.

2.2 Zusammensetzung des verwendeten magnetorheologischen Fluids

Das in dieser Arbeit untersuchte MRF beseht aus BASF^{TM} CIP CC Partikeln. Diese sind dem Motoröl MOTUL 300V untergemischt, welches bei 25°C eine dynamische Viskosität von 33 mPas besitzt (Dohmen et al. 2010; S. 207). Die *Partikel Volumen Konzentration* $\Phi = \frac{V_{\mathrm{part}}}{V_{\mathrm{susp}}}\,100\,\mathrm{vol\%}$ des MRF beträgt ungefähr $\Phi = 40\,\mathrm{vol\%}$. Dies ist ein Maß für das Verhältnis zwischen dem Partikelvolumen, V_{part}, und dem gesamten Volumen der Suspension, V_{susp}. Die nahezu spherische Gestalt der Carbonyleisen Partikel ist in Abbildung 2.1 mittels Rasterelektronenmikroskopie (SEM) gezeigt. Die SEM Aufnahme wurde von AUF DER LANDWEHR [20] erstellt und ist aus Hintze und Heinrich (2011; Abb. 1) entnommen. Die Partikelgrößenverteilung des Carbonyleisen Pulvers wurde mittels Laserbeugung von GEISSLER [21] gemessen. Dies beinhaltet die Summenverteilung $Q(x) \in [0,1]$ in Abhängigkeit der Partikelgröße x und deren Dichteverteilung $q = \frac{dQ(x)}{dx}$ in der Einheit $1/\mu\mathrm{m}$. Die Messungen aus Abbildung 2.2 wurden erstmals in Hintze und Heinrich (2011; Abb. 2) veröffentlicht. Auf der linken Achse sind diskrete Werte der Summenverteilung $Q_i(x_i)$ mit $i \in \mathbb{N}^+$ für diskrete Partikelgrößen x_i zu erkennen. Die Dichteverteilung $q_{i+1}\left(\overline{x}_{\mathrm{i}}\right) = \frac{Q(x_{i+1}) - Q(x_i)}{x_{i+1} - x_i}$ ist in Abhängigkeit der mittleren Partikelgröße $\overline{x}_{\mathrm{i}} = \frac{x_{i+1} + x_i}{2}$ bestimmt worden und ist auf der rechten Achse dargestellt. Daraus ist ersichtlich, dass der Durchmesser der meisten Partikel zwischen einem und fünf Mikrometer liegt.

[12] (Jolly et al. 1996; S. 607), (Hagenbüchle und Liu 1997; S. 7664), (Jolly et al. 1999b; S. 2037), (Tao 2001; S. R979), (Simon et al. 2001; S. 273), (Genc und Phule 2002; S. 140), (Bossis et al. 2002; S. 224), (Brigadnov und Dorfmann 2005; S. 29), (Smith 2005; S. 34), (Chaudhuri et al. 2006; S. 261), (Lopez-Lopez et al. 2006; S. 543), (Dixon 2007; S. 321), (Laun et al. 2008; S. 1049), (Harris 2011; S. 1), (Kuzhir et al. 2011a; S. 373)

[13] (Bölter und Janocha 1997; S. 149), (Carlson und Jolly 2000; S. 556), (Carlson 2002; S. 431), (Zschunke 2005; S. 17), (Brigadnov und Dorfmann 2005; S. 30), (Smith 2005; S. 34), (Dixon 2007; S. 321), (Laun et al. 2008; S. 1051), (Yang et al. 2009; S. 457), (Vicente et al. 2011; S. 3701)

[14] (Ashour et al. 1996; S. 123), (Carlson und Jolly 2000; S. 556), (Brigadnov und Dorfmann 2005; S. 30)

[15] (Lemaire et al. 1996; S. 3173), (Ashour et al. 1996; S. 123), (Bölter und Janocha 1997; S. 149), (Carlson und Jolly 2000; S. 556), (Volkova et al. 2000; S. 91), (Tao 2001; S. R979), (Bossis et al. 2002; S. 224), (Carlson 2002; S. 431), (Zschunke 2005; S. 17), (Smith 2005; S. 34), (Brigadnov und Dorfmann 2005; S. 30), (Dixon 2007; S. 321), (Vicente et al. 2011; S. 3701)

[16] (Ashour et al. 1996; S. 123), (Carlson und Jolly 2000; S. 556), (Carlson 2002; S. 431), (Brigadnov und Dorfmann 2005; S. 30), (Vicente und Ramirez 2007; S. 874), (Lopez-Lopez et al. 2008; S. 902)

[17] (Carlson und Jolly 2000; S. 556), (Zschunke 2005; S. 17), (Brigadnov und Dorfmann 2005; S. 30), (Harris 2011; S. 2), (Vicente et al. 2011; S. 3701), (Rich et al. 2012; S. 580)

[18] (Zschunke 2005; S. 17), (Ashour et al. 1996; S. 123), (Genc und Phule 2002; S. 140), (Laun und Gabriel 2007; S. 665), (Dixon 2007; S. 212, 321), (Laun et al. 2008; S. 1049), (Lord Corporation 2011)

[19] (Ashour et al. 1996; S. 125), (Bölter und Janocha 1997; S. 149), (Simon et al. 2001; S. 273), (Carlson 2002; S. 431), (Zschunke 2005; S. 18), (Lopez-Lopez et al. 2006), (Lopez-Lopez et al. 2008), (Vicente et al. 2011; S. 3701), (Lord Corporation 2011), (Rich et al. 2012; S. 580)

[20] Maria Auf der Landwehr; Leibniz-Institut für Polymerforschung Dresden e.V., Abteilung *Verarbeitungsprozesse*

[21] Uwe Geißler; Leibniz-Institut für Polymerforschung Dresden e.V., Abteilung *Polyelektrolyte und Dispersionen*

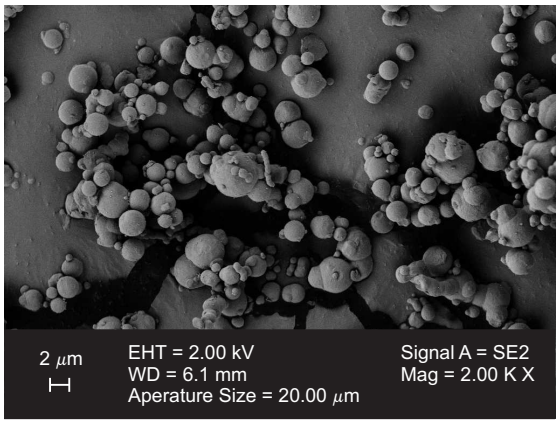


Abbildung 2.1: SEM Aufnahme von BASF^{TM} CIP CC Pulver [20]

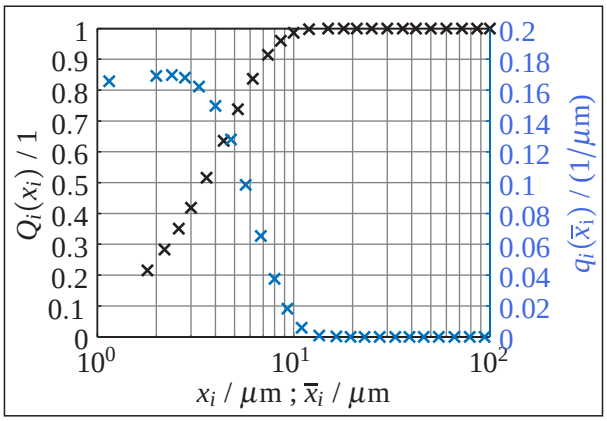


Abbildung 2.2: Partikelgrößenverteilung des BASF^{TM} CIP CC Pulver; $Q_i(x_i)$: xxx , $q_i(\overline{x}_i)$: xxx [21]

2.3 Materialverhalten von Suspensionen in Abhängigkeit der Partikel Volumen Konzentration

Weil magnetorheologische Fluide Suspensionen sind, hängen ihre Materialeigenschaften wie beispielsweise die Viskosität maßgeblich von der Partikel Volumen Konzentration ab [22]. Um das in dieser Arbeit vorgestellte makroskopische Materialverhalten von MRF qualitativ nachvollziehen zu können, ist das Materialverhalten von Suspensionen in Abhängigkeit der Partikel Volumen Konzentration im Folgenden kurz beschrieben. Beträgt die Partikel Volumen Konzentration nur maximal $\Phi \lesssim 0.03$ [23], so spricht man von *verdünnten Suspensionen* [24]. EINSTEIN [25] fand heraus, dass sie sich in guter Näherung wie NEWTONsche Fluide verhalten (Coussot 2005; S. xi), da ihre Partikel aufgrund der geringen Partikel Volumen Konzentration nicht interagieren. Bis zu einer Partikel Volumen Konzentration von $\Phi \lesssim 0.1$ kann die NEWTONsche Viskosität nach BATCHELOR [26] abgeschätzt werden. Suspensionen mit moderater Partikel Volumen Konzentration bis zur Größenordnung $\Phi \approx 0.2$ zeigen meist *viskoelastisches Materialverhalten*[27], da Partikelwechselwirkungen nicht mehr zu vernachlässigen sind. Außerdem kann ein scherinduziertes Ausrichten der Partikelstrukturen auftreten (Sato et al. 2013; S. 2), sodass sich Partikel zu Schichten anordnen, die von der kontinuierlichen Phase umgeben sind [28]. Dies wirkt sich auf makroskopischer Ebene als *Scherverdünnung* aus [29]. Mit steigender Partikel Volumen Konzentration erhält man *konzentrierte* beziehungsweise *dichte Suspensionen*, die auch als Pasten oder Schlamm bezeichnet werden [30]. Beträgt die Partikel Volu-

[22] (Barnes et al. 1989; S. 122), (Macosko 1994; S. 427), (Larson 1999; S. 268 ff.), (Barnes 2000; S. 133 ff.), (Mezger 2010; S. 48), (Tadros 2010; S. 44)

[23] (Reiner 1968; S. 229, 239), (Berkovsky 1993; S. 29, 33), (Tanner und Walters 1998; S. 119), (Larson 1999; S. 265), (Odenbach 2002b; S. 23), (Tanner 2002; S. 266), (Hess, Kröger und Fischer 2006; S. 462), (Tadros 2010; S. 86)

[24] (Sood 1991; S. 52, 57), (Tanner und Walters 1998; S. 108, 119), (Odenbach 2002b; S. 23), (Odenbach 2002a; S. 126, 127, 187), (Pan et al. 2009; S. 137), (Tadros 2010; S. 86)

[25] (Reiner 1968; S. 229, 239), (Barnes et al. 1989; S. 119), (Jones et al. 1991; S. 480), (Berkovsky 1993; S. 39), (Baus et al. 1995; S. 4), (Wrana 1996; S. 67), (Tanner und Walters 1998; S. 109), (Larson 1999; S. 265), (Odenbach 2002b; S. 23), (Tanner 2002; S. 266), (Morrison und Ross 2002; S. 513), (Pan et al. 2009; S. 137), (Tadros 2010; S. 86), (Willenbacher und Georgieva 2013; S. 18)

[26] (Barnes et al. 1989; S. 120), (Jones et al. 1991; S. 480), (Tanner und Walters 1998; S. 119), (Larson 1999; S. 265), (Odenbach 2002b; S. 23), (Tanner 2002; S. 266), (Ovarlez et al. 2006; S. 260), (Hess, Kröger und Fischer 2006; S. 462), (Lopez-Lopez et al. 2008; S. 905), (Pan et al. 2009; S. 137), (Tadros 2010; S. 86), (Willenbacher und Georgieva 2013; S. 18)

[27] (Jones et al. 1991), (Carreau et al. 1999; S. 1300), (Tadros 2010; S. 86)

[28] (Strivens 1976; S. 476), (Barnes et al. 1989; S. 119), (Schwartz 1999), (Brader 2010; Abb. 6)

[29] (Bird 1987; S. 105), (Barnes et al. 1989; S. 119), (Macosko 1994; S. 66, 85, 139), (Steffe 1996; S. 22 ff.), (Al-Zahrani 1997), (Larson 1999; S. 267), (Barnes 2000; S. 56), (Escudier et al. 2001), (Hackley und Ferraris 2001; S. 32), (Tanner 2002; Abb. 1.2), (Figura 2004; Absch. 4.3.5), (Chhabra und Richardson 2008; S. 6 ff.), (Susan-Resiga 2009), (Brader 2010; S. 11), (Mezger 2010; S. 40), (Tadros 2010; Abb. 3.9), (Paredes et al. 2011; S. 1)

[30] (Coussot 2005; S. xi), (Dzuy und Boger 1983; S. 324), (Barnes 1999; S. 137, 143), (Verein Deutscher Ingenieure 2006; S. Lah 1), (Mladenchev 2007; S. IV), (Ardakani et al. 2011; S. 1262), (Schneider et al. 2016)

men Konzentration zwischen $\Phi \approx 0.58 \ldots 0.64$ liegt die Suspension im glasartigen Zustand vor [31]. Aufgrund der „ausreichend großen“ [32] Partikel Volumen Konzentration treten Partikel mit ihren Nachbarn in Kontakt (Coussot 2005; S. 41), der auch durch einen Flüssigkeitsfilm nicht verhindert wird. Infolgedessen existiert in Kompressionsrichtung Kraftschluss zwischen Partikeln. Demnach sind Pasten aufgrund der Wechselwirkungskräfte solange nicht in der Lage zu Fließen, bis die aufgebrachte Last einen kritischen Wert übersteigt [33]. Daher besitzen Pasten Eigenschaften, die zwischen denen von klassischen Flüssigkeiten und Festkörpern liegen [34]. Sie werden aus diesem Grund als Flüssigkeit mit Fließspannung (yield stress fluid) bezeichnet (Coussot 2005; S. 22). Dieses charakteristische Verhalten wird in der Literatur auch als *Jamming* [35] bezeichnet.

2.4 Magnetorheologischer Effekt

Da die magnetisierbaren Partikel magnetorheologischer Fluide Mikrometer groß sind, bestehen sie aus mehreren *magnetischen Domänen* (WEISS Bezirke) [36]. Es handelt sich um Multidomänen Partikel. Innerhalb einer magnetischen Domäne zeigen die atomaren magnetischen Momente in dieselbe Richtung. Diese summieren sich zu dem resultierenden magnetischen Moment der magnetischen Domäne auf. In einer jungfräulichen magnetisierbaren Probe sind diese magnetischen Momente stochastisch verteilt und heben sich im Mittel weg. Die globale Magnetisierung $\mathbf{M}$ eines magnetisierbaren Partikels (Jackson 2006; Gl. (5.76)) ergibt somit den Nullvektor. [37] Ohne dem Einfluss eines äußeren Magnetfelds sind deshalb die Partikel eines MRF in dem Trägerfluid regellos angeordnet. Dies ist in der lichtmikroskopischen Aufnahme von Abbildung 2.3(a) zu erkennen. Nach dem Aufprägen eines äußeren magnetischen Feldes richten sich die magnetischen Momente in Richtung der magnetischen Feldinien aus [38] und tragen somit zu einer effektiven makroskopischen Magnetisierung bei (Jackson 2006; Gl. (5.76)). Infolgedessen verhalten sich magnetisierte Partikel wie ein magnetischer Dipol [39]. Anziehungskräfte zwischen den Partikeln führen in Abhängigkeit der Partikel Volumen Konzentration zur Ausbildung von kettenartigen Strukturen, Klustern oder einem schwachen Netzwerk [40], welche auf der lichtmikroskopischen Aufnahme von THIELSCH und BLOBEL[41] in Abbildung 2.3(b) zu erkennen sind. Der Betrag der Magnetisierung hängt von der Stärke des Magnetfeldes ab und ist durch die Sättigungsmagnetisierung begrenzt. Die Magnetisierungskurven von BASF^{TM} CIP CC Partikeln sind in Abbildung 2.6 gegeben. Somit steuert das Magnetfeld die Stärke der interpartikulären Anziehungskräfte und folglich die rheologischen Eigenschaften des MRF. Die gezielte Steuerbarkeit der Materialeigenschaften in Abhängigkeit eines äußeren Magnetfelds wird als *magne-*

[31] (Macosko 1994; S. 62), (Baus et al. 1995; S. 18, 27), (Petekidis et al. 2002; S. 5), (Nugent et al. 2007; S. 025702-1), (Peker und Helvaci 2008; S. 40, 173), (Stokes und Frith 2008; S. 1135), (Le Grand und Petekidis 2008; S. 579), (Carrier und Petekidis 2009; S. 245, 246), (Christopoulou et al. 2009; S. 5052), (Brader 2010; Abb. 3), (Narumi et al. 2011; S. 1472)

[32] (Liu und Nagel 1998), (Petekidis et al. 2002; S. 9), (Coussot et al. 2009; S. 86, 89)

[33] Coussot (2005; S. xi ff.), (Schneider et al. 2016)

[34] (Coussot 2005; S. xii, 4), (Carrier und Petekidis 2009; S. 246), (Coussot et al. 2009; S. 90), (Ardakani et al. 2011; S. 1262)

[35] (Strivens 1976; S. 476), (Trappe et al. 2001), (Liu und Nagel 2001), (Coussot et al. 2002a), (Coussot 2005; S. xii ff.), (Weeks 2007), (Peker und Helvaci 2008; S. 174 ff.)

[36] (Blakemore und Frankel 1982; S. 42), (Carrigan Jr. und Trower 1982; S. 81), (Racho et al. 1987; S. 48, 381), (Recknagel 1990; S. 317), (O'Handley 2000; S. 18), (Kories und Schmidt-Walter 2004; S. 79), (Stöcker 2005; S. 443), (Brandt und Dahmen 2005; S. 288, 296), (Fasching 2005; S. 383), (Michalowsky 2006; S. 26), (Hering et al. 2007; S. 372), (Fischer et al. 2007; S. 233, 281)

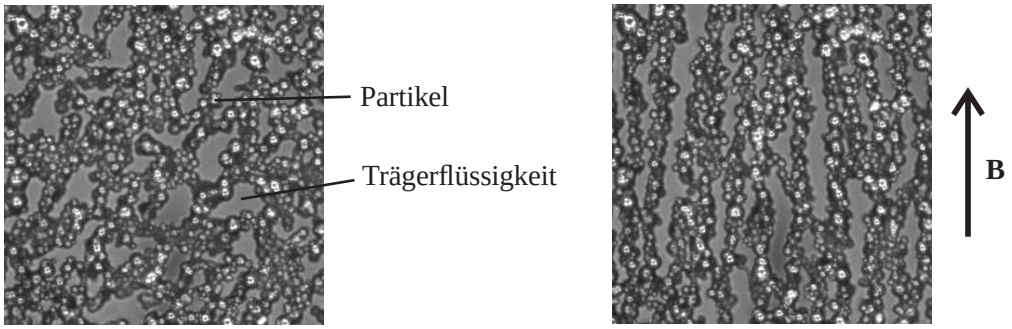
[37] (Racho et al. 1987; S. 382), (Recknagel 1990; S. 318), (O'Handley 2000; S. 18), (Kories und Schmidt-Walter 2004; S. 79), (Stöcker 2005; S. 443), (Brandt und Dahmen 2005; S. 296), (Fasching 2005; S. 383), (Hering et al. 2007; S. 372), (Fischer et al. 2007; S. 281)

[38] (Racho et al. 1987; S. 382), (Recknagel 1990; S. 318), (Kories und Schmidt-Walter 2004; S. 79), (Brandt und Dahmen 2005; S. 296), (Fasching 2005; S. 383), (Hering et al. 2007; S. 372)

[39] (Ginder et al. 1996; S. 3294), (Jolly et al. 1999a; S. 5), (Hagenbüchle und Liu 1997; S. 7664), (Genc und Phule 2002; S. 140), (Kories und Schmidt-Walter 2004; S. 79), (Brigadnov und Dorfmann 2005; S. 30), (Chaudhuri et al. 2006; S. 261), (Böse et al. 2013; S. 1)

[40] (Bossis et al. 1994; S. 335), (Ginder et al. 1996; S. 3294), (Lemaire et al. 1996), (Ashour et al. 1996; S. 125), (Tang und Conrad 1996; S. 1167), (Ginder et al. 1996; S. 3294), (Hagenbüchle und Liu 1997; S. 7664), (Jolly et al. 1999a; S. 5), (Tao 2001; S. R979), (Simon et al. 2001; S. 274), (Zschunke 2005; S. 7), (Brigadnov und Dorfmann 2005; S. 30), (Smith 2005; S. 34),, (Chaudhuri et al. 2006; S. 261), (Deshmukh 2007; S. 107), (Peng et al. 2008; S. 28), (Laun et al. 2008; S. 1049)

[41] Karin Thielsch, Swen Blobel; Technische Universität Dresden, Fakultät für Maschinenwesen, Institut für Festkörpermechanik, Professur für Nichtlineare Festkörpermechanik



(a) Zufällig verteilte Partikel für $\mathbf{B} = \mathbf{0}$

(b) Ausrichtung der Partikel entlang der magnetischen Feldlinien für $\mathbf{B} \neq \mathbf{0}$

Abbildung 2.3: Lichtmikroskopische Aufnahme einer Suspension von THIELSCH und BLOBEL

torheologischer Effekt [42] bezeichnet. Er ermöglicht eine schnelle und reversibele Veränderung der viskosen [43], elastischen und plastischen Eigenschaften (Fließspannung) [44]. Harris (2011; S. 2) äußert sich sinngemäß, dass das Fluid umso steifer je stärker das Magnetfeld ist. Butz und von Stryk (2002; S. 3) berichten über eine Veränderbarkeit der Viskosität von einem flüssigkeitsähnlichen hin zu einem *halbfesten Zustand* in wenigen Millisekunden [45]. Die in wenigen Millisekunden liegende Schaltzeit rheologischer Eigenschaften ist auf die kurze Zeit zur Ausbildung der Kettenstrukturen zurückzuführen[46]. Laun und Gabriel (2007; S. 665) weisen jedoch auf die Tatsache hin, dass bereits mehrere Autoren Versuche zur Charakterisierung der Schaltzeit unternommen haben, es aber keine generell akzeptierte Messprozedur gibt. Daher reicht der Bereich gemessener Schaltzeiten von 0.1 ms bis 100 ms. Die relativ große Streubreite ist darauf zurückzuführen, dass in den meisten Fällen nicht die reine Schaltzeit zur Strukturbildung im MRF gemessen wird. Vielmehr wird die Schaltzeit der gesamten Applikation ermittelt, welche maßgeblich vom Design des magnetischen Kreises abhängt (Genc und Phule 2002; S. 141). Auf die Ermittlung der effektiven Schaltzeit eines MR Dämpfers unter Berücksichtigung sämtlicher Einflussfaktoren wird beispielsweise in Strecker et al. (2015) hingewiesen.

Der magnetorheologische Effekt hängt von der Temperatur, der Richtung und Stärke des Magnetfeldes, der Nullviskosität der Trägerflüssigkeit, der Anfangssuszeptibilität, der Sättigungsmagnetisierung, der Partikelform und der Partikelgrößenverteilung ab. Die mittlere Partikelgröße ist ebenfalls ein wichtiger Einflussfaktor, da von ihr die Existenz kolloidaler [47] oder nicht-kolloidale Wechselwirkungen[48] abhängt. Sie ist somit für das Sedimentationsverhalten eines MRF ausschlaggebend. Außerdem korreliert die Partikelgröße mit der Anzahl der magnetischen Domänen pro Partikel und hat folglich entscheidenden Einfluss auf

[42] (Kordonsky 1993), (Laun et al. 1996; S. 417, 418), (Ashour et al. 1996; S. 123, 126), (Ginder et al. 1996; S. 3293 ff.), (Jolly et al. 1999b; S. 2036), (Jolly et al. 1996; S. 607, 611), (Simon et al. 2001; S. 274), (Genc und Phule 2002; S. 141), (Zschunke 2005; S. 7), (Claracq et al. 2004; S. 38), (Kittipoomwong et al. 2005; S. 1521), (Goncalves 2005; S. 68), (Janocha 2006; S. 4), (Lopez-Lopez et al. 2008), (Lopez-Lopez et al. 2009; S. 120 ff.), (Vicente et al. 2011; S. 3701 ff.), (Kuzhir et al. 2011a; S. 373), (Böse et al. 2013; S. 1), (Wereley 2014; S. 1)

[43] Die magnetisch induzierte Veränderung der Viskosität magnetisierbarer Fluide ist bei Berkovsky et al. (1980; S. 338), Shulman et al. (1986; S. 936), Ashour et al. (1996; S. 125), Odenbach (2002a), Odenbach (2002b; S. 3 ff.), Ilg et al. (2005; S. 1) und Harris (2011; S. 2) auch als *magnetoviskoser Effekt* bezeichnet.

[44] (Ashour et al. 1996; S. 126), (Jolly et al. 1999a; S. 5), (Smith 2005; S. 34), (Chaudhuri et al. 2006; S. 261), (Dixon 2007; S. 321), (Vicente und Ramirez 2007; S. 867), (Lopez-Lopez et al. 2006; S. 543), (Yang et al. 2009; S. 457), (Wereley 2014; S. 1)

[45] Originalzitat: „Electro- and magnetorheological fluids are smart, synthetic fluids changing their viscosity from liquid to semi-solid state within milliseconds if a sufficiently strong electric or magnetic field is applied.“ (Butz und von Stryk 2002; S. 3)

[46] (Kordonsky 1993; S. 395), (Hagenbüchle und Liu 1997; S. 7664), (Yeh und Chen 1997; S. 273), (Tao 2001; S. R979), (Bossis et al. 2002; S. 224), (Genc und Phule 2002; S. 141), (Goncalves 2005; S. 90), (Janocha 2006; S. 4), (Trendler 2007; S. 4972), (Laun und Gabriel 2007; S. 665), (Peng et al. 2008; S. 28), (Bhavsar et al. 2008; S. 38), (BASF 2009), (Vicente et al. 2011; S. 3701), (Wang und Liao 2011; S. 1), (Raynauld und Fath 2012; S. 141)

[47] (Rosensweig 1982; S. 92 f.), (Sood 1991; S. 2), (Halsey 1992; S. 761), (Husband et al. 1993; S. 215), (Abel et al. 1994; S. 456), (Popplewell und Rosensweig 1996), (Coussot und Ancey 1999; S. 4447), (Dörfler 2002; S.6 f.), (Coussot 2005; S. 49), (Jones 2002; S. 1), (Weeks 2007), (Andelman und Rosensweig 2009; S. 16), (Nam et al. 2011; S. 925), (Segovia-Gutierrez et al. 2012; S. 1429)

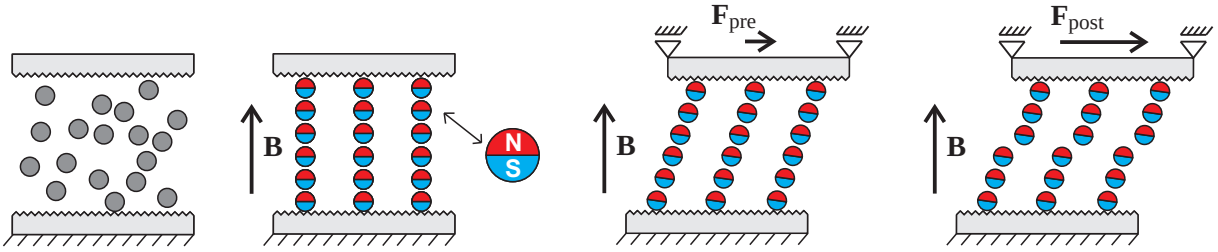
[48] (Shulman et al. 1986; S. 935), (Ashour et al. 1996; S. 123), (Parthasarathy und Klingenberg 1996), (Jolly et al. 1999a; S. 5), (Coussot und Ancey 1999; S. 4447, 4451), (Jolly et al. 1999b; S. 2036, 2037), (Chen und Yeh 2001), (Brigadnov und Dorfmann 2005; S. 29), (Coussot 2005; S. 51)

dessen magnetische Eigenschaften (Blakemore und Frankel 1982; S. 42). Weitere Untersuchungen zum Einfluss der Partikelgröße findet man beim Vergleich zwischen magnetorheologischen Fluiden und *Ferrofluiden* [49] (FF). Ferrofluide bestehen im Gegensatz zu MRF aus Nanometer großen Partikeln. Sie sind daher kolloidale Suspensionen. Da Nanometer große Partikel Eindomänenteilchen sind, begründen sich die unterschiedlichen magnetischen Eigenschaften [50] für MRF und FF.

2.5 Phänomenologischer fest-flüssig Übergang eines magnetorheologischen Fluids

Magnetorheologische Fluide besitzen aus phänomenologischer Sicht einen sogenannten fest-flüssig Übergang. Steht ein MRF nicht unter dem Einfluss eines magnetischen Feldes, verhält es sich wie eine „normale“ Suspension (Genc und Phule 2002; S. 140). In diesem Fall hat es viskoelastische Eigenschaften. Beim Vorhandensein eines magnetischen Feldes besitzt das MRF eine Fließspannung [51], welche eine direkte Folge des magnetorheologischen Effekts ist. Das Verhalten eines magnetorheologischen Fluids gleicht daher dem einer Flüssigkeit mit Fließspannung. Die für Flüssigkeiten mit Fließspannung typischen Eigenschaften, welche in Abschnitt 4.3 auszugsweise dargelegt sind, können über das Magnetfeld augenblicklich und reversibel zu- und abgeschaltet werden [52]. Rosensweig (1982; S. 89) schreibt: „Beispielsweise erstarrt die Kupplungsflüssigkeit zu einer festen Masse, sobald sie unter dem Einfluss eines magnetischen Feldes gerät. Das heißt, sie hört gerade dann auf eine Flüssigkeit zu sein, wenn sie magnetisch aktiv wird – und umgekehrt.“

Das Prinzip des idealisierten fest-flüssig Übergangs eines MRF ist in Abbildung 2.4 schematisch dargestellt. Es beruht auf den Untersuchungen von Klingenberg und Zukoski (1990; S. 17), Simon et al. (2001; S. 273) und Laun et al. (2009; Abb. 3). Es wurden nicht-magnetisierbare Platten sowie ein homogenes Magnetfeld angenommen. Abbildung 2.4(a) illustriert den inneren Aufbau eines MRF wenn es keinem magne-



(a) In Trägerflüssigkeit zufällig verteilte Partikel für $\mathbf{B} = \mathbf{0}$

(b) In Feldlinienrichtung ausgerichtete Partikel

(c) Vorfließbereich: Ketten neigen sich aufgrund der Last $\mathbf{F}_{pre}$

(d) Nachfließbereich: Ketten brechen aufgrund der Last $\mathbf{F}_{post}$ und MRF fließt

Abbildung 2.4: Schematische Darstellung des fest-flüssig Übergangs von magnetorheologischen Fluiden

tischen Feld ausgesetzt ist. Die Partikel sind zufällig in der Trägerflüssigkeit verteilt. Eine entsprechende reale Aufnahme dieses Zustandes ist in Abbildung 2.3(a) dargestellt. Sobald ein magnetisches Feld zugeschaltet wird, ordnen sich die Partikel in kettenähnlichen Strukturen an, welche sich entlang der Feldlinien ausrichten. Dies ist in Abbildung 2.4(b) auf der Grundlage von Abbildung 2.3(b) dargestellt. Wenn an der oberen Platte eine horizontale Kraft $\mathbf{F}_{pre}$ angreift, werden die Ketten zunächst ausgelenkt, ohne zu brechen. Unterstellt man, dass sich das MRF wie eine Flüssigkeit mit Fließspannung verhält, resultieren im MRF infolge $\mathbf{F}_{pre}$ Beanspruchungen im Vorfließbereich. Ebenfalls ist ideales Haften der Partikel an den Platten angenommen. Der Lastfall ist in Abbildung 2.4(c) skizziert. Würde man die Kraft entfernen, so würde

[49] (Rosensweig 1982; S. 93), (Schäfer 2000), (Odenbach 2002a), (Odenbach 2002b), (Kröger et al. 2003), (Kröger 2004; Abschnitt 7.5), (Lopez-Lopez et al. 2006; S. 543), (Odenbach 2009)

[50] (Rosensweig 1982; S. 89), (Ashour et al. 1996; S. 123 ff.), (Wang und Holm 2003; S. 1), (Samouhos und McKinley 2007; S. 432), (Dixon 2007; S. 216), (Harris 2011; S. 2)

[51] (Lemaire et al. 1995; S. 1012), (Tang und Conrad 1996; S. 1167), (Hagenbüchle und Liu 1997; S. 7664), (Claracq et al. 2004; S. 38), (Peng et al. 2008; S. 28)

[52] (Jolly et al. 1996; S. 611), (Hagenbüchle und Liu 1997; S. 7664), (Simon et al. 2001; S. 274), (Tao 2001; S. R979), (See 2003; S. 299), (Claracq et al. 2004; S. 38), (Rwei et al. 2005; S. 1253), (Lopez-Lopez et al. 2009; S. 115), (Vicente et al. 2011; S. 3701), (Lord Corporation 2011)

das MRF wieder seine Ausgangskonfiguration einnehmen [53]. Dies kann beispielsweise durch ausreichend große Reibkräfte (Kraftschluss) oder stoffschlüssige Verbindungen zwischen Partikeln und Wand (Kleben, Schweißen) realisiert werden. Wandgleiten [54] ist daher per Definition ausgeschlossen. Es ist außerdem angenommen, dass sich eine Richtung der magnetischen Dipole im Strömungsfeld zwischen der Kettenlängsrichtung und der Magnetfeldrichtung einstellt. Die Richtung des Magnetisierungsvektors hängt dabei vom Wechselspiel zwischen hydrodynamischen Kräften und magnetischer Relaxation ab (Claracq et al. 2004; S. 38). Magnetische Relaxation kann man unterteilen in NÉELsche und BROWNsche Relaxation. Bei NÉELscher Relaxation rotiert das magnetische Moment unabhängig vom Partikel. Hingegen dreht sich das magnetische Moment bei BROWNscher Relaxation aufgrund der Rotation des Partikels. Zu beachten ist, dass derjenige Prozess mit der kleineren Relaxationszeit die magnetische Relaxation dominiert [55]. Im Falle von Mikrometer großen Partikeln dominiert nach Odenbach (2002b; Tab. 2.1) und Lissek (2000; S. 5) die BROWNsche Relaxation. Daher erfolgt die magnetische Relaxation maßgeblich über Drehung der Partikel, wobei die Partikel selbst unter dem Einfluss hydrodynamischer Kräfte mit der Trägerflüssigkeit interagieren (Kröger et al. 2003; S. S1404). In Abbildung 2.4(d) wirkt eine horizontale Kraft $\mathbf{F}_{\text{post}}$ mit $|\mathbf{F}_{\text{post}}| > |\mathbf{F}_{\text{pre}}|$, sodass für das MRF Beanspruchungen im Nachfließbereich resultieren. Infolgedessen ist die Fließbedingung des MRF erfüllt. Die kettenartigen Strukturen aus Abbildung 2.3(b) brechen an dem Punkt, an welchem die Fließbedingung zuerst erfüllt ist [56]. Der Fließvorgang wird nun maßgeblich von den Materialeigenschaften des Nachfließbereichs beeinflusst [57]. Für eine stationäre Strömung herrscht dabei ein Gleichgewicht zwischen Kettenreißen und Kettenneubildung (Butz und von Stryk 2002; S. 4).

2.6 Anwendungsbereich magnetorheologischer Fluide

In den letzten Jahren wurden auf Basis magnetorheologischer Fluide zahlreiche Applikationen entwickelt. Darunter zählen zum Beispiel rotatorische MR Geräte wie magnetorheologische Bremsen und MR Kupplungen[58]. Magnetorheologische Dämpfer [59] sind translatorisch wirkende MR Geräte und kommen unter anderem bei erdbebensicheren Anwendungen zum Einsatz. Ebenfalls werden sie für die Aufhängung von Sitzen und zur adaptiven Federung und Dämpfung von Fahrzeugen benutzt. Beispielsweise werden sie in den Militärfahrzeugen Humvees, Stryker und M915A3 verbaut (Carlson et al. 2007). Delphi Corporation (2005) entwickelte das MR Dämpfersystem *MagneRide*™, welches in einigen Cadillac's und Ferrari's, Chevrolet Corvette, Audi TT und Audi R8 sowie im Range Rover Evoque eingesetzt wird [60]. Weitere Anwendungsbereiche von MRF sind taktile Feedback-Geräte für Steer-By-Wire Systeme in Gabelstablern [61], Force-Feedback Komponenten wie Joysticks zur Steuerung von Industrierobotern (Wiehe et al. 2008), MR Lager im Automobilbau [62], flexible Befestigungsvorrichtung (Tang et al. 1999), MR Türschließer (Wiehe et al. 2008) und medizinische Anwendungen wie das sogenannte *rheoknee* beziehungsweise das prosthetische Bein [63]. Magnetorheologische Komposite wurden unter anderem von Carlson (1999), Carlson und Jolly (2000), Chrzan und Carlson (2001), (Goncalves 2005; S. 12), Kaleta und Lewandowski (2007), Deshmukh und McKinley (2007), Kaleta et al. (2007) und Dohmen et al. (2014) hergestellt. MRF

[53] (Rabinow 1948; S. 1314), (Gamota und Filisko 1991; S. 418), (Bölter und Janocha 1997; S. 155), (Hagenbüchle und Liu 1997; S. 7664), (Gans et al. 1999; S. 209), (Kordonskii et al. 1999; S. 842), (Tang et al. 2000; S. 2635), (Butz und von Stryk 2002; S. 4), (Li et al. 2003; S. 280), (Claracq et al. 2004; S. 45), (Gandhi und Bullough 2005; S. 238, 241), (Peng et al. 2008; S. 28), (Yang et al. 2009; S. 457), (Jang et al. 2009; S. 1168)

[54] (Lemaire und Bossis 1991; S. 1477), (Volkova et al. 2000; S. 91), (Peng et al. 2008), (Lopez-Lopez et al. 2009; S. 120)

[55] (Lissek 2000; S. 4), (Odenbach 2002b; S. 20), (Odenbach 2002a; S. 20), (Odenbach 2009; S. 16)

[56] (Lemaire et al. 1996), (Popplewell und Rosensweig 1996; S. 2300), (Butz und von Stryk 2002; S. 4), (Claracq et al. 2004; S. 45), (Lopez-Lopez et al. 2009; S. 120)

[57] (Rosensweig 1995; S. 179), (Felt et al. 1996; S. 590)

[58] (Bölter und Janocha 1997; S. 151), (Nakano und Yamamoto 1999; S. 2068), (Goncalves 2005; S. 13), (Smith 2005; S. 36), (Carlson et al. 2007), (Böse 2007), (BASF 2009), (Güth et al. 2013c), (Güth et al. 2013a), (Desrosiers et al. 2013), (Böse et al. 2013), (Güth et al. 2013b), (Wereley 2014; S. 248)

[59] (Bölter und Janocha 1997; S. 154), (Falah et al. 1998), (Nakano und Yamamoto 1999; S. 2068), (Jeon et al. 1999), (Jolly et al. 1999a), (Butz und von Stryk 2002), (Goncalves 2005; S. 11), (Carlson et al. 2007), (Böse 2007), (Dixon 2007; S. 324), (Wiehe et al. 2008), (Böse und Ehrlich 2010), (Güth et al. 2013a), (Wereley 2014; S. 237), (Strecker et al. 2015)

[60] (Goncalves 2005; S. 8), (Carlson et al. 2007), (Dick et al. 2007; S. 6), (Wiehe et al. 2008), (Raynauld und Fath 2012)

[61] (Carlson et al. 2007), (Wiehe et al. 2008), (Güth et al. 2013a)

[62] (Janocha 2006; S. 4), (Böse 2007), (Carlson et al. 2007), (Wiehe et al. 2008)

[63] (Herr und Wilkenfeld 2003), (Goncalves 2005; S. 13), (Bhavsar et al. 2008; S. 38), (Güth et al. 2013a)

werden außerdem als Präzisions-Poliermittel für magnetorheologisches Finishing verwendet [64]. Dies ist eine Methode zur Herstellung von komplexen Optiken mit hoher Genauigkeit und Oberflächenglattheit.

2.7 Magnetorheologisches Fluid – das magnetische Analogon zum elektrorheologischen Fluid

Magnetorheologische Fluide sind das magnetische Analogon zu elektrorheologischen Fluiden [65]. Das physikalische Prinzip zur Schaltbarkeit rheologischer Eigenschaften ist in beiden Fällen ähnlich [66]. Die Materialeigenschaften können durch ein äußeres Feld gesteuert werden. Im Falle von MRF werden sie durch ein magnetisches Feld und bei ERF mittels einem elektrischen Feld gesteuert.
Magnetorheologische Fluide wurden von Jacob Rabinow [67] am US National Bureau of Standards entdeckt und entwickelt [68]. Rabinow (1948) zeigte, dass eine in MRF eingetauchte und dem Feld eines Elektromagneten ausgesetzte Platte das Gewicht einer schlanken Frau der Masse von circa 53 kg tragen kann.
Im selben Zeitraum arbeitete Willis M. Winslow an elektrorheologischen Fluiden [69]. Winslow (1949) veröffentlichte ein Elektro-Viskosimeter sowie elektrisch regelbare Ventile, Bremsen und Kupplungen [70].
Da die qualitativen Eigenschaften von ERF und MRF vergleichbar sind, können die in dieser Arbeit vorgeschlagenen Modelle aufgrund ihres phänomenologischen Charakters zur Modellierung des Materialverhaltens beider Materialien verwendet werden. Hinsichtlich ingenieurtechnischer Anwendungen sind die Unterschiede zwischen ERF und MRF von Interesse. Lemaire et al. (1995; S. 1011) weist darauf hin, dass für die Effektivität von elektro- und magnetorheologischen Fluiden gewöhnlich die dynamische Fließspannung entscheidend ist. Diesbezüglich besitzen MRF Vorteile gegenüber ERF. Weiss et al. (1994; S. 1), Ginder et al. (1996; S. 3293) und Tao (2001; S. R979) verweisen auf die größere Fließspannung von MRF [71], sodass sie im Vorfließbereich größere Dämpfungskräfte übertragen können als ERF [72]. Außerdem muss für MRF weniger Energie bereitgestellt werden, um dieselbe Fließspannung zu erreichen [73]. Ein Nachteil von MRF gegenüber ERF ist das größere Gewicht. Dies ist darauf zurückzuführen, dass MRF gewöhnlich aus Eisenpartikeln bestehen. Dadurch tritt das Sedimentationsproblem für MRF stärker in den Vordergrund als für ERF [74]. Eine Gegenüberstellung der Eigenschaften von ERF und MRF hinsichtlich

[64] (Kordonski und Golini 1999), (Tao 2001; S. R979), (Harris 2011), (Kuzhir et al. 2011a; S. 373), (Wereley 2014; S. 261)

[65] (Jolly et al. 1999a; S. 5), (Kittipoomwong et al. 2005; S. 1521)

[66] (Ashour et al. 1996; S. 124), (Ginder et al. 1996; S. 3294), (Kuzhir et al. 2011a; S. 374)

[67] Jacob Rabinow ist Erfinder zahlreicher Anwendungen, wie beispielsweise auf MRF basierende *moment- und kraftübertragende Geräte* (US Patent 2575360, 1947), *Stoßdämpfer* (US Patent 2667237, 1948), *Hochgeschwindigkeits-Kupplungen* (US Patent 2622713, 1949) und *Radialfeld-Kupplungen* (US Patent 2629471, 1949).

[68] (Ginder et al. 1996; S. 3293), (Laun et al. 1996; S. 418), (Yeh und Chen 1997), (Larson 1999; S. 376), (Tao 2001; S. R979), (Bossis et al. 2002; S. 224), (Genc und Phule 2002; S. 140), (Claracq et al. 2004; S. 38), (Zschunke 2005; S. 16), (Smith 2005; S. 34), (Samouhos und McKinley 2007; S. 432), (Dixon 2007; S. 303), (Yang et al. 2009; S. 457), (Wang und Liao 2011)

[69] (Larson 1999; S. 361), (Bossis et al. 2002; S. 224), (Genc und Phule 2002; S. 140), (Rwei et al. 2005; S. 1253), (Smith 2005; S. 34), (Dixon 2007; S. 303)

[70] Im Jahre 1942 reichte Winslow das US Patent 2417850 über *method and means for translating electrical impulses into mechanical force* ein, welches durch das US Patent 3047507 *field responsive force transmitting compositions* im Jahre 1960 aktualisiert wurde. Er erfand ebenfalls eine hochgenaue *Schlupf-Regelung* (US Patent 2661825, 1949), welche in elektrischen Motoren mit feldgesteurter Kupplung (US Patente 2663809 und 2886151, 1949) zur Anwendung kam, sowie *feldgesteuerte hydraulische Applikationen* (US Patent 2661596, 1950).

[71] englisches Originalzitat: MRF are „low voltage counterparts of electrorheological (ER) fluids. Yield stresses of order 100 kPa, some two orders of magnitude larger than in practical ER fluids have been obtained in MR fluids exposed to applied magnetic fields of 3 kOe, or 240 kA/m,[2,3] which are readily generated by electromagnets or permanent magnets“ (Ginder et al. 1996)

[72] Bossis et al. (1997; S. 687) und Bossis et al. (2002; S. 224) schreiben: „Magnetorheological suspensions have received less attention than electrorheological suspensions mainly because the weight and the space required by the coils to produce the magnetic field was thought to be a severe restriction for practical applications. [...] Nevertheless, just comparing the magnetostatic energy density $\mu_0 H_0^2$ for $H_0 = 3000\text{Oe}$ and the electrostatic energy density $\varepsilon_0 E_0^2$ for a field $E_0 = 3kV/mm$ (close to the breakdown field) it appears that the former is larger by an order of magnitude. This is the first reason why yield stresses obtained with magnetorheological (MR) fluids are much larger than those obtained with electrorheological (ER) fluids. Yield stresses close to 100 kPa are obtained with magnetic suspensions made of carbonyl iron (Weiss et al., 1994), whereas 15 kPa seems to be the maximum yield stress ever obtained with an ER fluid (Haveka, 1994). Furthermore these ER fluids are difficult to use commercially due to a too high power consumption“.

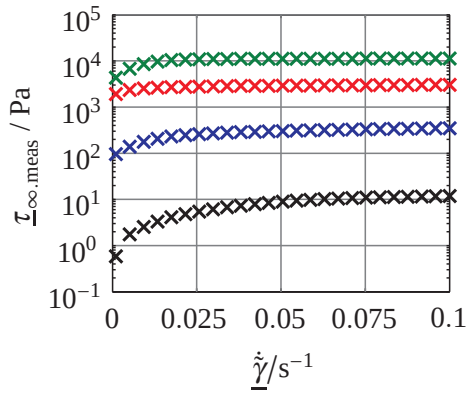
[73] (Ashour et al. 1996; S. 124), (Tao 2001; S. R980), (Smith 2005; S. 36)

[74] Larson (1999; S. 377), (DIN.51480-1; S. 11 ff.), (Deshmukh 2007; S. 13 ff.)

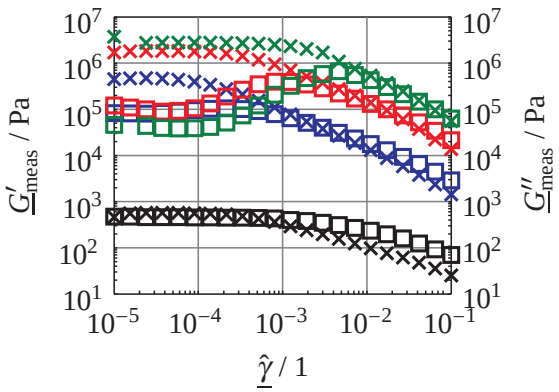
der Stabilität sowie der Sensitivität gegenüber Additiven und Temperaturveränderungen findet man bei Ashour et al. (1996; S. 124) und Deshmukh (2007; S. 13 ff.).

2.8 Magnetomechanische Eigenschaften des verwendeten magnetorheologischen Fluids

Das in dieser Arbeit verwendete MRF wurde von ADAM und BORIN [75] aus der Gruppe von ODENBACH hergestellt und experimentell untersucht. Die mechanischen Eigenschafen in Abhängigkeit vom äußeren Magnetfeld wurden für magnetische Induktionen $|\mathbf{B}| = 0\,\mathrm{mT}$, $|\mathbf{B}| = 50\,\mathrm{mT}$, $|\mathbf{B}| = 150\,\mathrm{mT}$ und $|\mathbf{B}| = 300\,\mathrm{mT}$ mit dem kommerziellen Rheometer MCR 501 der Firma Anton Paar bestimmt. Zum einen wurde die Fließkurve $\underline{\tau}_{\infty.\mathrm{meas}}(\dot{\underline{\gamma}})$ und zum anderen Speicher- und Verlustmoduli $\underline{G'}_{\mathrm{meas}}(\hat{\underline{\gamma}})$ und $\underline{G''}_{\mathrm{meas}}(\hat{\underline{\gamma}})$ gemessen. Die gemessenen Fließkurven sind in Abbildung 2.5(a) im semilogarithmischen Maßstab dargestellt. Die Fließkurve ist diejenige Materialfunktion, die den Zusammenhang zwischen dem Vektor konstant gehaltener Scherraten $\dot{\underline{\gamma}}$ und dem Vektor gemessener Schubspannung im stationären Zustand beschreibt. Die Definition der Fließkurve ist in Abschnitt 3.7 gegeben. Messwerte für Speicher- und Verlustmoduli sind im doppellogarithmischen Maßstab in Abbildung 2.5(b) präsentiert. Speicher- und Verlustmodul sind Materialfunktionen für eine verzerrungsgeregelte sinusförmige Anregung, die mittels einer FOURIER Analyse des Spannungssignals ermittelt werden. Die Definition von Speicher- und Verlustmodul erfolgt in Abschnitt 3.8. Die Rohdaten der Messungen sind in Anhang A.7 hinterlegt. Die Magnetisierungskurve der BASF$^{\mathrm{TM}}$



(a) Fließkurve



(b) Speichermodul: ××× und Verlustmodul: □□□ in Abhängigkeit von der Verzerrungsamplitude für $\omega = 2\pi\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}$

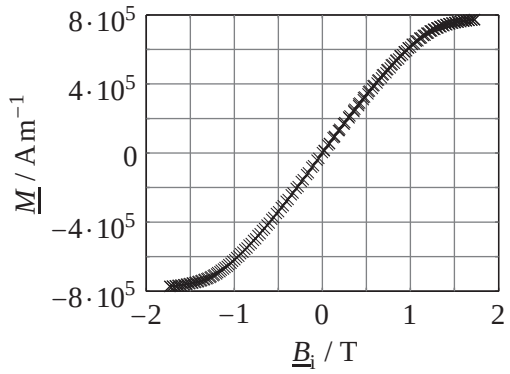
Abbildung 2.5: Materialfunktionen eines MRF bestehend aus $\Phi = 40\,\mathrm{vol\%}$ BASF$^{\mathrm{TM}}$ CIP CC Partikeln, die in die Trägerflüssigkeit MOTUL 300V suspendiert sind; Messungen für verschiedene Stärken der äußeren magnetischen Induktion $|\mathbf{B}| = 0\,\mathrm{mT}$, $|\mathbf{B}| = 50\,\mathrm{mT}$, $|\mathbf{B}| = 150\,\mathrm{mT}$ und $|\mathbf{B}| = 300\,\mathrm{mT}$

CIP CC Partikel wurde ebenfalls von ADAM und BORIN aus der Gruppe von ODENBACH ermittelt. Sie wurde mithilfe eines Magnetometers [76] mit vibrierender Probe des Herstellers Lake Shore bestimmt. Das innere Magnetfeld der BASF$^{\mathrm{TM}}$ CIP CC Messprobe wurde von Spieler (2012) unter Berücksichtigung des Demagnetisierungsfaktors [77] von 0.44 berechnet. Das magnetische Feld einer magnetisierten Kugel, welche Grundlage für die Definition der *inneren magnetischen Induktion* $\mathbf{B}_\mathrm{i}$ und der *inneren magnetischen Feldstärke* $\mathbf{H}_\mathrm{i}$ ist, wird beispielsweise bei Schmutzer (2005; S. 690), Jackson (2006; S. 233) und Henke (2007; S. 199) angegeben. In Abbildung 2.6(a) werden die Messwerte der entlang der Feldlinien gerichteten Komponente des Magnetisierungsvektors $\underline{M}$ über korrospondierende Messwerte der Komponente der inneren magnetischen Induktion $\underline{B}_\mathrm{i}$ nach Spieler et al. (2014; Abb. 1) aufgetragen. Das entsprechende Diagramm in Abhängigkeit von der korrospondierenden inneren Feldstärke $\underline{H}_\mathrm{i}$ ist in Abbildung 2.6(b) nach Spieler et al. (2013; Abb. 6b) dargestellt. Zur Modellierung der Magnetisierungskurve verwenden Spieler

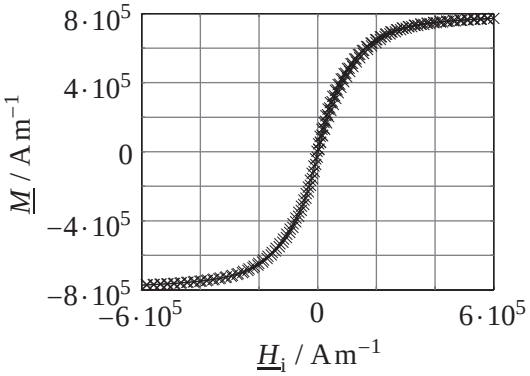
[75] Frank Adam, Dmitry Borin; Technische Universität Dresden, Fakultät Maschinenwesen, Institut für Strömungsmechanik, Professur für Magnetofluiddynamik (Professor Odenbach)

[76] (Lakeshore 2004), (Michalowsky 2006; S. 86)

[77] (Shulman et al. 1986; S. 939), (Racho et al. 1987; S. 387), (Lakeshore 2004; S. A-2), (Michalowsky 2006; S. 285), (Hering et al. 2007; S. 374), (Kordonski und Gorodkin 2009)



(a) Magnetisierung in Abhängigkeit der inneren magnetischen Induktion



(b) Magnetisierung in Abhängigkeit der inneren magnetischen Feldstärke

Abbildung 2.6: Magnetisierungskurven der BASF^{TM} CIP CC Partikel wurden von ADAM und BORIN gemessen und in (a): Spieler et al. (2014; Abb. 1) und (b): Spieler et al. (2013; Abb. 6b) veröffentlicht

(2012) und Spieler et al. (2013) ein phänomenologisches Modell auf Basis der LANGEVIN Funktion. Ein phänomenologischer Ansatz basierend auf dem Tangens Hyperbolicus ist in Spieler et al. (2014) vorgeschlagen.

2.9 Ansätze zur Modellierung des Materialverhaltens magnetorheologischer Fluide

Zur Modellierung des Materialverhaltens magnetorheologischer Fluide existieren in der Literatur mehrere Ansätze. Im Folgenden werden die Optionen zur Modellierung des makroskopischen Materialverhaltens von magnetorheologischen Fluiden erörtert. Dafür kommen der phänomenologische als auch der mikroskopische Modellierungsansatz infrage [78]. Weil die qualitativen Eigenschaften von MRF und ERF nahezu identisch sind, siehe Abschnitt 2.7, werden auch Modelle zur Abbildung des Materialverhaltens von ERF berücksichtigt. Die in der Literatur praktizierten Modellierungsstrategien werden in vier Klassen eingeteilt:

1. Kontinuumsmodelle,
2. eindimensionale rheologische Modelle,
3. mikroskopische Modelle sowie
4. Schichtmodelle.

Kontinuumsmodelle stellen phänomenologische konstitutive Gleichungen [79] bereit, mit denen das dreidimensionale Verhalten von MRF berechnet werden kann, ohne die mikrostrukturellen Prozesse direkt zu modellieren [80]. Die phänomenologische Beschreibung erfasst das effektive, „verschmierte“ Resultat der Effekte tieferer Betrachtungsebenen [81]. In diesem Sinne wird das Material als Kontinuum [82] betrachtet, das eine kontinuierliche Verteilung der Feldgrößen voraussetzt. Im schlechtensten Fall sind zu Beginn einer phänomenologischen Materialbeschreibung keinerlei Eigenschaften einer Materialprobe bekannt. Sie gleicht daher aus mathematischer Sicht einem Black-Box Operator [83], der in Abbildung 2.7 dargestellt ist.

[78] (Maugin 1999; S. 78), (Schwartz 2002; S. 268)

[79] (Reiner 1968; S. 8), (Mälmeisters 1977; S. 265), (Krawietz 1986; S. 5), (Giesekus 1994; S. 3, 113), (Lemaitre und Chaboche 1994; S. 70), (Coussot et al. 2002b; S. 583)

[80] (Maugin und Chambon 1987; S. 256), (Maugin 1992; S. 38)

[81] (Giesekus 1994; S. 9), (Pal 2007; S. 51), (Chaboche 2008; S. 1642)

[82] (Schade und Kunz 1989; S. 6,7,10), (Tschoegl 1989; S. 5), (Eringen und Maugin 1990a; S. 3), (Giesekus 1994; S. 9), (Parisch 2003; S. 49), (Coussot 2005; S. 6), (Pal 2007; S. 51), (Eck et al. 2008; S. 198), (Haasemann 2008; S. 58), (Kästner 2010; S. 18), (Altenbach 2012; S. 7)

[83] (Krawietz 1986; S. 33), (Maugin 1992; S. 277), (Lion 1994; S. 13), (Lemaitre und Chaboche 1994; S. 70), (Altenbach 1994; S. 157), (Maugin 1999; S. 75), (Lion 2000b; S. 67), (Haupt 2002; S. 252), (Wu 2005; S. 404), (Altenbach 2012; S. 217)

Dessen Eigenschaften sind am Ende einer phänomenologischen Materialmodellierung durch eine geeignete Wahl konstitutiver Beziehungen beschrieben. Durch Charakterisierungsexperimente gelingt es, das

Abbildung 2.7: Betrachtungsweise eines Materials als Black-Box Operator, der im mathematischen Sinn zwischen Input $x(t)$ und Output $y(t)$ vermittelt.

Verhalten des Black-Box Operators Schritt für Schritt zu spezifizieren. Die Vorgaben der experimentellen Anregung definieren den Input $x(t)$. Die im Experiment gemessene Materialantwort stellt den Output $y(t)$ dar. In Abhängigkeit von der Art der Anregung, welche spannungs- oder verzerrungsgesteuert erfolgen kann (Haupt 2002; S. 252), können somit verschiedene *Materialfunktionen* gemessen werden. Für eine verzerrungsgesteuerte Anregung ergibt sich als Input die Schubverzerrung, $x = \gamma$, und für den Output die Spannung, $y = \tau$. Invers dazu verhält es sich für eine spannungsgesteuerte Anregung.
Im Rahmen dieser Arbeit werden als Materialfunktionen die Fließkurve sowie Speicher- und Verlustmoduli aus Abschnitt 2.8 berücksichtigt. Ziel der phänomenologischen Materialmodellierung ist es, einen Satz konstitutiver Beziehungen zu formulieren, welcher die gemessenen Materialfunktionen wiedergeben kann. Sofern gewisse Gültigkeitsvoraussetzungen nicht verletzt werden, kann der Satz konstitutiver Beziehungen zur Bestimmung weiterer Modellvorhersagen und Simulationen genutzt werden. Faktoren und Parameter, welche den Gültigkeitsbereich des Materialmodells einschränken, leiten sich direkt aus den Rahmenbedingungen ab, unter denen die Charakterisierungsexperimente durchgeführt werden.
Die Güte phänomenologischer Materialmodelle korreliert mit der Qualität der experimentellen Messungen. Daher ist es von Vorteil, wenn die Messergebnisse auf Plausibilität überprüft werden können. Hierfür sind Einblicke in die Mikroebene des Materials hilfreich, sodass Verhaltenweisen abgeschätzt und Messergebnisse interpretiert werden können (Lion 1994; S. 40).
Grundlegende Arbeiten der phänomenologischen Materialbeschreibung für MRF wurden von Eringen (1980; S. 423 ff.), Eringen und Maugin (1990a), Eringen und Maugin (1990b), Yeh und Chen (1997), Maugin (1999; S. 223 ff.), Shkel und Klingenberg (2000), Chen und Yeh (2001), Chen und Yeh (2002b), Chen und Yeh (2002a), Brigadnov und Dorfmann (2005) und Dorfmann et al. (2007) erbracht. Ebenfalls kann die kontinuumsmechanische Modellierung von ERF [84] und magnetorheologischen Elastomeren [85] Anregungen geben. Diese Arbeiten bewerten die thermodynamische Zulässigkeit konstitutiver Beziehungen, stehen jedoch weniger in Bezug zu experimentellen Messungen. Infolgedessen findet man für diese Modelle in der Literatur kaum Modellvorhersagen für Speicher- und Verlustmoduli sowie Fließkurven, welche jedoch die experimentellen Grundlagen zur Materialmodellierung von MRF in dieser und anderen Arbeiten darstellen. Dies erschwert die Bewertung und gezielte Modellauswahl von Kontinuumsmodellen hinsichtlich des Ziels, die Messungen aus Abschnitt 2.8 zu modellieren.

Arbeiten, in denen der Fokus primär auf der Modellierung konkreter makroskopischer Messungen liegt, formulieren meist eindimensionale Modelle auf Basis rheologischer Elemente. Beispielsweise untersucht Gandhi und Bullough (2005) Standardmodelle der linearen Viskoelastizität, welche somit ausschließlich im Vorfließbereich magnetorheologischer Fluide gültig sind. Zur Modellierung des Nachfließbereichs wird auf BINGHAM artige Modellstrukturen verwiesen [86]. Laun et al. (1996; S. 422) verwendet ein generalisiertes BINGHAM-CASSON Gesetzt. Das *Herschel*-BULKLEY Modell wird von Choi et al. (2005) vorgeschlagen und bei Susan-Resiga (2009) als Teil eines übergeordneten Modells verwendet. Ein Modell, welches in der Lage ist sowohl den Vor- als auch den Nachfließbereich magnetorheologischer Fluide unter oszillatorischer Scherung physikalisch großer Amplituden (LAOS) zu modellierung, ist von Laun et al. (2009) publiziert. Es besteht aus einer Parallelschaltung von NEWTONschen Dämpfer und BINGHAM-HOOKE Element. Letzteres ist entsprechend Boisly et al. (2017) eine Reihenschaltung aus HOOKEscher

[84] (Rajagopal und Wineman 1992), (Wineman und Rajagopal 1995), (Rosensweig 1995; S. 180 ff.)

[85] (Dorfmann und Ogden 2003), (Dorfmann et al. 2004), (Kankanala und Triantafyllidis 2004), (Dorfmann und Brigadnov 2004), (Dorfmann und Ogden 2004b), (Dorfmann und Ogden 2004a), (Dorfmann und Ogden 2005), (Bustamante et al. 2007), (Saxena et al. 2013)

[86] (Klingenberg und Zukoski 1990; S. 18), (Rosensweig 1995; S. 169), (Ginder et al. 1996; S. 3302), (Parthasarathy und Klingenberg 1996; S. 58), (Jolly et al. 1999a; S. 5), (Kordonski et al. 2001; S. 1078), (See 2003; S. 298), (Claracq et al. 2004; S. 39), (Choi et al. 2005), (Kittipoomwong et al. 2005; S. 1521)

Feder und BINGHAM Element. Kaleta et al. (2007) untersucht für LAOS sowohl ein viskoplastisches Gesamtmodell, bestehend aus einem MAXWELL Element und parallel geschaltetem PRANDTL Element, als auch ein plastisches Standardmodell mit linear kinematischer Verfestigung. Modellvorhersagen für Speicher- und Verlustmodul werden allerdings nicht präsentiert. Anhand experimenteller Untersuchungen von ERF leitet Gamota und Filisko (1991; Abb. 11) eine Reihenschaltung aus BINGHAM Element, KELVIN-VOIGT Element und HOOKEscher Feder als mechanisches Ersatzmodell ab. In den meisten Fällen können die rheologischen Modelle die zugrunde gelegten Messungen zufriedenstellend modellieren. Eine Verallgemeinerung des Materialverhaltens auf den dreidimensionalen Fall erfolgt nicht zwangsläufig.

Die mikroskopische Modellierungsstrategie [87] beschreibt die physikalischen Effekte auf der Mikroebene. Sind in der Beschreibung alle signifikanten mikroskopischen Effekte enthalten, so ergibt sich das effektive Materialverhalten auf der Makroebene beispielsweise mittels Homogenisierungstechniken im Rahmen einer mehrskaligen Modellierungsstrategie [88]. Je nachdem wie komplex die Physik auf mikroskopischer Ebene ist, müssen mehr oder weniger viele treibende Kräfte [89] berücksichtigt werden. Deen et al. (2007; S. 29) weist explizit auf das Problem hin, eventuell nicht alle Wechselwirkungen zwischen Prozessen im kleinen und großen Maßstab erfasst zu haben [90]. Zur Modellierung des Materialverhaltens von MRF existiert eine Vielzahl mikroskopischer Modellansätze (Mustin 2010; S. 37–46). Als Partikel-Level-Simulationen sollen diejenigen Modelle bezeichnet werden, welche die Bewegungsgleichungen aller Partikel auf der Mikroebene unter Berücksichtigung treibender Kräfte lösen [91]. Die konkrete Vorgabe, dass sich Partikel zu kettenförmigen Strukturen anordnen, wird in Kettenmodellen unterstellt [92]. Modelle des nächsten Abstraktionsgrades berücksichtigen das kollektive Verhalten von Partikelketten in entsprechenden Schichten [93] und können daher als Schichtenmodelle bezeichnet werden. Diese unterstellen streifenförmige, zylinderförmige oder ellipsoidale magnetisierbare Strukturen. Mustin (2010; S. 37–48)

Somit stehen verschiedene Ansätze zur Modellierung des Materialverhaltens magnetorheologischer Fluide zur Verfügung. In Abhängigkeit von der konkreten Zielstellung kann jede der oben genannten Modellierungsstrategien vorteilhaft sein. Die Wahl der Strategie zur Modellierung des Materialverhaltens von MRF wird im Folgenden begründet.

2.10 Zweistufige phänomenologische Materialmodellierung auf Grundlage eindimensionaler Materialgleichungen rheologischer Elemente

Aus der Betrachtung des vorherigen Abschnittes wird ersichtlich, dass mikroskopische und phänomenologische Modellierungsstrategien derartige Vor- und Nachteile besitzen, dass sie sich in idealer Weise ergänzen und komplettieren (Reiner 1968; S. 8). Die konkrete Wahl einer Modellierungsstrategie hängt von Ziel und Art der Aufgabenstellung ab.
Die Modellierung des Materialverhaltens der magnetorheologischen Flüssigkeit ist Teil der Beschreibung des makroskopischen Verhaltens des magnetorheologischen Kompositwerkstoffs entsprechend Abbildung 1.1. Den Aufwand für eine mikroskopische Materialmodellierung mit anschließender Homogenisierung von Mikro- zu Mesoebene sieht der Autor dieser Arbeit als nicht gerechtgertigt an. Stattdessen bietet sich sowohl für das MRF als auch für den offenzelligen Polyurethan Schaumstoff die phänomenologische Materialbeschreibung an, denn es ist ineffizient mehr als notwendig zu investieren [94]. Die Kontinuumsmo-

[87] (Lemaitre und Chaboche 1994; S. 70), (Coussot et al. 2002b; S. 582), (Kröger 2005a), (Kröger 2005b)

[88] (Simon et al. 2001), (van der Hoef et al. 2004), (Deen et al. 2007; Abb. 1), (Haasemann 2008; S. 58 ff.), (Kästner 2010; S. 18)

[89] (Russel et al. 1989; S. 12 ff.), (Parthasarathy und Klingenberg 1996), (Ly et al. 1999), (Coussot und Ancey 1999; S. 4446), (van der Hoef et al. 2004; S. 5160, 5163), (Yadav et al. 2006; S. 147, 149), (Zhu et al. 2007), (Chu und Yu 2008)

[90] englisches Originalzitat: „Note that in principle it is not guarenteed that all correlations between small- and large-scale processes can be captured by effective interactions“.

[91] (Mohebi et al. 1996), (Ly et al. 1999), (Kittipoomwong et al. 2005), (Yadav et al. 2006), (Pappas und Klingenberg 2006), (Vicente und Ramirez 2007), (Krishnamurthy et al. 2008) und (Ekwebelam und See 2009)

[92] (Davis 1992), (Martin und Anderson 1996), (Ginder et al. 1996), (Jolly et al. 1996), (Tang et al. 1996), (Bossis et al. 1997), (Martin 2000), (Shkel und Klingenberg 2001), (Bossis et al. 2002), (Zhang et al. 2004), (Si et al. 2008), (Mustin 2010; S. 37–46)

[93] (Lemaire et al. 1995), (Rosensweig 1995; S. 184 ff.), (Lemaire et al. 1996), (Bossis et al. 1997; S. 688 ff.), (Tang und Conrad 2000), (Kuzhir et al. 2003a), (Kuzhir et al. 2003b), (Kuzhir et al. 2011b)

[94] englisches Originalzitat: „It is inefficient to do more what can be done with less“ (Barnes 1999; S. 171)

delle für MRF und Schaumstoffmatrix dienen auf der Mesoebene dem FE Modell als Eingangsdaten [95].
Zur Formulierung phänomenologischer konstitutiver Beziehungen für magnetorheologische Fluide stehen die experimentellen Befunde der Fließkurven aus Abbildung 2.5(a) sowie Speicher- und Verlustmoduli aus Abbildung 2.5(b) zur Verfügung. Dem Autor dieser Arbeit sind für die Kontinuumsmodelle von MRF aus Abschnitt 2.9 keine Modellvorhersagen für Speicher- und Verlustmodul bekannt. Einzig und allein für das rheologische Modell nach Laun et al. (2009) konnten Vorhersagen zu Speicher- und Verlustmodul bezüglich oszillatorischer Scherung physikalisch großer Amplituden (LAOS) recherchiert werden. Deshalb wird in dieser Arbeit eine *zweistufige Modellierungsstrategie* verfolgt. Im Rahmen einer phänomenologischen Materialmodellierung bietet sich die Kombination der beiden erstgenannten Modellierungsansätze aus Abschnitt 2.9 an, da sie sich in idealer Weise ergänzen: Rheologische Modelle, die im ersten Modellierungsschritt den Bezug zu experimentellen Messergebnissen sicherstellen, werden anschließend mittels Kontinuumsmodellen in die dreidimensionale Welt eingebettet. Durch die chronologische Abfolge leitet sich eine strukturierte zweistufige Modellierungsstrategie ab, die in der Literatur bereits erfolgreich praktiziert wird [96]. Sie lässt sich in zwei Schwerpunkte unterteilen.
(I) Der erste Schwerpunkt beinhaltet die Motivation eines eindimensionalen Gesamtmodells basierend auf rheologischen Elementen, welches in der Lage ist die Messergebnisse für einfachen Schub aus Abbildung 2.5 zu modellieren. Dazu wird der Zusammenhang zwischen einer Schubspannung, beispielsweise $\tau = \tau_{12}$, und der zugeordneten Schubverzerrung $\gamma = \gamma_{12}$ ausgewertet. Weil die Beanspruchungen im Rahmen dieser Arbeit auf geometrisch lineare Theorie beschränkt sind, ist die Betrachtung der ingenieurtechnisch definierten [97] Spannungs- und Verzerrungstensorsen, $\boldsymbol{\sigma} = \sigma_{kl}\,\mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l$ und $\boldsymbol{\varepsilon} = \varepsilon_{kl}\,\mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l$, ausreichend. Für $k \neq l$ ergeben sich die Schubspannungen $\tau_{kl} = \sigma_{kl}$ und Schubverzerrungen (Gleitungen) $\gamma_{kl} = 2\varepsilon_{kl}$. Der ingenieurtechnisch definierte Verzerrungstensor $\boldsymbol{\varepsilon}$ ist in Gleichung (A.77) definiert. Der ingenieurtechnisch definierte Spannungstensor $\boldsymbol{\sigma}^{\top} \cdot \mathbf{n} = \frac{d\mathbf{f}}{dA}$ beschreibt den Zusammenhang zwischen dem differentiellen Schnittkraftvektor $d\mathbf{f}$ und dem Betrag des differentiellen Flächenelements dA, welches in Richtung des Flächennormaleneinheitsvektors $\mathbf{n}$ zeigt [98,99]. Entsprechend den Gleichungen (3.24) und (3.25) ist eine weitere Folge der Beschränkung auf geometrisch lineare Theorie, dass Normalspannungseffekte eine Größenordnung kleiner als Schubspannungseffekte sind. Somit können geometrisch lineare, einfache Schubbelastungen bereits durch das eindimensionale Gesamtmodell beschrieben werden. Die zur Modellierung von einfachen Schub formulierten rheologischen Modelle können ebenfalls zur rheologischen Modellierung von Normalbeanspruchungen (Zug-Druck) angewendet werden. Dazu müssen lediglich die Schubspannung τ und Schubverzerrung γ durch die Normalspannung $\sigma = \sigma_{11}$ und die Dehnung $\varepsilon = \varepsilon_{11}$ ersetzt [100] sowie Materialparameter angepasst werden.
(II) Der zweite Schwerpunkt sieht die dreidimensionale Verallgemeinerung [101] des eindimensionalen Gesamtmodells in den dreidimensionalen Rahmen der Kontinuumstheorie vor. Der zweite Schwerpunkt ist nicht wesentlicher Teil dieser Arbeit. Die dreidimensionale Verallgemeinerung kann in weiterführenden Arbeiten auf Grundlage der in Abschnitt 2.9 genannten Kontinuumsmodelle umgesetzt werden.

Die zweistufige Modellierungsstrategie basierend auf rheologischen Elementen wird ebenfalls von Krawietz (1986; S. 285 ff.) vorgeschlagen. In dem Kapitel „11.4 Zur formalen Übertragbarkeit der rheologischen Modelle“ schreibt KRAWIETZ: „Der oft gehörte Einwand, die rheologischen Modelle seien

[95] Im weitläufigen Sinn kann man die phänomenologische Materialmodellierung dieser Hauptbestandteile des MRK an sich auch als direkten Weg einer Mikro-Meso-Homogenisierung interpretieren.

[96] (Krawietz 1986; S. 285 ff.), (Maugin 1992; S. 7 ff.), (Miehe 1992; S. 10), (Lion 1994; S. 40, 41, 49, 62), (Keck 1998; S. 34), (Sedlan 2000; S. 61), (Freund und Ihlemann 2010; S. 408 ff.), (Kästner 2010; S. 51, 60, 70), (Kästner et al. 2012), (Boisly et al. 2016)

[97] (Hahn 1985; S. 43), (Haupt 2002; S. 186 f.), (Schnell et al. 2002; S. 10, 12), (Greve 2003; S. 22), (Parisch 2003; S. 83, 175), (Ottosen 2005; S. 23), (Silber und Steinwender 2005; S. 26, 29, 65, 69, 424), (Rust 2009; S. 22, 48 f., 52, 192), (Bower 2010; S. 24, 47), (Balke 2010a; S. 15), (Nasdala 2010; S. 11), (Altenbach 2012; S. 215, 307), (Bertram und Glüge 2013; S. 10, 13)

[98] (Giesekus 1994; S. 25), (Betten 2001; S. 71 ff.), (Spencer 2004; p. 47), (Altenbach 2012; S. 141 ff.)

[99] Die Darstellung unterstellt den ersten Index k des Spannungstensors σ_{kl} als Richtung der Flächennormale und den zweiten Index l in Wirkungsrichtung der Spannung. Eine Definition in umgekehrter Reihenfolge wird zum Beispiel bei Holzapfel (2000; S. 111) verwendet.

[100] (Weipert et al. 1993; S. 93), (DIN 13343; S. 2), (Betten 2005; S. 195)

[101] (Krawietz 1986; S. 4, 284), (Göldner 1989; S. 137), (Lion 1994; S. 62), (Betten 2001; S. 296), (Kletschkowski 2001; S. 238), (Tanner 2002; S. 150), (Gerlach 2003; S. 48), (Betten 2005; S. 151), (Silber und Steinwender 2005; S. 190), (Lubliner 2008; S. 64)

nicht hinreichend verallgemeinerungsfähig, wird durch unsere Ergebnisse widerlegt. Allerdings führt nicht ein einfacher formaler Weg, sondern nur das Vorgehen der Gedankengänge der Kapitel 9 bis 11 zum Ziel“. IHLEMANN und Mitautoren [102] benutzen das *Konzept repräsentativer Raumrichtungen* zur Vorhersage des dreidimensionalen Materialverhaltens auf Grundlage eindimensionaler konstitutiver Beziehungen. Alternativ dazu haben Ihlemann und Kießling et al. (2016) ein Konzept der direkten Verknüpfung rheologischer Elemente für große Deformationen aufbereitet. Ulbricht (1976; S. 22) und Maugin (1992; S. 7 ff.) nutzen den pädagogischen und heuristischen Wert rheologischer Modelle. Sie verweisen auf die anschauliche und bildhafte Darstellbarkeit von komplexen Materialverhalten auf Basis von Reihen- oder Parallelschaltungen einiger weniger Standardelemente (Feder, Dämpfer, Reibelement), wonach durch direkte Addition von Dehnungen und Spannungen schnell Materialgesetze abgeleitet werden können [103]. Als Beispiel sei auf Maugin (1992; Kapitel 5.1) hingewiesen, in dem die dreidimensionale Verallgemeinerung anhand von verfestigendem plastischen Materialverhalten gezeigt wird. Keck (1998; S. 34) benutzt ebenfalls rheologische Elemente und hebt die Vorzüge der zweistufigen Modellierungsstrategie hervor. Er schreibt: „Um die Komplexität, die eine dreidimensionale kontinuumsmechanische Formulierung für große Verzerrungen mit sich bringt, vorerst zu vermeiden und damit den Blick auf die wesentlichen Grundelemente des Modells nicht zu verstellen, wird zunächst ein eindimensionales Modell für inkompressibles Material formuliert, das die eingangs beschriebenen Effekte abbilden kann. Außerdem wird sich zeigen, dass es sinnvoll ist, die Parameteridentifikation mit diesem Modell durchzuführen, weil so relativ geringe Rechenzeiten erreichbar sind“. Eine Verallgemeinerung auf Grundlage eindimensionaler konstitutiver Gleichungen hat ebenfalls Lion (1994; S. 62) unternommen. Die „Motivation der Materialtheorie an einem nichtlinearen rheologischen Modell“ ist bei Lion (2000b; S. 98 ff.) dargestellt. Er notiert: „Basierend auf dieser Betrachtung sowie aus Gründen der Anschaulichkeit und der Stringenz bei der Wahl der inneren Variablen wird die Methode zur Entwicklung der Materialtheorie eng an rheologische Modelle angelehnt. [...] Die Übertragung rheologischer Modelle auf finite Deformationen führt zwar nicht auf die allgemeinst möglichen Stoffgleichungen, sie ermöglicht aber eine zutreffende Materialbeschreibung“. Zur formalen Übertragbarkeit rheologischer Modelle für finite Deformationen führt Haupt (2002; S. 426) eine Zwischenkonfiguration ein [104] und erklärt das Vorgehen anhand des MAXWELL Elementes. In Kästner et al. (2012) [105] sowie bei Kästner (2010; S. 14, 70) ist nachzulesen: „Durch die unterschiedliche Schaltung von [rheologischen] Grundelementen und der ihnen zugrundeliegenden Materialgleichungen können beliebig komplizierte einachsige Materialmodelle konstruiert werden. Dieses Vorgehen wird bei der Entwicklung einer konstitutiven Beschreibung [...] genutzt.“

Ein systematischer Überblick einer möglichen zweistufigen Modellierungsstrategie ist in Abbildung 2.8 anhand eines Ablaufschemas dargestellt. Es sind vordergründig die Teilarbeitsschritte des ersten Schwerpunktes der zweistufigen Modellierungsstrategie ausgearbeitet. Unter *Rahmenbedingungen der eindimensionalen Materialmodellierung* versteht man beispielsweise

- den maximalen Absolutwert der Verzerrung,
- die Größe der Rate der Verzerrung,
- den Temperatur- und Feuchtebereich,

[102] (Freund und Ihlemann 2008), (Freund und Ihlemann 2010; S. 408 ff.), (Freund et al. 2011b; S. 905 ff.), (Lorenz et al. 2011; S. 116), (Freund et al. 2011a)

[103] englisches Originalzitat: „A word must be said about these rheological models. Very often we shall have recourse to them as they exhibit strong pedagogical and heuristic values. Their use in rheology [...] has become general since Zener (1948). The combination in series or parallel of a few standard elements (spring, dashpot, dry friction, and other) provides a picturesque illustration of complex behaviours and the direct addition of stretches or forces, depending on the case, rapidly yields simple constitutive equations.“ (Maugin 1992; S. 7 ff.)

[104] englisches Originalzitat: „Even in the rheological models of classical linear viscoelasticity internal variables were employed to represent the states of displacement in damping elements. [...] Transferring this very simple model structure to 3-dimensional finite deformations is made possible by introducing an intermediate configuration. On the one hand this is based on a multiplicative decomposition of the deformation gradient and, on the other hand, it implies an additive decomposition of the strain in conformity with the one-dimensional situation.“ (Haupt 2002; S. 426)

[105] englisches Originalzitat: „In line with the experiments, a small strain uniaxial viscoplastic material model is derived, subsequently generalized to multiaxial loadings [...]. In many cases simple uniaxial rheological models are the basis for the formulation of constitutive equations which are subsequently generalized to multiaxial loadings or augmented to capture special characteristics of the material behavior.“

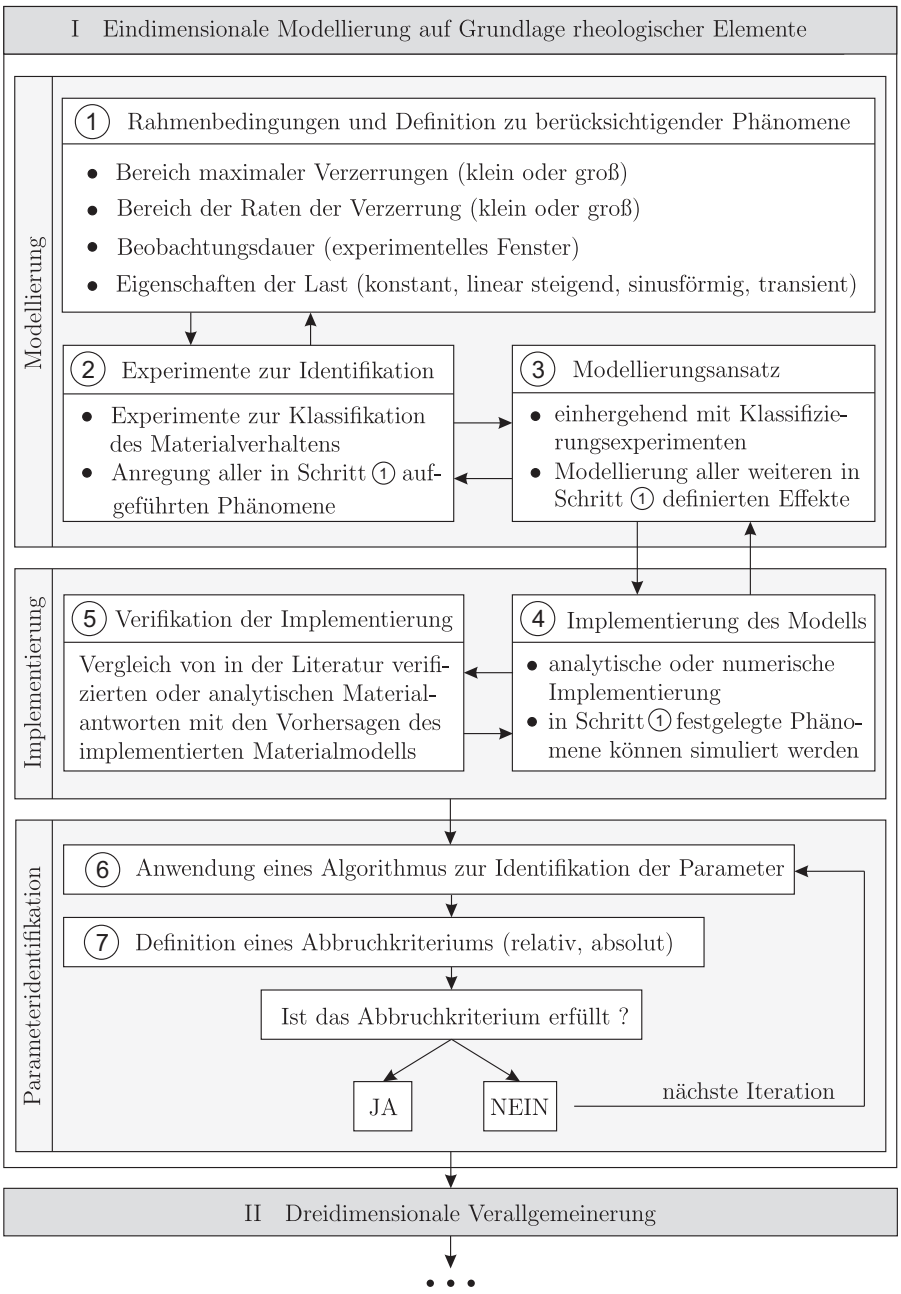


Abbildung 2.8: Zweistufige Strategie zur phänomenologischen Materialmodellierung

- die Eigenschaften der Anregung (konstant, linear ansteigend, sinusförmig, transient),
- die Haltezeiten bei Relaxations- und Kriechversuchen sowie
- den Frequenzbereich bei sinusförmiger Anregung.

Sie sind in Schritt ① definiert. Die Beschränkung der experimentellen Untersuchung auf eine begrenzte Zeitspanne ist mit den Begriffen des *experimentellen Fensters* [106] und der DEBORAH *Zahl* [107] verknüpft. Schritt ② beinhaltet die Durchführung von Identifikationsexperimenten. Ziel ist die Klassifikation des Materialverhaltens, um die qualitativen Eigenschaften des zunächst noch unbekannten Black-Box Operators festzulegen. In diesem Sinn bietet sich die Einordnung des Materialverhalten in die Klassifikation nach Haupt (2002; S. 269) an. Anschließend kann dem Black-Box Operator entweder elastisches, plastisches, viskoelastisches oder viskoplastisches Materialverhalten zugewiesen werden. Es legt die generelle

[106] (Schwarzl 1990; S. 150, 172, 203), (Werdin 1996; S. 65), (Barnes 1999; S. 139), (Wieser 1999; S. 22), (Haupt 2002; S. 255, 257), (Kardelky 2004; S. 59)

[107] (Reiner 1964), (Harris 1977; S. xxxviii), (Tschoegl 1989; S. 35), (Barnes et al. 1989; S. 5), (Macosko 1994; S. 136), (Pahl et al. 1995; S. 71), (Steffe 1996; S. 332), (Larson 1999; S. 18), (Morrison 2001; S. 448), (Owens und Phillips 2005; S. 7), (Tadros 2010; S. 65)

Struktur der Materialgleichungen in Schritt ③ fest. Im Anschluss dessen werden weitere Experimente durchgeführt, um entsprechend den geforderten Rahmenbedingungen aus Schritt ① alle bisher noch nicht angeregten Effekte und Prozesse zu stimulieren. Am Ende von Schritt ③ sind konstitutive Gleichungen formuliert, welche sowohl mit den Klassifizierungsexperimenten einhergehen als auch generell alle geforderten Effekte beinhalten. (*Folgerung 1*) Um die Messdaten modellieren zu können, muss man in der Lage sein, rheologische Elemente gezielt parallel oder in Reihe schalten zu können. Dazu ist es notwendig, die Vorhersagen für Materialfunktionen rheologischer Elemente zu kennen. Deswegen ist die Berechnung von Modellvorhersagen und Materialfunktionen ein wesentlicher Aspekt dieser Arbeit. Mit Kenntnis der Modellvorhersagen für Fließkurve sowie Speicher- und Verlustmodul können einzelne rheologische Elemente gezielt verschaltet werden, um ein gewünschtes Modellierungsergebnis zu erzielen. Dafür kommen die Regeln zur Kopplung allgemeiner rheologischer Grundmodelle nach Altenbach (2012; S. 297) und Bertram und Glüge (2013; S. 18 ff.) zur Anwendung. Die Reihenschaltung nach Abbildung 2.9 besteht aus

(a) Gesamtschaltung (b) Freischnitt des *i*-ten rheologischen Elements

Abbildung 2.9: Reihenschaltung von *n* rheologischen Elementen

$i = 1 \ldots n$ rheologischen Elementen. Die kinetische Bedingung einer Reihenschaltung ergibt sich zu [108]

$$\tau_i = \tau \qquad \text{mit } i = 1 \ldots n \,. \tag{2.1}$$

Die gesamte Schubverzerrung ergibt sich infolge der kinematischen Bedingung einer Reihenschaltung aus der Summe der Teilverzerrungen [109]

$$\gamma = \sum_{i=1}^{n} \gamma_\mathrm{i} \,. \tag{2.2}$$

Für eine Parallelschaltung aus $i = 1 \ldots n$ rheologischen Elementen entsprechend Abbildung 2.10 ergibt sich

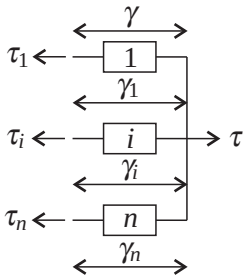


Abbildung 2.10: Parallelschaltung von *n* rheologischen Elementen

die kinetische Bedingung zu [110]

$$\tau = \sum_{i=1}^{n} \tau_\mathrm{i} \,. \tag{2.3}$$

Die kinematische Bedingung einer Parallelschaltung [111]

$$\gamma_i = \gamma \qquad \text{mit } i = 1 \ldots n \tag{2.4}$$

beinhaltet folglich, dass die Summe der Teilverzerrungen gleich der Gesamtverzerrung ist. Als Folge der kinetischen Bedingung einer Parallelschaltung (Gleichung (2.3)) und der linearen Eigenschaft des

[108] (Weipert et al. 1993; S. 93), (Lemaitre und Chaboche 1994; S. 100), (Kardelky 2004; S. 35), (Silber und Steinwender 2005; S. 155)

[109] (Weipert et al. 1993; S. 93), (Lemaitre und Chaboche 1994; S. 100), (Haupt 2002; S. 198), (Gross et al. 2004; S. 308), (Kardelky 2004; S. 35), (Silber und Steinwender 2005; S. 156)

[110] (Weipert et al. 1993; S. 93), (Lemaitre und Chaboche 1994; S. 100), (Haupt 2002; S. 199), (Gross et al. 2004; S. 302), (Silber und Steinwender 2005; S. 165)

[111] (Weipert et al. 1993; S. 93), (Lemaitre und Chaboche 1994; S. 100), (Silber und Steinwender 2005; S. 165)

Differential- und Integraloperators, setzen sich die Fließkurve, die differentielle Viskosität, Speicher- und Verlustmodul sowie Höherharmonische aus den Beiträgen der $i = 1 \dots n$ parallel geschalteten rheologische Elemente zusammen

$$\tau_\infty = \sum_{i=1}^{n} \tau_{\infty.i} \tag{2.5}$$

$$\eta_{\text{diff}} = \sum_{i=1}^{n} \eta_{\text{diff}.i} \tag{2.6}$$

$$G' = \sum_{i=1}^{n} G'_i \tag{2.7}$$

$$G'' = \sum_{i=1}^{n} G''_i \tag{2.8}$$

$$a_k = \sum_{i=1}^{n} a_{k.i} \tag{2.9}$$

$$b_k = \sum_{i=1}^{n} b_{k.i} \ . \tag{2.10}$$

Weil die Experimente in dieser Arbeit aus Abbildung 2.5 verzerrungsgesteuert durchgeführt sind, ist es sinnvoll, das gezielte Verschalten rheologischer Elemente auf Parallelschaltungen zu beschränken. (*Folgerung 2*) Schritt ④ der zweistufigen Modellierungsstrategie beinhaltet die Implementierung des Materialmodells. Existieren für alle zu modellierenden Anregungen analytische Lösungen, genügt eine Implementierung der analytischen Materialantworten. Ein weiterer Aspekt dieser Arbeit ist daher die möglichst analytische Bestimmung von Materialantworten und Materialfunktionen. Analytische Berechnungen sind vorteilhafter als numerisches Lösen, wenn auf phänomenologischer Ebene eine gezielte Analyse der dem Modell zugrunde liegenden Mechanismen im Fokus steht. Außerdem werden numerische Probleme auf ein Minimum reduziert. Sind jedoch nicht alle Modellantworten analytisch berechenbar, ist eine numerische Implementierung erforderlich. Die numerische Implementierung eines Materialmodells „A“ wird in Schritt ⑤ geeignet verifiziert. Die *direkte Verifizierung* beweist die Konvergenz des numerischen Algorithmus und erfordert daher tiefer greifendere Kenntnisse der numerischen Mathematik und Logik. Stattdessen wird in dieser Arbeit ein für Ingenieure anwendungsfreundliches Verfahren durchgeführt. Hierzu werden die numerischen Vorhersagen des Materialmodells „A“ für teilweise grenzwertige Materialparameter bestimmt. Aufgrund der teilweise grenzwertigen Wahl der Materialparameter, geht das Gesamtmodell „A“ in einen der Grenzfälle „B“, „C“, … über. In diesem Sinn ist der NEWTONsche Dämpfer ein Grenzfall des rCROSS Dämpfers (Boisly et al. 2015). Das MAXWELL Modell ist ein Grenzfall des rCROSS-MAXWELL Elements (Boisly et al. 2015) und das BINGHAM-HOOKE Modell (Boisly et al. 2017) ist ein Grenzfall des rCROSS-BINGHAM-HOOKE Elements. Unterstellt man, dass für die Grenzfälle „B“, „C“, … verifizierte (analytische) Lösungen existieren, können auf diese Weise die Vorhersagen des Gesamtmodells „A“ abgeglichen werden. Diese Art der Verifizierung kann daher als *indirekte Verifizierung* mittels Grenzfallanalyse bezeichnet werden. Auch hierfür wird der Stellenwert analytischer Lösungen deutlich. (*Folgerung 3*) Der Vorteil der indirekten Verifizierung, numerisch ermittelte Modellvorhersagen auf einem anwendungsfreundlichen Weg validieren zu können, besitzt jedoch auch Nachteile. So ist die indirekte Verifizierung notwendig aber nicht hinreichend für die korrekte numerische Implementierung eines Materialmodells. Daher ist die möglichst analytische Berechnung von Materialantworten und Materialfunktionen ein wesentlicher Bestandteil der Materialtheorie [112]. In den Schritten ⑥ und ⑦ werden die Materialparameter mittels Vergleich von Messungen und Modellvorhersagen bestimmt. Die Materialparameter werden solange variiert bis ein gewünschtes Abbruchkriterium erfüllt ist, infolgedessen die Qualität der Modellvorhersagen ein Mindestmaß erreicht hat. Dazu stehen eine Vielzahl von Methoden zur Verfügung. Einen Überblick findet man beispielsweise bei Brocks und Steglich (2007). Um Materialparameter nichtlinearer Modelle, für die keine analytischen Lösungen mehr gefunden werden können (Brocks und Steglich 2007; S. 109), zu identifizieren, werden in der Regel *nichtlineare Optimierungsalgorithmen* [113] verwendet. Diese

[112] (Haupt 1977; S. 138), (Giacomin et al. 2011)

[113] (Lion 1994; S. 103), (Werdin 1996; S. 56), (Streilein 1997; S. 148), (Keck 1998; S. 54), (Sedlan 2000; S. 120), (Nasdala 2000; S. 105), (Beinersdorf 2002), (Gerlach 2003; S. 53), (Kadachevitch 2003; S. 67), (Panhans 2004; S. 108), (Samir 2007; S. 79), (Brocks und Steglich 2007; S. 114), (Wang und Liao 2011; S. 26)

optimieren eine Zielfunktion, welche ein Optimierungskriterium zur Quantifizierung von Unterschieden zwischen *Soll*-Werten (Messergebnisse) und *Ist*-Werten (Modellierungsvorhersage) darstellt. Weil die Anfangsbedingungen einen entscheidenden Einfluss auf das Ergebnis nichtlinearer Optimierungsalgorithmen haben, können mathematisch zulässige aber physikalisch unsinnige Materialparameter identifiziert [114] werden. Dies ist darauf zurückzuführen, dass eine nichtlineare Zielfunktion mehrere lokale Minima besitzen kann und rein mathematisch arbeitende Optimierungsalgorithmen das zum Startvektor nächst gelegene Minimum identifizieren (Brocks und Steglich 2007; S. 114). (*Folgerung 4*)
In dieser Arbeit wird daher ein alternativer Ansatz verfolgt, der rein mathematisch arbeitende nichtlineare Optimierungsverfahren in erster Instanz verzichtbar macht. Er wird als *Methode charakteristischer Punkte* bezeichnet und ist ebenfalls auf nichtlineare Materialmodelle, für die keine analytischen Lösungen mehr existieren, anwendbar. Diese charakteristischen Punkte sind in Messungen leicht auffindbar und stehen in direktem Zusammenhang zu Materialparametern. Somit können Materialparameter Schritt für Schritt auf der Grundlage von Messdaten in deterministischer Art und Weise manuell bestimmt werden (Brocks und Steglich 2007; S. 112). Diese Art der Parameteridentifikation wird daher auch als *physikalisch motiviert* bezeichnet. In zweiter Instanz können die mit der Methode charakteristischer Punkte identifizierten Materialparameter auch als Anfangsbedingungen für rein mathematisch arbeitende nichtlineare Optimierungsverfahren benutzt werden (*Folgerung 5*). Es ist allerdings nicht Ziel dieser Arbeit.
Charakteristische Punkte sind beispielsweise Maxima oder Minima, Nullstellen, Plateauwerte oder Schnittpunkte von Materialfunktionen. Der mathematische Zusammenhang zwischen charakteristischen Punkten und Materialparametern kann durch eine Kurvendiskussion analytisch definierter Materialfunktionen gefunden werden (*Folgerung 5*). Dies unterstreicht noch einmal den hohen Stellenwert analytischer Lösungen sowie den Mehrwert gegenüber numerisch gegebenen Materialfunktionen (*Folgerung 6*). Die Stärke dieser Methode besteht darin, von charakteristischen Punkten weniger komplexen rheologischen Modellen „B“, „C“, … per Analogieprinzip auf charakteristische Punkte eines komplexeren Gesamtmodells „A“ zu schließen. Hierbei wird unterstellt, dass für die rheologischen Modelle „B“, „C“, … aufgrund der geringeren Komplexität analytische Lösungen existieren, welche für das Gesamtmodell „A“ aufgrund höherer Komplexität nicht mehr gegeben sind. (*Folgerung 5*) Beispielsweise werden in Boisly et al. (2015) die charakteristischen Punkte des rCROSS-MAXWELL Elements aus denen des MAXWELL Modells vorhergesagt. Die charakteristischen Punkte des BINGHAM-HOOKE Elements werden in Boisly et al. (2017) aus denen des PRANDTL Elements, MAXWELL Elements und Reibelements abgeleitet. Materialfunktionen, die in dieser Arbeit auf charakteristische Punkte untersucht werden, sind die Fließkurve, Speicher- und Verlustmodul sowie höherharmonische Moduli.

[114] Dodge und Krieger (1971; S. 593) und Brocks und Steglich (2007; S. 114) weisen ebenfalls auf den Einfluss von Anfangsbedingungen der zu identifizierenden Materialparameter hin und DODGE bezeichnet diese als „Trial Parameter“.

3. Grundlegende Betrachtungen für die Materialmodellierung

3.1 Physikalisch nichtlineares Materialverhalten im Bereich geometrisch linearer Theorie

Die Formulierung von Materialmodellen hängt maßgeblich vom gültigen Deformationsbereich ab. Bis zu einer gewissen Grenze, der sogenannten materialspezifischen *Linearitätsgrenze* [1], verhält sich ein Material phyikalisch linear. *Physikalische Linearität* [2] liegt vor, wenn die konstitutiven Beziehungen durch einen Linearoperator Ψ beschrieben sind. Der Linearoperator verknüpft die unabhängigen konstitutiven Variablen x mit den abhängigen konstitutiven Variablen y

$$y = \Psi(x) \ . \tag{3.1}$$

Die Modellierung von physikalisch linearem Materialverhalten gelingt im Rahmen der linearen Viskoelastizität [3] und ist Stand der Technik. Ein Linearoperator ist *additiv*

$$\Psi(x_1 + x_2) = \Psi(x_1) + \Psi(x_2) = y_1 + y_2 \tag{3.2}$$

und *homogen vom Grad 1*

$$\Psi(mx) = m\Psi(x) = my, \tag{3.3}$$

mit m als beliebig reelle Zahl. Wird die Linearitätsgrenze überschritten, verhält sich ein Material *physikalisch nichtlinear* [4]. Physikalische Nichtlinearität wird auch als *materielle Nichtlinearität* [5] bezeichnet. Das Materialverhalten lässt sich dann nicht mehr durch einen Linearoperator beschreiben. Für die experimentelle Untersuchung der Linearitätsgrenze ist die Genauigkeit der Messinstrumente ausschlaggebend (Wilhelm 2002; S. 92). Die Linearitätsgrenze kann von einer

- *kritischen Spannung* τ_{cr} [6], (S1)
- *kritischen Schubverzerrung* γ_{cr} [7], (S2)
- *kritischen Schubverzerrungsrate* $\dot{\gamma}_{cr}$ [8] oder von (S3)

[1] (Knausenberger 1982; S. 35), (Schwarzl 1990; S. 138), (Morrison 2001; S. 152), (Oswald 2009; S. 328), (Deshpande et al. 2010; S. 94)

[2] (Barnes et al. 1989; S. 4, 38), (Deshpande et al. 2010; S. 94, 98)

[3] (Tschoegl 1989), (Schwarzl 1990), (Emri und Tschoegl 1992), (Emri und Tschoegl 1993a), (Emri und Tschoegl 1993b), (Emri und Tschoegl 1994), (Giesekus 1994), (Macosko 1994), (Haupt 2002), (Tschoegl et al. 2002), (Silber und Steinwender 2005), (Kästner 2010; S. 56, 62, 145), (Kästner et al. 2012), (Boisly et al. 2016)

[4] (Krawietz 1986; S. 146), (Sedlan 2000; S. 62, 71), (Wriggers 2001; S. 15), (Betten 2001; S. 12, 18, 108, 440), (Kardelky 2004; S. 3), (Sedlacek 2009; S. 4), (Merkel 2010; S. 245)

[5] (Holzapfel 2000; S. 399), (Bathe 2002; S. 570), (Werkle 2008; S. 469), (Nasdala 2010; S. 10), (Merkel 2010; S. 245), (Kuna 2010; S. 175)

[6] (Fuchs und Cates 2003; S. 279), (Moller et al. 2006), (Christopoulou et al. 2009; S. 5052), (Segovia-Gutierrez et al. 2012; S. 1437)

[7] (Scott Blair 1949; S. 58), (Weiss et al. 1994), (Pahl et al. 1995; S. 146), (Yziquel et al. 1999b; S. 14 ff.), (Kirsch et al. 2001; S. 556), (Wilhelm 2002; S. 93, Abb. 6), (Li et al. 2003; S. 282), (Uhlherr et al. 2005; S. 107), (Coussot 2005; S. 61, 90), (Tiu et al. 2006; S. 653), (Hyun et al. 2007; S. 1325), (Christopoulou et al. 2009; S. 5057 ff.), (Tadros 2010; S. 77), (Kowalczyk et al. 2010; S. 5), (Mezger 2010; S. 151), (Boisly et al. 2014b), Abschnitt 5

[8] (Wilhelm et al. 1998; S. 402), (Coussot 2005; S. 63), (Hess, Kröger und Fischer 2006; S. 396), (Kowalczyk et al. 2010; S. 5), (Boisly et al. 2015)

- beiden γ_{cr} und $\dot{\gamma}_{cr}$ [9] (S4)

abhängen. Verändert sich die Linearitätsgrenze in Abhängigkeit von der Deformationsgeschichte, so ist dies auf die Entwicklung innerer Variablen zurückzuführen. Das kann beispielsweise für ein PRANDTL Modell (Boisly et al. 2014b) mit isotroper Verfestigung [10] nachvollzogen werden. Gelegentlich wird die kritische Schubverzerrung mit dem Eintreten von plastischem Fließen [11] in Verbindung gebracht. Dies muss jedoch nicht immer der Fall sein. Beispielsweise können die viskoplastischen Materialmodelle aus Abbildungen 8.4 und 8.13 zuerst in einen nichtlinear viskoelastischen Vorfließbereich übergehen, bevor sie plastisch zu Fließen beginnen.

Eine andere Art der Nichtlinearität ergibt sich aus der kinematischen Betrachtung eines Feldproblems. Deformationen setzen sich im Allgemeinen aus Verzerrungen und Rotationen zusammen (Bertram 2008; S. 110). *Große (finite) Deformationen* [12] liegen bei großer Rotation und großer (finiter) Verzerrung vor [13]. Bei *geometrisch nichtlinearer Theorie* [14] ergeben sich große Verschiebungen ausschließlich infolge großer Rotation. Die Verzerrung ist jedoch klein [15].

Im Rahmen von *geometrisch linearer Theorie*[16] sind Bewegungen und Deformationen materieller Punkte klein. Kleine Bewegungen impliziert kleine Verschiebungen [17]. Diese erzwingen wiederum kleine Rotationen [18]. Räumliche und materielle Verschiebungsgradienten sind ebenfalls klein, woraus sich kleine (infinitesimale) Verzerrungen [19] und kleine Rotationen [20] ableiten lassen. Der Verschiebungsgradient kann im Rahmen geometrisch linearer Theorie additiv in einen antisymmetrischen Teil, den infinitesimalen Rotationstensor [21], und einen symmetrischen Teil, den infenitesimalen Verzerrungstensor [22], zerlegt werden. Die Forderung nach kleinen Verschiebungen zusätzlich zu kleinen Verzerrungen ist für die Beschränkung auf geometrisch lineare Theorie zwingend erforderlich (Backhaus 1983; S. 77), da auch für große Verschiebun-

[9] (Dealy und Wissbrun 1990; S. 103), (Macosko 1994; S. 136), (Oswald 2009; S. 329 Abb. 6.1), (Boisly et al. 2015)

[10] (Göldner 1989; S. 224–228), (Kreißig 1992; S. 2, 54, 59), (Lemaitre und Chaboche 1994; S. 108, 109), (Altenbach 1994; S. 214), (Khan und Huang 1995; S. 156), (Simo und Hughes 2000; S. 11, 12, 17, 19, 90), (Betten 2001; S. 136), (Wriggers 2001; S. 54), (Haupt 2002; S. 452, 461, 479), (Lubarda 2002; ch. 9.4.1), (Ottosen 2005; S. 209–218), (Houlsby und Puzrin 2006; S. 25), (Lubliner 2008; S. 112, 125, 146, 147), (Chaboche 2008; S. 1644), (Sedlacek 2009; S. 57), (Nasdala 2010; S. 175), (Puzrin 2012; S. 226, 217)

[11] (Doraiswamy et al. 1991; S. 656), (Nguyen und Boger 1992; S. 83), (Weiss et al. 1994; S. 773), (Yziquel et al. 1999b; S. 15), (Li et al. 1999; S. 463), (Coussot 2005; S. 61)

[12] (Wriggers 2001; S. 2), (Merkel 2010; S. 246), (Kuna 2010; S. 175)

[13] (Betten 2001; S. 38), (Bathe 2002; S. 570), (Betten 2005; S. 38), (Werkle 2008; S. 470), (Sedlacek 2009; S. 4), (Altenbach 2012; S. 115)

[14] (Wriggers 2001; S. 2), (Merkel 2010; S. 245), (Kuna 2010; S. 175)

[15] (Pipkin 1972; S. 114, 116), (Wriggers 2001; S. 25), (Bathe 2002; S. 570), (Werkle 2008; S. 470), (Nasdala 2010; S. 10)

[16] (Becker und Bürger 1975; S. 49), (Krawietz 1986; S. 145), (Miehe 1992; S. 10), (Kreißig und Benedix 2002; S. 31), (Bertram 2008; S. 110), (Kienzler und Schröder 2009; S. 85)

[17] (Truesdell und Toupin 1960; S. 308), (Backhaus 1983; S. 91), (Krawietz 1986; S. 146), (Giesekus 1994; S. 46), (Haupt 2002; S. 185), (Kreißig und Benedix 2002; S. 31), (Ottosen 2005; S. 23), (Nasdala 2010; S. 11) ↔ (Bathe 2002; S. 607), (Greve 2003; S. 97), (Kästner 2010; S. 6)

[18] (Truesdell und Toupin 1960; S. 274, 305), (Eringen 1962; S. 16, 33), (Pipkin 1972; S. 116 ff.), (Eringen 1980; S. 19), (Backhaus 1983; S. 91), (Krawietz 1986; S. 145), (Giesekus 1994; S. 50), (Holzapfel 2000; S. 187), (Liu 2002; S. 10), (Kreißig und Benedix 2002; S. 31), (Greve 2003; S. 133), (Spencer 2004; S. 82), (Ottosen 2005; S. 67), (Altenbach 2012; S. 115), (ABAQUS 2006; S. 1.4.2-5)

[19] (Truesdell und Toupin 1960; S. 306), (Eringen 1962; S. 13), (Becker und Bürger 1975; S. 49), (Eringen 1980; S. 19), (Mälmeisters 1977; S. 81), (Krawietz 1986; S. 145), (Maugin 1992; S. 31 ff.), (Betten 2001; S. 40, 44), (Haupt 2002; S. 53), (Kreißig und Benedix 2002; S. 31), (Liu 2002; S. 9), (Greve 2003; S. 22), (Spencer 2004; S. 78), (Betten 2005; S. 38), (Silber und Steinwender 2005; S. 65), (Bertram 2008; S. 110), (Rust 2009; S. 8), (MSC.Marc® 2010; S. 111), (Altenbach 2012; S. 115)

[20] (Truesdell und Toupin 1960; S. 306), (Eringen 1962; S. 16 ff.), (Lion 1994; S. 10), (Haupt 2002; S. 53), (Liu 2002; S. 10), Spencer (2004; S. 82, 83)

[21] Der Zusammenhang zwischen dem infinitesimalen Rotationstensor und einem infinitesimalen Rotationsvektor ist bei Eringen (1962; S. 16), Malvern (1969; S. 131), Spencer (2004; S. 78, 82), Kienzler und Schröder (2009; S. 83) aufgezeigt.

[22] (Eringen 1962; S. 16), (Malvern 1969; S. 123-131), (Liu 2002; S. 10), (Haupt 2002; S. 56), (Spencer 2004; S. 78, 82), (Kienzler und Schröder 2009; S. 83)

gen kleine Verzerrungen auftreten können [23, 24]. Als Konsequenz kleiner Verschiebungsgradienten stimmen die Referenz- und Momentankonfiguration in guter Näherung überein. Dies ist im Anhang infolge der Gleichungen (A.72), (A.76) und (A.103) gezeigt. Deshalb besteht bei geometrisch linearer Theorie keine Notwendigkeit zwischen LAGRANGEscher und EULERscher Formulierung zu unterscheiden [25]. Die gesamte Verzerrung kann additiv in elastische, plastische oder viskose Anteile aufgeteilt werden [26].

3.2 Kinematische Beschreibung von einfachem Schub

Zur kontinuumsmechanischen Beschreibung der Schubdeformation werden dem materiellen Körper $\mathcal{B}$ kontinuierliche Eigenschaften unterstellt [27]. Der materielle Körper besteht aus *materiellen Punkten* [28].

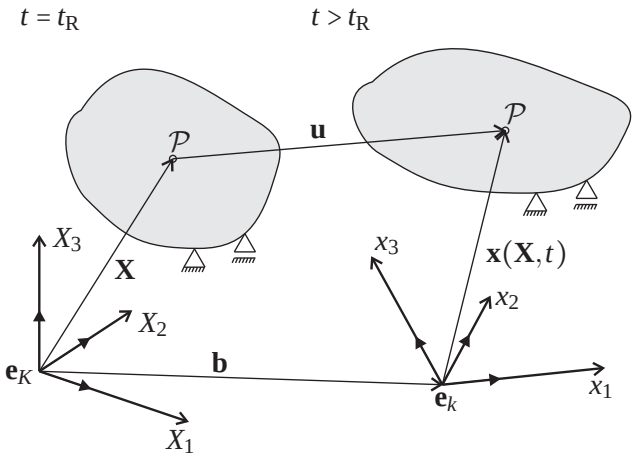


Abbildung 3.1: Deformation eines materiellen Körpers $\mathcal{B}$ ausgehend von einer Referenzkonfiguration in eine Momentankonfiguration [29]

Um die Deformation des Körpers mathematisch zu beschreiben, sei der Körper zu verschiedenen Konfigurationen betrachtet. Durch den Vergleich einer *Momentankonfiguration* zum Momentanzeitpunkt $t > t_R$ mit der *Referenzkonfiguration* zum Referenzzeitpunkt $t = t_R$ können kinematische Größen für einen materiellen Punkt $\mathcal{P}$ quantifiziert werden. Im Folgenden wird der makroskopisch spannungsfreie Zustand zu Beginn einer Deformationsgeschichte als Referenzkonfiguration definiert, sodass $t_R = t_0 = 0$ [30, 31]. Jeder materielle Punkt ist durch die Zuordnung mit dem Ortsvektor der Referenzkonfiguration

$$\mathcal{P} \Leftrightarrow \mathbf{X} = X_K \mathbf{e}_K \qquad K = 1,2,3 \tag{3.4}$$

$$\|\mathbf{e}_K\| = 1 \tag{3.5}$$

[23] Ein Beispiel dafür ist die Biegung eines Balkens [(Backhaus 1983; S. 92), (ABAQUS 2006; S. 1.4.2-4)] dessen Länge wesentlich größer als die Höhe des Querschnitts ist. Selbst wenn der Balken derart gebogen wird, dass sich die beiden Enden berühren, sind die Verzerrungen klein aber die Verschiebungen materieller Punkte sind groß. Starrkörperrotation [(Macosko 1994; S. 28, 36), (Holzapfel 2000; S. 82, 187), (Betten 2001; S. 42, Ü 1.3.9), (Haupt 2002; S. 32), (Spencer 2004; S. 63, 79, 86), (Bertram 2008; S. 108), (Nasdala 2010; S. 11)] ist ein weiteres Beispiel.

[24] Außerdem weist Haupt (2002; S. 56) darauf hin, dass kleine Verzerrungsraten zusätzlich zu kleinen Verzerrungen unterstellt werden müssen, um alle Ableitungen und Raten kinematischer Größen im allgemeinen Fall zu linearisieren: „In order to linearise all derivatives and rates of the kinematic quantities, we have to assume small deformation rates in addition to small deformation“ (Haupt 2002; S. 56).

[25] (Truesdell und Toupin 1960; S. 308), (Eringen 1980; S. 20), (Krawietz 1986; S. 146), (Eringen und Maugin 1990a; S. 10), (Maugin 1992; S. 31), (Holzapfel 2000; S. 399), (Betten 2001; S. 40), (Kästner 2010; S. 6)

[26] (Miehe 1992; S. 11), (Kletschkowski et al. 2002b; S. 294), (Kletschkowski et al. 2002a; S. 800), (Altenbach 2012; S. 252)

[27] (Schade und Kunz 1989; S. 6,7,10), (Eringen und Maugin 1990a; S. 3), (Giesekus 1994; S. 9), (Parisch 2003; S. 49), (Coussot 2005; S. 6), (Pal 2007; S. 51), (Eck et al. 2008; S. 198), (Haasemann 2008; S. 58), (Kästner 2010; S. 18), (Altenbach 2012; S. 7)

[28] (Giesekus 1994; S. 9), (Holzapfel 2000; S. 56), (Silber und Steinwender 2005; S. 34), (Altenbach 2012; S. 12)

[29] (Eringen 1962; S. 6, 14), (Eringen 1980; S. 7), (Eringen und Maugin 1990a; S. 4), (Greve 2003; S. 2), (Parisch 2003; S. 61)

[30] (Holzapfel 2000; S. 58), (Greve 2003; S. 1), (Parisch 2003; S. 60), (Spencer 2004; S. 33), (Silber und Steinwender 2005; S. 35)

[31] Generell kann nach Becker und Bürger (1975; S. 10), Krawietz (1986; S. 95, 96), Eringen und Maugin (1990a; S. 13), Giesekus (1994; S. 11), Lion (1994; S. 9), Haupt (2002; S. 9), Greve (2003; S. 27) und Altenbach (2012; S. 75) jede Konfiguration als Referenzkonfiguration definiert werden.

unter Verwendung der EINSTEINschen Summationsvereinbahrung [32]

$$X_K \mathbf{e}_K = X_1 \mathbf{e}_1 + X_2 \mathbf{e}_2 + X_3 \mathbf{e}_3 \tag{3.6}$$

definiert. Der Ortsvektor in der Momentankonfiguration wird durch

$$\mathbf{x} = x_k \mathbf{e}_k \qquad k = 1,2,3 \tag{3.7}$$

$$\|\mathbf{e}_k\| = 1 \tag{3.8}$$

erfasst. Die *Trajektorie* $\mathbf{x}_{\mathcal{P}}$ eines materiellen Punktes $\mathbf{X}$ [33] wird durch die Zuordnungsvorschrift $\boldsymbol{\chi}$ in Bezug auf das Koordinatensystem $\mathbf{e}_k$ angegeben

$$\mathbf{x}_{\mathcal{P}}(t) = \boldsymbol{\chi}(\mathbf{X}\cdot\mathbf{e}_M, t) = \chi_k(X_M, t)\,\mathbf{e}_k = \mathbf{x}(\mathbf{X}\cdot\mathbf{e}_M, t) = x_k(X_M, t)\,\mathbf{e}_k \ . \tag{3.9}$$

Eine vergleichbare symbolische Beschreibung der Abhängigkeit $\mathbf{x}(\mathbf{X}\cdot\mathbf{e}_M, t)$ wird bei Ogden (1984; S. 102), Holzapfel (2000; S. 93) sowie Truesdell und Noll (2004; S. 21) aufgeführt. Sie wird im Folgenden rein formal durch $\mathbf{x}(\mathbf{X}, t)$ ersetzt. Zugunsten der Übersichtlichkeit wird das einfach verjüngende Produkt [34] $(\,)\cdot(\,)$ zwischen $\mathbf{X}$ und dem Basisvektor $\mathbf{e}_M$ nicht mitgeführt. Das einfach verjüngende Produkt ist für Tensoren definiert als

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = A_{kl}\mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l \cdot B_{nm}\mathbf{e}_n \otimes \mathbf{e}_m = A_{kl}B_{nm}\,\mathbf{e}_k \otimes \underbrace{\mathbf{e}_l \cdot \mathbf{e}_n}\otimes \mathbf{e}_m = A_{kl}B_{nm}\,\delta_{ln}\,\mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_m = A_{kl}B_{lm}\mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_m \ . \tag{3.10}$$

Die Inverse $\boldsymbol{\chi}^{-1}$ der Trajektorie eines materiellen Punktes [35]

$$\mathbf{X}(\mathbf{x}\cdot\mathbf{e}_k, t) = \mathbf{x}^{-1}(\mathbf{X}\cdot\mathbf{e}_K, t) = \boldsymbol{\chi}^{-1}(\mathbf{x}\cdot\mathbf{e}_k, t) = \chi_K^{-1}(x_k, t)\mathbf{e}_K = X_K(x_k, t)\mathbf{e}_K \tag{3.11}$$

ergibt sich unter Berücksichtigung der Identität [36]

$$\mathbf{x}\big[\mathbf{X}(\mathbf{x}\cdot\mathbf{e}_n, t)\cdot\mathbf{e}_M, t\big] = \boldsymbol{\chi}\big[\boldsymbol{\chi}^{-1}(\mathbf{x}\cdot\mathbf{e}_n, t), t\big] = \mathbf{x} \ . \tag{3.12}$$

Analog wird im Folgenden $\mathbf{X}(\mathbf{x}\cdot\mathbf{e}_k, t)$ zur Wahrung der Übersichtlichkeit formal durch $\mathbf{X}(\mathbf{x}, t)$ ersetzt. Außerdem findet anstelle von $\boldsymbol{\chi}(\ \ , t)$ und $\boldsymbol{\chi}^{-1}(\ \ , t)$ die Notation $\mathbf{x}(\ \ , t)$ und $\mathbf{X}(\ \ , t)$ Verwendung.
Die Verschiebung $\mathbf{u}$ eines materiellen Punktes kann in Abhängigkeit von $\mathbf{X}$ bezüglich des Koordinatensystems $\mathbf{e}_K$ und der Zeit t angegeben werden

$$\mathbf{X} + \mathbf{u}(\mathbf{X}, t) = \mathbf{b} + \mathbf{x}(\mathbf{X}, t) \ . \tag{3.13}$$

Dies kann Abbildung 3.1 entnommen werden und wird in der Literatur als *materielle* oder LAGRANGE Formulierung [37] bezeichnet. Die *räumliche* beziehungsweise EULERsche Beschreibung [38] der Verschiebung eines materiellen Punktes

$$\mathbf{X}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{b} + \mathbf{x} \tag{3.14}$$

[32] (Prager 1961a; S. 14), (Kästner 1964; S. 21), (Betten 1987; S. 15), (Klingbeil 1993; S. 19), (Morrison 2001; S. 34), (Parisch 2003; S. 6), (Tinder 2008; S. 13), (Schade und Neemann 2009; S. 1), (Kay 2011; S. 1)

[33] (Hamel 1956; S. 9), (Truesdell und Toupin 1960; S. 243 ff.), (Prager 1961a; S. 169), (Eringen 1962; S. 6), (Malvern 1969; S. 139, 156), (Pipkin 1972; S. 116 ff.), (Becker und Bürger 1975; S. 10), (Eringen 1980; S. 7), (Ogden 1984; S. 77), (Eringen und Maugin 1990a; S. 5), (Miehe 1992; S. 32 ff.), (Lion 1994; S. 9), (Giesekus 1994; S. 11), (Kaliske 1995; S. 23), (Schröder 1996; S. 9), (Spurk 1996; S. 7), (Holzapfel 2000; S. 59), (Betten 2001; S. 28), (Wriggers 2001; S. 20), (Haupt 2002; S. 16), (Liu 2002; S. 1), (Parisch 2003; S. 62), (Greve 2003; S. 2), (Spencer 2004; S. 34), (Silber und Steinwender 2005; S. 24, 36), (Altenbach 2012; S. 72)

[34] (Kästner 1964; S. 73), (Betten 1987; S. 106), (Klingbeil 1993; S. 45), (Morrison 2001; S. 35), (Spencer 2004; S. 27), (Ottosen 2005; S. 5), (Tinder 2008; S. 27), (Bertram 2008; S. 20), (Schade und Neemann 2009; S. 69), (Altenbach 2012; S. 31)

[35] (Hamel 1956; S. 10), (Truesdell und Toupin 1960; S. 243 ff.), (Eringen 1962; S. 6), (Malvern 1969; S. 156), (Becker und Bürger 1975; S. 11), (Eringen 1980; S. 7, 8), (Ogden 1984; S. 80), (Krawietz 1986; S. 96), (Eringen und Maugin 1990a; S. 5), (Giesekus 1994; S. 11), (Kaliske 1995; S. 23), (Schröder 1996; S. 9), (Holzapfel 2000; S. 59), (Betten 2001; S. 28), (Wriggers 2001; S. 22), (Parisch 2003; S. 63), (Spencer 2004; S. 35), (Silber und Steinwender 2005; S. 37), (Altenbach 2012; S. 72)

[36] (Ogden 1984; S. 80), (Giesekus 1994; S. 11), (Schröder 1996; S. 9, 11), (Holzapfel 2000; S. 59), (Silber und Steinwender 2005; S. 37)

[37] (Malvern 1969; S. 138), (Krawietz 1986; S. 95), (Lion 1994; S. 9), (Holzapfel 2000; S. 59), (Betten 2001; S. 29, 33), (Haupt 2002; S. 20), (Parisch 2003; S. 62), (Greve 2003; S. 3), (Silber und Steinwender 2005; S. 39), (Altenbach 2012; S. 74)

[38] (Malvern 1969; S. 138), (Holzapfel 2000; S. 60), (Betten 2001; S. 29, 33), (Haupt 2002; S. 19), (Parisch 2003; S. 63), (Greve 2003; S. 3), (Silber und Steinwender 2005; S. 39), (Altenbach 2012; S. 74)

hängt von der Zeit t sowie dem Ort $\mathbf{x}$, bezogen auf das Koordinatensystems $\mathbf{e}_k$, ab (Eringen 1980; Gl. (1.5.6)). Sie ergibt sich ausgehend von Gleichung (3.9) als Inverse $\boldsymbol{\chi}^{-1}$ der Trajektorie eines materiellen Punktes. Zur Vereinfachung wird folgend die Allgemeinheit durch

$$\mathbf{b} = \mathbf{0} \tag{3.15}$$

eingeschränkt. Dies ist nicht zwingenderweise notwendig [39], hilft aber den Fokus auf die für die Arbeit wesentlichen Aussagen zu richten.

Auf Grundlage dieser Beziehungen werden im Folgenden die kinematischen Größen für einfachen Schub [40] ermittelt. Ausgehend von der Bahnlinie materieller Punkte ergeben sich Verzerrungsmaße, die in Anhang A.1 definiert sind. Ziel ist es, die für die geometrisch lineare Theorie maximal mögliche Schubverzerrung zu bestimmen, bei der Unterschiede zwischen den Verzerrungsmaßen und ihren linearisierten Größen vernachlässigbar sind. Dazu wird der Zusammenhang zwischen der äußeren Steuergröße $s(t)$ und den Verzerrungsmaßen ermittelt. Die Abmessung $s(t)$ beschreibt die Verschiebung der in Abbildung 3.2 grau hervorgehobenen Fläche $[0 \le X_1 \le \ell_0,\ X_2 = h,\ 0 \le X_3 \le b]$ in x_1-Richtung. Die Höhe, Breite und

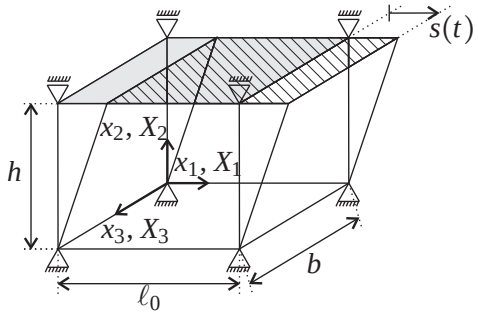


Abbildung 3.2: Einfacher Schub eines quaderfömigen Körpers

Tiefe des zu deformierenden Körpers bleiben während einfachem Schub konstant, sodass $h_0 = h = \text{konst}$, $b_0 = b = \text{konst}$ und $\ell_0 = \text{konst}$. Die Trajektorie eines materiellen Punktes unter einfachem Schub ist durch

$$\mathbf{x} = \left[X_1 + \frac{s(t)}{h} X_2 \right] \mathbf{e}_1 + X_2\, \mathbf{e}_2 + X_3\, \mathbf{e}_3 \tag{3.16}$$

definiert. Die Inverse der Trajektorie ergibt sich zu

$$\mathbf{X} = \left[x_1 - \frac{s(t)}{h} \right] x_2\, \mathbf{e}_1 + x_2\, \mathbf{e}_2 + x_3\, \mathbf{e}_3\ . \tag{3.17}$$

Damit können die Koordinaten des Verschiebungsvektors

$$u_K = \begin{pmatrix} \frac{s(t)}{h} X_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{3.18}$$

$$u_k = \begin{pmatrix} \frac{s(t)}{h} x_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{3.19}$$

bestimmt werden. Es ist zu erkennen, dass die Höhe h die Rolle einer charakteristischen Länge einnimmt. Der materielle und räumliche Verschiebungsgradient ergeben gleichermaßen

$$u_{K,L} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{s(t)}{h} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{3.20}$$

$$u_{k,l} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{s(t)}{h} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\ . \tag{3.21}$$

[39] (Eringen 1962; S. 5), (Greve 2003; S. 3)

[40] (Truesdell und Toupin 1960; S. 292), (Eringen 1962; S. 54), (Lodge 1964; S. 38), (Reiner 1968; S. 52), (Becker und Bürger 1975; S. 29, 30, 144), (Eringen 1980; S. 56), (Backhaus 1983; S. 28, 108), (Ogden 1984; S. 101), (Krawietz 1986; S. 223), (Schwarzl 1990; S. 302, 321), (Eringen und Maugin 1990a; S. 347), (Giesekus 1994; S. 53), (Macosko 1994; S. 27, 28, 31, 35), (Wilmanski 1998; S. 25), (Holzapfel 2000; S. 60, 93), (Betten 2001; S. 378), (Liu 2002; S. 6, 166), (Greve 2003; S. 17), (Spencer 2004; S. 74), (Truesdell und Noll 2004; S. 442), (Betten 2005; S. 173, 184), (Silber und Steinwender 2005; S. 37, 47, 60, 70), (Bertram 2008; S. 113), (Altenbach 2012; S. 131)

Der Deformationsgradient $\mathbf{F}$ und der inverse Deformationsgradient $\mathbf{F}^{-1}$ betragen [41]

$$F_{kK} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{s(t)}{h} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (3.22) \qquad F^{-1}_{Kk} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{s(t)}{h} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \qquad (3.23)$$

Der LAGRANGEsche Verzerrungstensor $\mathbf{E}$ wird für Gleichung (3.18) entsprechend Gleichung (A.35) berechnet. Der EULERsche Verzerrungstensor $\mathbf{e}$ ergibt sich für Gleichung (3.19) mittels Gleichung (A.37). Damit erhält man [42]

$$E_{KL} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & \frac{s(t)}{h} & 0 \\ \frac{s(t)}{h} & \left(\frac{s(t)}{h}\right)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad (3.24) \qquad e_{kl} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & \frac{s(t)}{h} & 0 \\ \frac{s(t)}{h} & -\left(\frac{s(t)}{h}\right)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} . \qquad (3.25)$$

Alternativ dazu können die Ergebnisse mit Hilfe der Berechnungen nach Gleichungen (A.34) und (A.36) kontrolliert werden. In beiden Fällen treten die quadratischen Terme $u_{N,K}u_{N,L}$ und $u_{n,k}u_{n,l}$ ausschließlich für die Normalkomponenten $E_{22}\,\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2$ und $e_{22}\,\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2$ auf. Für die linearisierten Verzerrungsgrößen [43]

$$E^{\text{lin}}_{KL} = e^{\text{lin}}_{kl} = \varepsilon_{KL} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2}\frac{s(t)}{h} & 0 \\ \frac{1}{2}\frac{s(t)}{h} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad (3.26)$$

verschwinden die quadratischen Terme, sodass beide in den ingenieurtechnisch definierten Verzerrungstensor $\boldsymbol{\varepsilon} = \varepsilon_{KL}\,\mathbf{e}_K \otimes \mathbf{e}_L$ übergehen. Die Koordinaten des Verzerrungstensors in $\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2$ und $\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1$ Richtung, siehe Seite 17, entsprechen der Hälfte der Schubverzerrung [44]

$$\gamma = \frac{s(t)}{h} . \qquad (3.27)$$

Daher können Normaleffekte [45] im Rahmen geometrisch linearer Theorie vernachlässigt werden. Für große Deformationen sind sie nicht zu vernachlässigen (Ferry 1980; S. 27). Die Restriktion zur Gewähr von

$$\text{geometrisch linearem einfachen Schub:} \qquad |\gamma(t)| \lesssim 0.1 \qquad (3.28)$$

ergibt sich notwendigerweise aus Gleichungen (3.20), (3.21), (A.56) und (A.57). Um die Abweichung der linearisierten Verzerrungsmaße von den exakten Verzerrungsmaßen zu bestimmen, wird die Norm des Tensors

$$\|(\,)_{KL}\| = \sqrt{(\,)_{KL}\,(\,)_{KL}} \qquad (3.29)$$

ausgewertet und man erhält

$$\frac{\|E^{\text{lin}}_{KL} - E_{KL}\|}{\|E_{KL}\|} = \frac{\|e^{\text{lin}}_{kl} - e_{kl}\|}{\|e_{kl}\|} = \sqrt{\frac{\gamma^2}{2+\gamma^2}} . \qquad (3.30)$$

Somit ergibt sich eine Abweichung zwischen linearisierten und exakten Verzerrungsmaßen von 7%, insofern die ingenieurtechnisch definierte Schubspannung betragsmäßig auf $|\gamma(t)| \lesssim 0.1$ begrenzt ist

$$\sqrt{\frac{\gamma^2}{2+\gamma^2}} = 0.07 \qquad \rightarrow \qquad -0.1 \le \gamma(t) \le 0.1 . \qquad (3.31)$$

[41] (Eringen 1962; S. 54), (Truesdell und Toupin 1960; S. 293), (Schwarzl 1990; S. 302), (Giesekus 1994; S. 54), (Spencer 2004; S. 75), (Silber und Steinwender 2005; S. 60)

[42] (Eringen 1962; S. 55), (Truesdell und Toupin 1960; S. 295), (Ebert 1980; S. 16), (Schwarzl 1990; S. 302), (Giesekus 1994; S. 55), (Spencer 2004; S. 75), (Silber und Steinwender 2005; S. 61)

[43] (Giesekus 1994; S. 55), (Silber und Steinwender 2005; S. 70), (Ottosen 2005; S. 48)

[44] (Flügge 1958; S. 437), (Reiner 1968; S. 21, 39), (Ogden 1984; S. 101), (Tschoegl 1989; S. 13), (Schwarzl 1990; S. 82, 235), (Giesekus 1994; S. 54), (Macosko 1994; S. 7), (Silber und Steinwender 2005; S. 47, 70)

[45] (Walters 1975; S. 23), (Becker und Bürger 1975; S. 149, 207), (Ferry 1980; S. 27), (Liu 2002; S. 168), (Truesdell und Noll 2004; S. 442)

Im Falle einer einfachen Schubströmung [46] erhält man mit Gleichung (A.45) für den LAGRANGEschen Deformationsgeschwindigkeitstensor

$$\dot{E}_{KL} = D_{KL} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & \frac{\dot{s}(t)}{h} & 0 \\ \frac{\dot{s}(t)}{h} & 2\frac{s(t)}{h}\frac{\dot{s}(t)}{h} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} . \tag{3.32}$$

Zur Bestimmung des EULERschen Deformationsgeschwindigkeitstensors **d** werden zunächst das EULERsche Geschwindigkeitsfeld $\mathbf{v}(\mathbf{x},t)$ nach Gleichung (A.48) und der Geschwindigkeitsgradient **L** nach Gleichung (A.47) berechnet

$$v_k = \begin{pmatrix} \frac{\dot{s}(t)}{h}x_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{3.33}$$

$$L_{kl} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\dot{s}(t)}{h} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{3.34}$$

$$d_{kl} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & \frac{\dot{s}(t)}{h} & 0 \\ \frac{\dot{s}(t)}{h} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} . \tag{3.35}$$

Der EULERsche Deformationsgeschwindigkeitstensor ergibt sich nach Gleichung (A.49) als symmetrischer Anteil des Geschwindigkeitsgradienten. Das Ergebnis kann sowohl mit $\mathbf{L} = \dot{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{F}^{-1}$ entsprechend Gleichung (A.47) als auch über die push forward Operation nach Gleichung (A.52) überprüft werden. Die Berechnung des EULERschen Deformationsgeschwindigkeitstensors anhand von Gleichung (A.50) verdeutlicht außerdem, dass sich die Verzerrungsrate in $\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_2$ Richtung exakt zu Null ergibt

$$d_{kl} = \mathring{e}_{kl} + v_{m,k}e_{m,l} + e_{km}v_{m,l} = \dot{e}_{kl} + \underbrace{e_{kl,m}}_{=0} v_m + v_{m,k}e_{m,l} + e_{km}v_{m,l} = \dot{e}_{kl} + v_{m,k}e_{m,l} + e_{km}v_{m,l} \tag{3.36}$$

$$d_{kl} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & \frac{\dot{s}(t)}{h} & 0 \\ \frac{\dot{s}(t)}{h} & -2\frac{s(t)}{h}\frac{\dot{s}(t)}{h} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\frac{\dot{s}(t)}{h}\frac{s(t)}{h} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\frac{s(t)}{h}\frac{\dot{s}(t)}{h} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} . \tag{3.37}$$

Die quadratischen Terme heben sich identisch auf. Somit stimmen der exakte und linearisierte EULERsche Deformationsgeschwindigkeitstensor überein

$$d_{kl} = d_{kl}^{\text{lin}} = \dot{e}_{kl}^{\text{lin}} . \tag{3.38}$$

Daher treten für rein viskose Materialien bei einfachem Schub keine Normaleffekte auf. Die Relation [47]

$$d_{12} = d_{21} = \dot{e}_{12} = \dot{e}_{21} = \dot{\gamma}(t) = \frac{d\gamma(t)}{dt} = \frac{\dot{s}(t)}{h} \tag{3.39}$$

ist demnach für rein viskoses Verhalten auch bei großen Verzerrungen exakt. Der linearisierte LAGRANGEsche Deformationsgeschwindigkeitstensor ergibt sich mit Gleichung (A.81) zu

$$D_{KL}^{\text{lin}} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & \frac{\dot{s}(t)}{h} & 0 \\ \frac{\dot{s}(t)}{h} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} . \tag{3.40}$$

Die Abweichung zwischen dem linearisierten und exakten LAGRANGEschen Deformationsgeschwindigkeitstensor beträgt

$$\frac{\|D_{KL} - D_{KL}^{\text{lin}}\|}{\|D_{KL}\|} = \sqrt{\frac{2\gamma^2}{1+2\gamma^2}} . \tag{3.41}$$

Darüberhinaus ist auffällig, dass die Abweichung unabhängig von der Rate der ingenieurtechnisch in $\mathbf{e}_1 \otimes \mathbf{e}_2$ oder $\mathbf{e}_2 \otimes \mathbf{e}_1$ Richtung definierten Schubverzerrung ist. Wenn die Beschränkung $|\gamma(t)| \leq 0.1$ analog zu

[46] (Walters 1975; S. 22), (Becker und Bürger 1975; S. 149, 202), (Ebert 1980; S. 14), (Ferry 1980; S. 27), (Ogden 1984; S. 125), (Bird 1987; S. 100), (Dealy und Wissbrun 1990; S. 36), (Giesekus 1994; S. 86, 163), (Macosko 1994; S. 71), (Spurk 1996; S. 23 ff.), (Betten 2001; S. 242), (Morrison 2001; S. 106), (Tanner 2002; S. 45 ff., 55), (Truesdell und Noll 2004; S. 442), (Owens und Phillips 2005; S. 38), (Bertram 2008; S. 113)

[47] (Tschoegl 1989; S. 13), (Dealy und Wissbrun 1990; S. 34)

Gleichung (3.31) bestehen soll, ergibt sich eine Abweichung zwischen dem linearisierten und exakten LAGRANGEschen Deformationsgeschwindigkeitstensor von vierzehn Prozent

$$\sqrt{\frac{2\gamma^2}{1+2\gamma^2}} = 0.14 \qquad \rightarrow \qquad -0.1 \leq \gamma(t) \leq 0.1 \; . \tag{3.42}$$

3.3 Gleichgewichtsrelation

Nach Haupt (2002; S. 260) wird ein *Gleichgewichtszustand* unter der Annahme eingeführt, dass ein „dynamischer Prozess immer zum Stehen kommt, wenn externe Bedingungen konstant gehalten werden“ [48, 49]. Als externe Bedingungen können in diesem Sinn Kräfte, Momente, Verschiebungen oder Verdrehungen aber nicht deren Raten verstanden werden. Einem Gleichgewichtszustand kann eine *Gleichgewichtsspannung* [50] τ^{eq} und eine *Gleichgewichtsverzerrung* γ^{eq} zugeordnet werden. Die τ^{eq}-γ^{eq} Beziehung wird daher auch als *Gleichgewichtsrelation* bezeichnet. Die Differenz zwischen der Gesamtspannung

$$\tau = \tau^{\mathrm{eq}} + \tau^{\mathrm{ov}} \tag{3.43}$$

und der Gleichgewichtsspannung wird als *Überspannung* τ^{ov} [51] definiert. Im Zustand des Gleichgewichts verschwindet die Überspannung definitionsgemäß (Haupt 2002; S. 420). Die additive Aufteilung nach Gleichung (3.43) ist hinsichtlich der Materialmodellierung sehr hilfreich, da somit ratenabhängige und ratenunabhängige Phänomene getrennt voneinander modelliert werden können (Haupt 2002; S. 499). Ratenunabhängige Phänomene werden durch die Gleichgewichtsrelation erfasst, ratenabhängige mittels der Überspannung.

Es gibt zwei Möglichkeiten, die Gleichgewichtsrelation $(\gamma^{\mathrm{eq}}, \tau^{\mathrm{eq}})$ zu bestimmen. Dies kann entweder verzerrungs- oder spannungsgesteuert erfolgen. Im Fall der verzerrungsgesteuerten Prozessführung werden mehrstufige Relexationsversuche $\gamma^k = \text{konst}$ durchgeführt. Mehrstufige Kriechversuche $\tau^k = \text{konst}$ eignen sich für die spannungsgesteuerte Prozessführung. Der Zählindex $k = 1 \ldots n$ nummeriert die Beträge aller von Null verschiedenen Laststufen. Eine für beide Prozessführungen verallgemeinerte Darstellung ist in Abbildung 3.3 skizziert. Die Laststufen sind sowohl in positiver als auch negativer Richtung aufgetragen. Somit erhält man $2n+1$ Lasthorizonte, die der Materialprobe in aufsteigender und abfallender Reihenfolge nacheinander aufgeprägt werden. Die gesamte pro Belastungsniveau aufgebrachte Zeit $\Delta T = \Delta t_{\mathrm{L}} + \Delta t$ setzt sich aus der Zeit Δt_{L} zum Aufbringen eines Lasthorizontes und der Haltezeit Δt zusammen. Hierfür wird unterstellt, dass die Haltezeit „ausreichend lang“ (Haupt 2002; S. 200) gewählt ist, um dem Material die notwendige Zeit einzuräumen, in den Gleichgewichtszustand überzugehen. Unter dieser Arbeitshypothese erhält man per Definition zum i-ten Lasthorizont den i-ten diskreten Punkt der Gleichgewichtsrelation $(\gamma^{\mathrm{eq}.i}, \tau^{\mathrm{eq}.i})$. Je nachdem wie oft die $2n+1$ Belastungsniveaus in aufsteigender und abfallender Reihenfolge aufgeprägt werden, ergeben sich $i = 1 \ldots m$ diskrete Gleichgewichtspunkte mit $m > n$.

Angenommen die Gleichgewichtsrelation $(\gamma^{\mathrm{eq}.i}, \tau^{\mathrm{eq}.i})$ wird mittels *Relaxationsabbruchpunkten* [52] bestimmt, so ist der Platzhalter in Abbildung 3.3 durch $(\;) = \gamma$ zu ersetzen. Der i-te Relaxationsabbruchpunkt wird durch das zugeordnete konstante Verzerrungsniveau $\gamma^i = \text{konst}$ identifiziert. Die am Ende der Relaxation eines Lasthorizonts, das heißt nach der Zeitspanne $i\Delta T$, gemessene Spannung wird als Gleichgewichtsspannung

$$\tau^{\mathrm{eq}.i} = \lim_{t \to i\Delta T} \tau(t)\big|_{\gamma^i = \mathrm{konst}} \qquad \text{mit } \; i = 1 \ldots m \tag{3.44}$$

definiert. Außerdem wird das Relaxationsniveau der Gleichgewichtsverzerrung gleichgesetzt und man erhält per Definition einen Punkt der Gleichgewichtsrelation $\left(\gamma^{\mathrm{eq}.i} \equiv \gamma^i, \tau^{\mathrm{eq}.i}\right)$.

[48] englisches Originalzitat: „Among these is the basic assumption that a dynamic process always comes to a standstill in a passive system if the external conditions are kept constant. That is to say the process tends towards a state of equilibrium. If the relative distortion of the end cross-sections of the specimen is regarded as an external condition, then one can appreciate the hypothesis that an infinitely prolonged relaxation process has to end in a time-independent equilibrium state of stress and deformation.“ (Haupt 2002; S. 260)

[49] (Simo und Hughes 2000; S. 345), (Lubliner 2008; S. 65)

[50] (Haupt 1993; S. 146 ff.), (Lion 1994; Abb. 3.1.1 - 3.1.4, 3.2.1.1), (Lion 1996; S. 156), (Haupt 2002; S. 193, 260, Abb. 6.15)

[51] (Lion 1996; S. 153, 156), (Lion 1997; S. 1, 4), (Haupt 2002; S. 420, 500)

[52] (Haupt 1993; S. 132), (Lion 1996; S. 153), (Haupt 2002; S. 200, 260), (Kästner et al. 2012; S. 41)

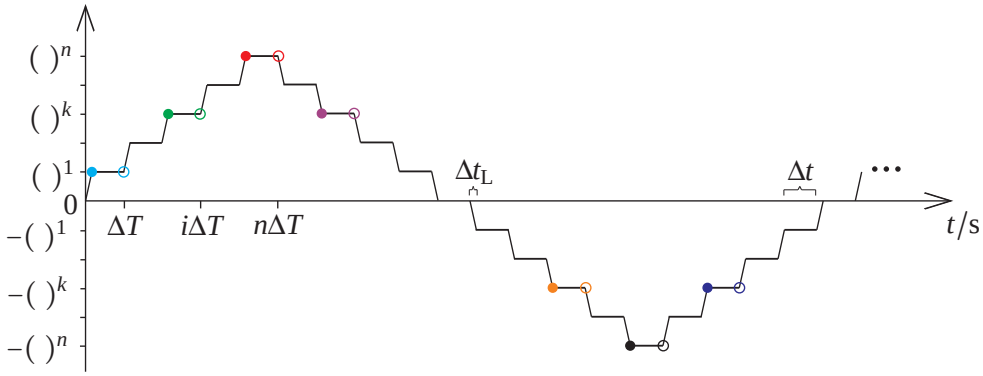


Abbildung 3.3: Mehrstufiger Relaxations- [( ) = γ] beziehungsweise Kriechversuch [( ) = τ] zur Bestimmung der Gleichgewichtsrelation mittels $k = 1 \dots n$ von Null verschiedenen Laststufen, d.h. $2n + 1$ Belastungsniveaus, die einer Materialprobe in aufsteigender und abfallender Reihenfolge nacheinander aufgeprägt werden. Ebenfalls stellt ( ) = 0 ein Belastungsniveau dar, sodass hier in Summe $i = 1 \dots m = 1 \dots 4n$ Abbruchpunkte bzw. Gleichgewichtspunkte angesprochen werden.

Der Platzhalter in Abbildung 3.3 ist durch ( ) = τ zu ersetzen, wenn die Gleichgewichtsrelation durch *Kriechabbruchpunkte* bestimmt wird. Der *i*-te Kriechabbruchpunkt ergibt sich zu dem konstant gehaltenen Spannungsniveau τ^i = konst nach der Zeit $i\Delta T$ (Haupt 1993; S. 132 ff.). Die nach der Zeit $i\Delta T$ identifizierte Verzerrung wird per Definition der Gleichgewichtsverzerrung

$$\gamma^{\mathrm{eq}.i} = \lim_{t \to i\Delta T} \gamma(t)|_{\tau^i = \mathrm{konst}} \qquad \text{mit } i = 1 \dots m \tag{3.45}$$

zugeordnet. Rein formal ist das Spannungsniveau identisch der Gleichgewichtsspannung und man erhält einen Gleichgewichtspunkt $\left(\gamma^{\mathrm{eq}.i}, \tau^{\mathrm{eq}.i} \equiv \tau^i\right)$.
In Abschnitt 4.3 wird die Bestimmung der Gleichgewichtsrelation für je ein Materialmodell der drei Stoffklassen, Festkörper, Flüssigkeit und Material mit fest-flüssig Übergang erklärt. Es wird gezeigt, dass der Gleichgewichtszustand nicht immer sowohl für Relaxation als auch Kriechen definiert ist. Es ist zum einen möglich, dass die Gleichgewichtsrelation nicht durch Kriechen gefunden werden kann [53]. Dies wird in Abschnitt 4.3.1 anhand einer viskoelastischen Flüssigkeit erklärt. Dies gilt nach Kästner (2010; Abb. 2.1(b)) gleichermaßen für entfestigendes Materialverhalten. Zum anderen ist es auch möglich, dass Relaxation keine eindeutige Gleichgewichtsspannung liefert. Dieser Fall tritt für starre Flüssigkeiten mit Fließspannung auf, wie beispielsweise dem Reibelement oder dem BINGHAM Modell [54]. Er ist in Abschnitt 4.3.3 erläutert. (*Folgerung 7*) Da starres Vorfließverhalten jedoch eine stark idealisierte Modellannahme darstellt, ist anzunehmen, dass dieser Fall mehr akademischen Charakter trägt, jedoch praktisch weniger relevant sein wird. Denn alternativ dazu könnte der starre Vorfließbereich mit „sehr großer“ Steifigkeit modelliert werden, sodass die Gleichgewichtsrelation theoretisch mittels Relaxationsexperimenten eindeutig identifiziert werden kann. Unter praktischen Gesichtspunkten ist es ohnehin schwierig nachzuweisen, dass sich eine Materialprobe unter Beanspruchung kleiner der Fließspannung nicht deformiert hat.

3.4 Praktische Bestimmung der Gleichgewichtsrelation und Konsequenzen für die Modellierung

Die Klassifikation von Materialverhalten beinhaltet die Einteilung des Verhaltens in eine Stoffklasse und eine Materialklasse (*Folgerung 8*). Die Stoffklassifikation erfolgt in Abschnitt 4 unter Verwendung der Gleichgewichtsrelation. Ebenso ist die Gleichgewichtsrelation eine wesentliche Größe zur Materialklassifikation nach Haupt (2002; S. 269), die in Abschnitt 3.6 vorgestellt wird. Zum Klassifizieren eines Materialverhaltens ist es daher erforderlich die Gleichgewichtsrelation zu messen. Aufgrund der Beschränktheit des experimentellen Fensters, damit ist zum Beispiel gemeint, dass die zur Verfügung stehende Messzeit begrenzt ist, hängt die Güte der Messergebnisse von der experimentellen Prozessführung ab. Daher kann

[53] (Haupt 2002; S. 260), (Kästner 2010; S. 11)
[54] (Giesekus 1994; S. 213), (Boisly et al. 2014a; S. 5)

es in der Praxis sehr gut möglich sein, dass das experimentelle Fenster entgegen der von Haupt (2002; S. 200) unterstellten Arbeitshypothese nicht „ausreichend lang“ ist. (*Folgerung 9*)
Um die praktischen Konsequenzen dieser Tatsache hinsichtlich der Materialmodellierung zu erläutern, werden im Folgenden zwei Modellbeispiele diskutiert, welche in symbolischer Art und Weise reales Materialverhalten repräsentieren. Somit wird für die folgende Diskussion gewährleistet, dass das „wahre“ Verhalten einer Materialprobe bekannt ist. Ziel der folgenden Untersuchung ist es, die Gleichgewichtsrelation unter verschiedenen experimentellen Vorgaben zu bestimmen.

3.4.1 Viskoelastizität mit von Null verschiedener Gleichgewichtsspannung

Das erste Modellbeispiel besteht aus der Parallelschaltung eines HOOKEschen Elements und $i = 1 \ldots 8$ MAXWELL Elementen. Es ist in Abbildung 3.4 dargestellt. Für das Modellexperiment werden die Modell-

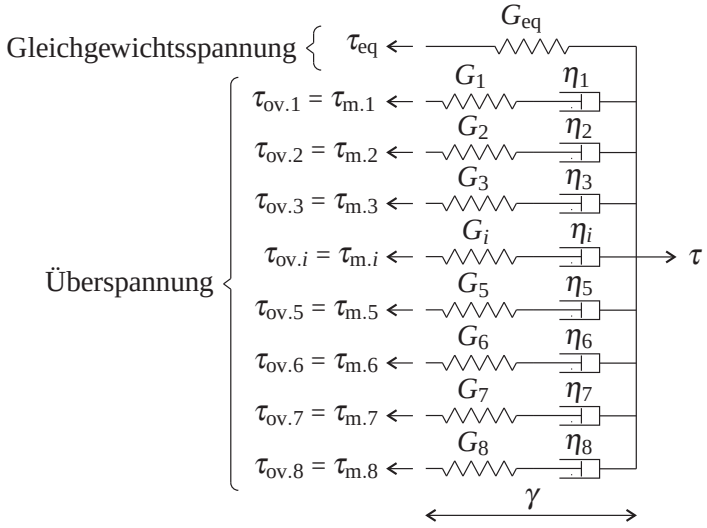


Abbildung 3.4: Erweitertes MAXWELL Modell zur Bestimmung der Abhängigkeit der Gleichgewichtsrelation von experimentellen Bedingungen resultierend aus der Beschränktheit des experimentellen Fensters

parameter geeignet definiert. Das diskrete Relaxationsspektrum besitzt acht Relaxationszeiten

$$\alpha_i = \frac{\eta_i}{G_i} = \left[10^{-2};\ 10^{-1};\ 1;\ 10^{1};\ 10^{2};\ 10^{3};\ 10^{4};\ 10^{5}\right] \text{ s} . \tag{3.46}$$

Die Elastizitätsmoduli der HOOKEschen Federn der MAXWELL Elemente sollen

$$G_i = [20;\ 40;\ 65;\ 80;\ 105;\ 120;\ 110;\ 95] \text{ Pa} \tag{3.47}$$

betragen. Der Elastizitätsmodul der HOOKEschen Feder der Gleichgewichtsrelation wird

$$G_{eq} = 100\,\text{Pa} \tag{3.48}$$

festgelegt. Um die Modellantwort zu dem mehrstufigen Relaxationsprozess aus Abbildung 3.3 zu bestimmen, werden die Differentialgleichungen der $i = 1 \ldots 8$ MAXWELL Elemente [55]

$$\tau_{ov.i} = \dot{\gamma}\,\eta_i - \dot{\tau}_{ov.i}\,\frac{\eta_i}{G_i} \tag{3.49}$$

mittels des EULER-Rückwärts Verfahrens [56] diskretisiert. Das EULER-Rückwärts Verfahren wertet eine Differentialgleichung $\dot{y} = f(t, x, \dot{x})$ zum Zeitpunkt t^{k+1} aus und man erhält zunächst rein formal $\dot{y}\big|^{k+1} =$

[55] (Giesekus 1994; S. 243), (Macosko 1994; S. 116), (Menges et al. 2002; S. 158), (Haupt 2002; S. 203, 322), (Kardelky 2004; S. 35, 192), (Gross et al. 2004; S. 308), (Silber und Steinwender 2005; S. 156)

[56] (Zienkiewicz 1984; S. 518), (Oelschlägel und Matthäus 1988; S. 55 ff.), (Oertel Jr. und Laurien 1995; S. 102), (Schwetlick und Roos 1999; S. 150), (Schäfer 1999; S. 139), (Schanz 2000; S. 61), (Simo und Hughes 2000; S. 33), (Betten 2004; S. 274), (Ostermann 2005; S. 3.10), (Dahmen und Reusken 2008; S. 439, 445)

$f(t,x,\dot{x})|^{k+1}$. Mit $(\,)|^{k+1} = (\,)^{k+1}$ geht der Ausdruck über in $\dot{y}^{k+1} = f(t^{k+1}, x^{k+1}, \dot{x}^{k+1})$. Eine erste Ableitung wird mittels des *Rückwärtsdifferenzenquotienten* [57]

$$\dot{y}^{k+1} = \frac{y^{k+1} - y^k}{t^{k+1} - t^k} \tag{3.50}$$

approximiert. Somit ergibt sich die EULER-Rückwärts-Diskretisierung von Gleichung (3.49) zu

$$\tau_{\mathrm{m}.i}^{k+1} = \dot{\gamma}^{k+1} \frac{\eta_i G_i \left(t^{k+1} - t^k\right)}{\eta_i + G_i \left(t^{k+1} - t^k\right)} + \tau_{\mathrm{m}.i}^{k} \frac{\eta_i}{\eta_i + G_i \left(t^{k+1} - t^k\right)} = \tau_{\mathrm{ov}.i}^{k+1} \ . \tag{3.51}$$

Die Gesamtspannung $\tau^{k+1} = \tau_{\mathrm{eq}}^{k+1} + \tau_{\mathrm{ov}}^{k+1}$ zur diskreten Zeit t^{k+1} beträgt damit

$$\tau^{k+1}(\gamma^{k+1},\ \dot{\gamma}^{k+1}) = \tau_{\mathrm{eq}}^{k+1} + \sum_{i=1}^{8} \tau_{\mathrm{ov}.i}^{k+1} = G_{\mathrm{eq}} \gamma^{k+1} + \sum_{i=1}^{8} \left[\dot{\gamma}^{k+1} \frac{\eta_i G_i \left(t^{k+1} - t^k\right)}{\eta_i + G_i \left(t^{k+1} - t^k\right)} + \tau_{\mathrm{ov}.i}^{k} \frac{\eta_i}{\eta_i + G_i \left(t^{k+1} - t^k\right)} \right] . \tag{3.52}$$

Für den mehrstufigen Relaxationsprozess aus Abbildung 3.3 beträgt die

$$\text{Dehnrate der Rampen}: \qquad \dot{\gamma} = \text{konst} = \pm 0.01 \, \frac{1}{\mathrm{s}} \ . \tag{3.53}$$

Für jede der

$$\text{Relaxations} - \text{Haltezeiten}: \qquad \Delta t = \left[10^3;\ 10^4;\ 10^5;\ 10^6\right] \ \mathrm{s} \tag{3.54}$$

wird die entsprechende Modellantwort bestimmt. Die Resultate sind in Abbildung 3.5 dargestellt. Es ist zu erkennen, dass die Relaxationsabbruchpunkte $\lim\limits_{t \to i\Delta T} \tau(t)|_{\gamma^i = \text{konst}}$, welche durch die Kreuze x hervorgehoben sind, von der Haltezeit Δt abhängen. Entsprechend Gleichung (3.44) ergibt sich folgerichtig eine Abhängigkeit der identifizierten Gleichgewichtsrelation von der Haltezeit Δt. Daher stellen die identifizierten Gleichgewichtsrelationen in den Abbildungen 3.5(a), 3.5(b) und 3.5(c) nicht die wahre Gleichgewichtsrelation des Modellbeispiels von Abbildung 3.4 dar. Stattdessen sind es *scheinbare Gleichgewichtsrelationen*, in diesem Fall *scheinbare Gleichgewichtshysteresen*. Erst wenn die Relaxations-Haltezeit „ausreichend lang" ist, beispielsweise wenn ungefähr $\Delta t = 10 \cdot \mathrm{MAX}(\alpha_i)$ erfüllt ist, wird die in Abbildung 3.5(d) dargestellte „wahre", linear elastische Gleichgewichtsrelation des unterstellten Materialmodells aus Abbildung 3.4 gemessen.
Genau um diesen Effekt auszuschließen, betont Haupt (2002; S. 200) die Notwendigkeit einer „ausreichend langen" Haltezeit. Den Experimentator stellt dies jedoch vor nicht triviale Probleme. Für ihn ergeben sich die Fragen:

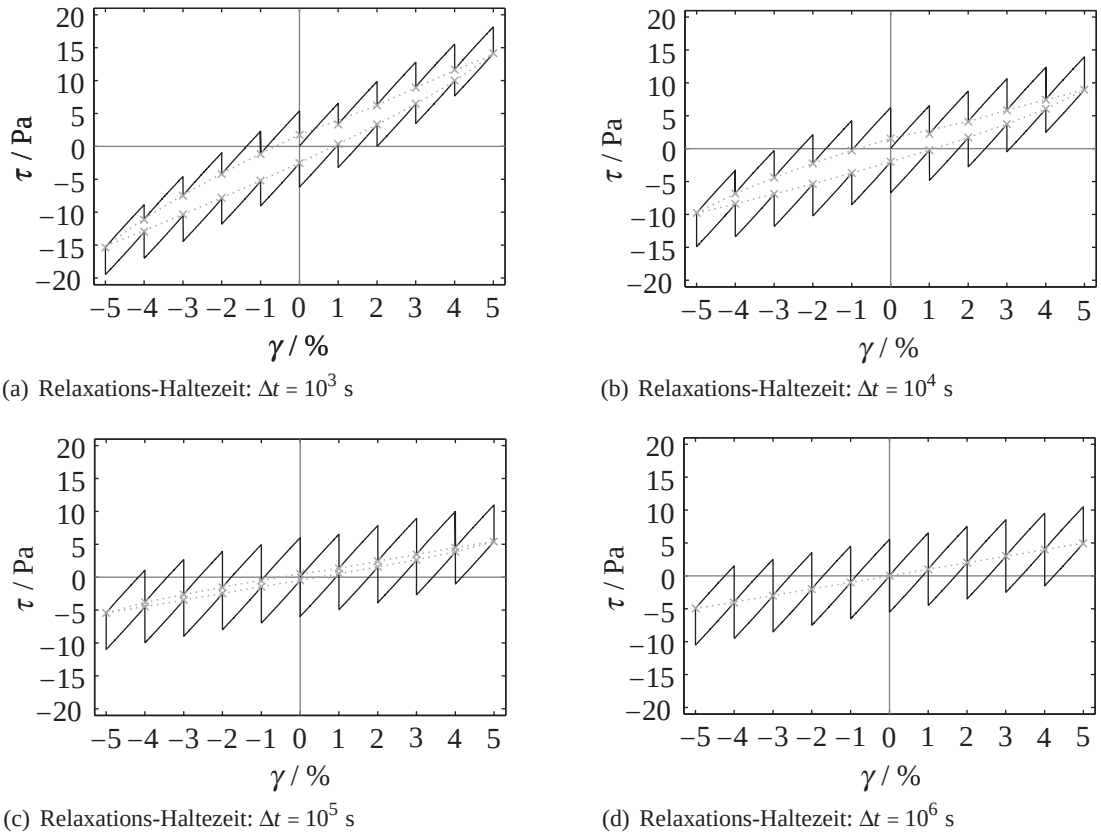
- Welche Haltezeit ist im konkreten Fall als „ausreichend lang" zu betrachten?
- Ist es möglich die erforderliche Anzahl von Relaxationsniveaus mit „ausreichend langer" Haltezeit in der zur Verfügung stehenden Zeit praktisch umzusetzen?

Desweiteren sieht sich ein Experimentator mit der Problemstellung konfrontiert, ob die Relaxation vorangeschritten wäre, wenn man die Haltezeiten größer gewählt hätte. Dementsprechend ergeben sich für das Ergebnis aus Abbildung 3.5(a), in Abhängigkeit des experimentellen Fensters, mindestens vier Interpretationsmöglichkeiten.

1. Ein denkbares Szenario ist, dass die Haltezeit Δt „ausreichend lang" gewählt wurde. Somit besitzt die Gleichgewichtsrelation nach Gleichung (3.44) eine Gleichgewichtshysterese. Das Materialverhalten ist daher viskoplastisch.

2. Es gibt aber auch die Möglichkeit, dass die Haltezeit Δt nicht „ausreichend lang" gewählt wurde. Würde man stattdessen eine Haltezeit $\Delta \bar{t} > \Delta t$ wählen, die tatsächlich „ausreichend lang" ist, sind mehrere Szenarien denkbar:

[57] (Schäfer 1999; S. 139), (Plato 2006; S. 229), (Dahmen und Reusken 2008; S. 445)



(a) Relaxations-Haltezeit: $\Delta t = 10^3$ s

(b) Relaxations-Haltezeit: $\Delta t = 10^4$ s

(c) Relaxations-Haltezeit: $\Delta t = 10^5$ s

(d) Relaxations-Haltezeit: $\Delta t = 10^6$ s

Abbildung 3.5: Abhängigkeit der Relaxationsabbruchpunkte von der Relaxations-Haltezeit Δt. Die Dehnraten der Rampen zum Anfahren der einzelnen Relaxationsniveaus sind konstant $\dot{\gamma} = \pm 0.01 \frac{1}{\mathrm{s}}$. Die Modellvorhersage wurde für das erweiterte MAXWELL Modell aus Abbildung 3.4 unter Verwendung der Materialparameter von Gleichungen (3.46), (3.47) und (3.48) bestimmt.

2a. Beispielsweise könnte die Gleichgewichtshysterese von Abbildung 3.5(a) nach wie vor bestehen bleiben, sich jedoch infolge $\Delta\bar{t} > \Delta t$ verkleinern. Dies hätte keine Auswirkung auf die Interpretation des zugrunde liegenden Materialverhaltens. Es würde ebenfalls als viskoplastisch interpretiert werden.

2b. Alternativ gäbe es die Möglichkeit einer vollständig verschwundenen Gleichgewichtshysterese. Die Gleichgewichtsrelation wäre eine Gleichgewichtskurve, wie in Abbildung 3.5(d) dargestellt ist. Infolgedessen würde sich ein viskoelastisches Materialverhalten mit von Null verschiedener Gleichgewichtsrelation ergeben.

2c. Ebenfalls ist denkbar, dass die Spannungen gegen eine scheinbare Gleichgewichtskurve relaxieren. Bei „ausreichend langer“ Relaxations-Haltezeit würde jedoch jede Spannung gegen Null relaxieren. Das Material ist viskoelastisch mit nicht existierender Gleichgewichtsrelation, das heißt $\tau_{\mathrm{eq}} = 0$.

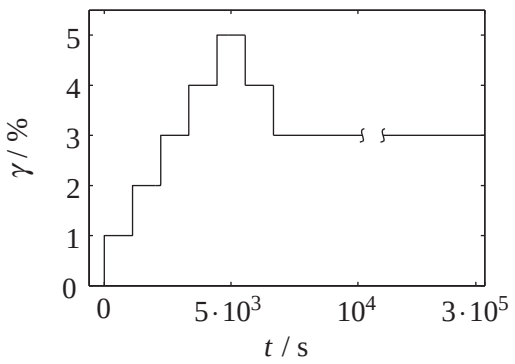
Diese Übersicht der infrage kommenden Interpretationsmöglichkeiten zeigt anschaulich, dass die messtechnischen Ergebnisse zur Bestimmung der Gleichgewichtsrelation nur im Rahmen des vorgegebenen experimentellen Fensters zu bewerten sind und den Gültigkeitsbereich der daraus abgeleiteten Materialmodelle einschränkt. *(Folgerung 9)*

3.4.2 Viskoelastizität mit Gleichgewichtsspannung von Null

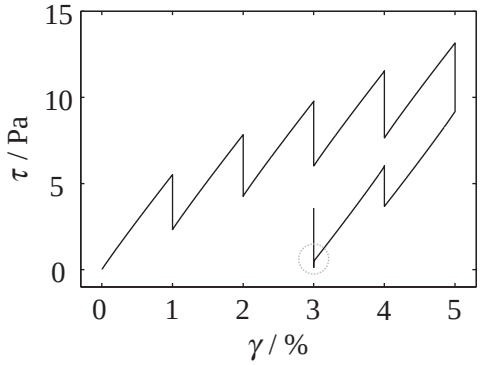
Um Punkt 2c der soeben aufgeführten Interpretationsmöglichkeiten näher zu erklären, wird im Folgenden ein zweites Modellbeispiel untersucht. Dieses besteht gänzlich aus dem Überspannungsmodell von Abbildung 3.4 entsprechend den Materialparametern aus Gleichungen (3.46) und (3.47). Das Modellbeispiel besitzt keine Gleichgewichtsrelation, das heißt die Gleichgewichtsspannung ist infolge

$$G_{\mathrm{eq}} = 0 \tag{3.55}$$

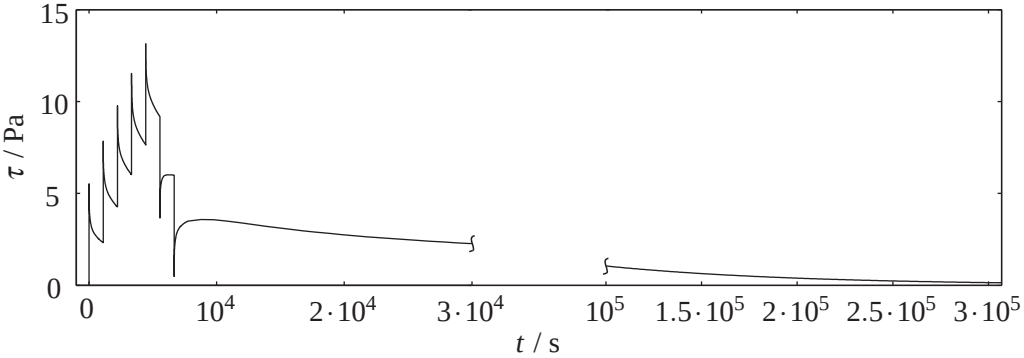
Null. Die Antwort des Überspannungsmodells wird ebenfalls für den mehrstufigen Relaxationsversuch von Abbildung 3.6(a) bestimmt. Jedes Relaxationsniveau wird durch eine Verzerrungsrate $\dot{\gamma} = \pm 0.01\,\frac{1}{\mathrm{s}}$ angefahren. Die Haltezeit der Relaxationsniveaus beträgt $\Delta t = 1110\,\mathrm{s}$. Die Haltezeit ist somit zwei Größenordnungen kleiner als die größte Relaxationszeit der Gleichung (3.46), $\alpha_{i=8} = 10^5\,\mathrm{s}$. Zur Verdeutlichung von Punkt 2c der aufgeführten Interpretationsmöglichkeiten, beträgt die Haltezeit des letzten Relaxationsniveaus das Dreifache der größten Relaxationszeit, $3 \cdot 10^5\,\mathrm{s}$. Die Spannung in Abhängigkeit von der Zeit ist in Abbildung 3.6(c) dargestellt. In Abbildung 3.6(b) ist die Spannung über der Verzerrung aufgetragen, welche die Existenz einer Gleichgewichtshysterese suggeriert. Weil das Gesamtmodell ausschließlich Überspannungen beinhaltet, muss es sich um eine scheinbare Gleichgewichtshysterese handeln. Die scheinbare Gleichgewichtshysterese entsteht dadurch, dass die Haltezeiten von $\Delta t = 1110\,\mathrm{s}$ nicht „ausreichend lang“ sind. Sie sind deswegen nicht „ausreichend lang“, weil sie um zwei Größenordnungen kleiner sind als die größte Relaxationszeit des Modellbeispiels, $\alpha_{i=8} = 10^5\,\mathrm{s}$. Die Relaxationsvorgänge im Material können daher nicht vollständig beendet werden. Um zu zeigen, dass es sich lediglich um eine scheinbare Gleichgewichtshysterese handelt, ist die letzte Relaxationszeit „ausreichend lang“ gewählt. Sie beträgt mit $3 \cdot 10^5\,\mathrm{s}$ das Dreifache der größten Relaxationszeit. Die Konsequenz dessen kann man in Abbildung 3.6(c) beobachten: Zu Beginn des letzten Relaxationsnivaus scheint es der Fall zu sein, dass die Spannung gegen eine von Null verschiedene Gleichgewichtsrelation strebt, so wie es für das viskoelastische Modellbeispiel mit von Null verschiedener Gleichgewichtsrelation aus Abschnitt 3.4.1 beobachtet wird. Nach dem Anstieg



(a) Mehrstufiger Relaxationsversuch mit zeitlich verlängerter Haltezeit für das letzte Relaxationsniveau



(b) Spannungsantwort in Abhängigkeit von der Schubverzerrung



(c) Spannungsantwort in Abhängigkeit von der Zeit zur Visualisierung von $\tau_{\mathrm{eq}} = 0$ für das letzte Relaxationsniveau

Abbildung 3.6: Modellvorhersage eines erweiterten MAXWELL Modells mit nicht existierender Gleichgewichtsrelation (Abbildung 3.4 mit $G_{\mathrm{eq}} = 0$) für den mehrstufigen Relaxationsversuch aus Abbildung 3.6(a). Materialparameter entsprechend Gleichungen (3.46) und (3.47). Die Dehnraten der Rampen zum Anfahren der einzelnen Relaxationsniveaus sind konstant $\dot{\gamma} = \pm 0.01\,\frac{1}{\mathrm{s}}$. Alle Relaxations-Haltezeiten, bis auf die letzte, betragen $\Delta t = 1110\,\mathrm{s}$. Die letzte Relaxation-Haltezeit ist das Dreifache der größten Relaxationszeit und beträgt $3 \cdot 10^5\,\mathrm{s}$.

erreicht die Spannung jedoch ein lokales Maximum, im Anschluss dessen die Spannung in guter Näherung bis auf Null sinkt. Dieses Verhalten erkennt man auch in Abbildung 3.6(b) innerhalb des grau eingekreis-

ten Bereichs. Die Erklärung für diesen Effekt liefert Abbildung 3.7. Dazu sei der Blick zunächst auf die Spannungen derjenigen MAXWELL Elemente gerichtet, deren Relaxationszeiten kleiner als die Haltezeit sind, $\alpha_i \lesssim (\Delta t = 1110\,\mathrm{s})$. Man erkennt, dass diese Spannungen zu Beginn der letzten Relaxation negativ sind, obwohl eine positive Schubverzerrung und eine positive Gesamtspannung vorliegen. Die Spannungen der MAXWELL Elemente, deren Relaxationszeiten größer als die Haltezeit sind, $\alpha_i > (\Delta t = 1110\,\mathrm{s})$, besitzen hingegen positive Werte. Da die MAXWELL Elemente mit $\alpha_i \lesssim (\Delta t = 1110\,\mathrm{s})$ schneller auf rund Null relaxieren als jene mit $\alpha_i > (\Delta t = 1110\,\mathrm{s})$, steigt die Gesamtspannung $\sigma = \sum_{i=1}^{n=8} \tau_{\mathrm{m}.i}$ zunächst an, bevor sie nach dem lokalen Maximum wieder sinkt.
Weil es generell schwer einzuschätzen ist, ob eine Relaxation abgeschlossen ist oder nicht, ist es legitim ein erweitertes MAXWELL Modell mit einer Gleichgewichtsspannung von Null und ausgeprägtem Langzeitrelaxationsverhalten zur Modellierung einer praktisch ermittelten Gleichgewichtshysterese zu benutzen. *(Folgerung 9)* Wählt man die Relaxationszeit des Langzeit-MAXWELL Elements, α_n, größer als die im Relaxationsversuch verwendete Haltezeit Δt, so stellt dieser Modellierungsansatz solange keinen Fehler dar, bis experimentell nachgewiesen wird, dass die Gleichgewichtshysterese auf plastische Eigenschaften (Fließspannung) zurückzuführen ist. Wie in diesem Beispiel gezeigt ist, kann über die Existenz einer Fließspannung, welche das Vorhandensein einer Gleichgewichtshysterese zur Folge hat, nicht widerspruchsfrei geurteilt werden. Es ist nicht möglich zwischen einer wahren oder scheinbaren Gleichgewichtshysterese zu unterscheiden. Ob das Materialverhalten als viskoplastisch [58] oder viskoelastisch interpretiert werden muss, lässt sich nicht entscheiden.
Um mit größerer Sicherheit über die Existenz einer Fließspannung urteilen zu können, ist es ratsam ebenfalls zum Relaxationsversuch qualitativ unterschiedliche Experimente auszuwerten. Dafür kommen beispielsweise spannungsgeregelte Experimente, wie der *mehrstufige Kriechversuch* [59], oder verzerrungsgeregelte sinusförmige Versuche analog zu Abschnitt 3.8 infrage. Hilfreich ist es, das Verhalten einer Materialprobe durch eine Vielzahl qualitativ verschiedener Experimente zu entlocken, um ein Materialmodell mit minimaler Restunsicherheit formulieren zu können. Vom praktischen Standpunkt aus betrachtet ist dies jedoch nicht immer notwendig. Allein zur Bewältigung ingenieurtechnischer Aufgaben ist es wichtig, die Anwendungsgrenzen der unterstellten Materialmodelle zu spezifizieren. Das heißt, dass ein Materialmodell ausschließlich in einem Lastbereich anzuwenden ist, innerhalb dessen das Materialmodell formuliert und verifiziert wurde. Daher ist es neben der eigentlichen Erstellung eines Materialmodells mindestens genauso wichtig das experimentelle Fenster anzugeben, innerhalb dessen die Identifikationsexperimente sowie die Parameteridentifikation durchgeführt wurden. Das bedeutet, dass Ergebnisse hinsichtlich der Materialklassifizierung aus Abschnitt 3.6 und der Stoffklassifizierung aus Abschnitt 4 Gültigkeit besitzen für einen bestimmten *(Folgerung 9)*

- Temperaturbereich,
- Feuchtebereich,
- Lastbereich (geometrisch lineare Theorie oder große Deformation) und das auch nur
- innerhalb einer minimalen $\alpha_{\min}$ und maximalen Relaxationszeit $\alpha_{\max}$ beziehungsweise einer
- minimalen $\omega_{\min} = \frac{1}{\alpha_{\max}}$ und maximalen Kreisfrequenz $\omega_{\max} = \frac{1}{\alpha_{\min}}$.

[58] Die Modellierung der Gleichgewichtshysterese auf Basis viskoplastischer Modelle kann in Lion (1994; S. 118 ff.), Lion (1996), Keck (1998; S. 130 ff.), Haupt (2002; S. 501) und Kästner et al. (2012) nachvollzogen werden.

[59] (Cheng 1986; S. 543), (James et al. 1987; S. 442), (Nguyen und Boger 1992; S. 66), (Husband et al. 1993; S. 224), (Steffe 1996; S. 204), (Zhu et al. 2001; S. 1112), (Coussot et al. 2002b; S. 577), (Uhlherr et al. 2005; S. 105), (Tiu et al. 2006; S. 656), (Maxey et al. 2008; S. 2), (Le Grand und Petekidis 2008; S. 581), (Chhabra und Richardson 2008; S. 93), (Stokes und Frith 2008; S. 1135), Christopoulou et al. (2009; S. 5058 ff.), (Mezger 2010; S. 53, Abb. 3.1), (Paredes et al. 2011; S. 3), (Vicente et al. 2011; S. 3705), (DIN–Taschenbuch 398 2012; S. 444), (Martinie et al. 2013; S. 632), (Koos et al. 2014; S. 951)

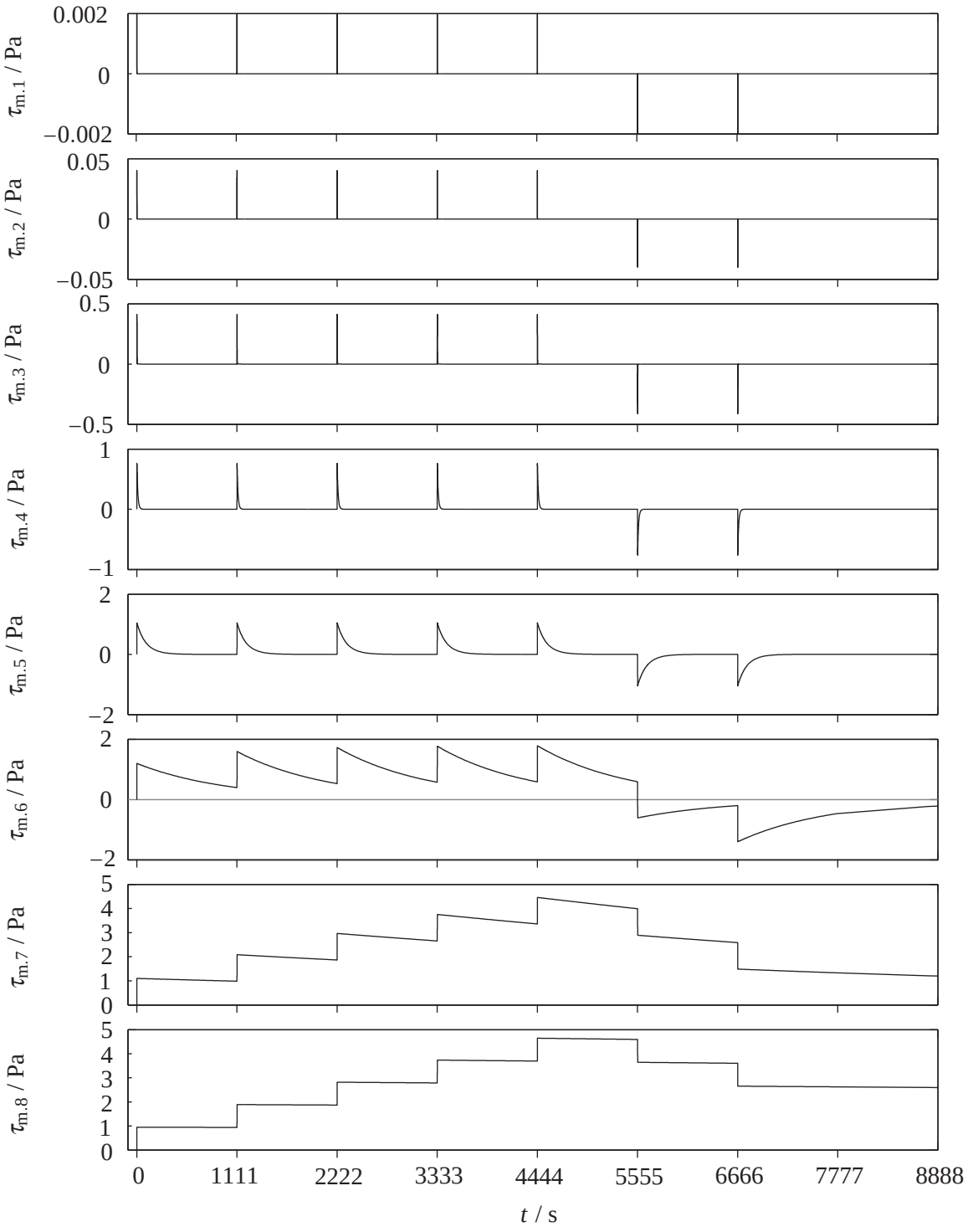


Abbildung 3.7: Modellvorhersage der MAXWELL Elemente eines erweiterten MAXWELL Modells nach Abbildung 3.4 mit nicht existierender Gleichgewichtsrelation, $G_{eq} = 0$, zu dem mehrstufigen Relaxationsversuch von Abbildung 3.6(a). Materialparameter entsprechend Gleichungen (3.46) und (3.47).

3.5 Untersuchung des Materialverhaltens auf Ratenabhängigkeit

Pipkin und Rivlin (1965) publizierten Restriktionen für ratenunabhängige Funktionale, die teilweise auf den Arbeiten von Ilyushin (1954) aufbauen. Ratenunabhängigkeit wurde ebenfalls von Valanis (1971c), Valanis (1972; S. 128 ff.), Valanis und Wu (1975; Gl. (21)), Rettig (1984; S. 519), Valanis (1984; S. 367), Krawietz (1986; S. 38), Maugin (1992; S. 7), Lion (1996; S. 155), Lion (1997; S. 2) und Puzrin (2012; S. 8, 110, 114, 270, 282) untersucht. Haupt (2002; S. 437 ff.) verweist darauf, dass in der Plastizitätstheorie die *Bogenlänge* die Zeit t als unabhängige Variable ersetzt, beziehungsweise dass generell jeder Parameter, der eine monoton steigende Funktion der Zeit ist, die Zeit als unabhängige Variable ersetzen kann. Außerdem prognostiziert HAUPT weitere Möglichkeiten zur Modellierung im Rahmen einer generalisierten Bogenlängenbeschreibung. [60] Die Eigenschaften einer generalisierten Bogenlänge sind bei Haupt (1977; S. 151) und Haupt (2002; Gl. (11.30)-(11.32)) beschrieben.

3.5.1 Bogenlänge u als pseudo Zeitmaßstab

In dieser Arbeit wird die Bogenlänge [61]

$$du = |d\gamma| = \operatorname{sign}(d\gamma)\, d\gamma = \operatorname{sign}(\dot\gamma)\, d\gamma \tag{3.56}$$

$$du = |\dot\gamma| dt \tag{3.57}$$

$$\dot u = |\dot\gamma| \tag{3.58}$$

unter Beachtung von $dt > 0$ verwendet, sodass $d\gamma$ über das Vorzeichen von $\dot\gamma = \frac{d\gamma}{dt}$ entscheidet. Die Bogenlänge korrespondiert mit der *akkumulierten Schubverzerrung* [62]

$$u = f_u(t) = \int_0^{\gamma(t)} \operatorname{sign}(d\bar\gamma)\, d\bar\gamma = \int_0^{\gamma(t)} \operatorname{sign}\left(\dot\gamma|_{t=f_\gamma^{-1}(\gamma=\bar\gamma)}\right) d\bar\gamma \tag{3.59}$$

$$= \int_0^t |\dot\gamma(\bar t)|\, d\bar t = u(t_0) + \int_{t_0}^t |\dot\gamma(\bar t)|\, d\bar t\,, \tag{3.60}$$

wobei die verzerrungsgesteuerte Lastgeschichte $\gamma = f_\gamma(t)$ und die Anfangsbedingung der Bogenlänge $u = f_u(t = 0) = 0$ [63] unterstellt sind. Die Bogenlänge u ist somit eine *kinematische Bogenlänge*. Weil Gleichungen (3.2) und (3.3) nicht von Gleichung (3.60) erfüllt werden, ist $u(t)$ nicht additiv. Die kinematische Bogenlänge ist daher ein nichtlineares Funktional von der Geschichte der Schubverzerrung (Haupt 2002; S. 438). Wird die Bogenlänge als pseudo Zeitmaßstab eingeführt, so kann der zeitliche Verlauf der Schubverzerrung auch durch [64]

$$\gamma(t) = [\gamma(u);\, u(t)] \tag{3.61}$$

beschrieben werden. Die Informationen des Verlaufs der Schubverzerrung ist mit $\gamma(u)$ beschrieben (Haupt 2002; S. 437). Die Beziehung $\gamma(u)$ beinhaltet jedoch nicht wie schnell der Verlauf der Schubverzerrung durchfahren wird. Diese Information ist in $u(t)$ enthalten [65]. Jedes ratenabhängige Funktional hängt folglich sowohl von $\gamma(u)$ als auch $u(t)$ ab. Ein ratenunabhängiges Funktional hängt ausschließlich von $\gamma(u)$ ab. Somit wirkt sich die Rate des Verlaufes der Schubverzerrung nicht auf das Ergebnis der Spannung aus[66].

[60] englisches Originalzitat: „In the theory of plasticity the arclength [...] replaces the time t as independent variable. More generally, every parameter which constitutes a monotonically increasing function of time t can be applied as an independent variable to replace the time. This fact opens up further possibilities for modelling material properties used in the generalised arclength description." (Haupt 2002; S. 437 ff.)

[61] (Ilyushin 1954; Gl. (3.3)), (Valanis 1984; Gl. (6)), (Krawietz 1986; Gl. (2.68)), (Keck 1998; S. 39, 50), (Haupt 2002; S. 446), (Kästner 2010; S. 58), (Kästner et al. 2012; S. 46), (Kammer 2015; Gl. (7.2))

[62] (Pipkin und Rivlin 1965; Gl. (2.6)), (Valanis 1971d; Gl. $(2.7)_4$), (Valanis und Wu 1975; Gl. (6)), (Lion 2000b; Gl. (6.2.3.7)), (Haupt 2002; Gl. (11.1), S. 446), (Kammer 2015; Gl. (7.3))

[63] Um die Lesbarkeit zu erhöhen, wird $u(t)$ anstelle von $f_u(t)$ geschrieben.

[64] (Haupt 2002; S. 436), (Kästner 2010; S. 17)

[65] (Pipkin und Rivlin 1965; S. 314), (Haupt 2002; S. 437)

[66] (Pipkin und Rivlin 1965; S. 313, Gl. (2.9)), (Haupt 2002; S. 398, 436), (Kästner 2010; S. 16)

3.5.2 Arbeitsweise der kinematischen Bogenlänge

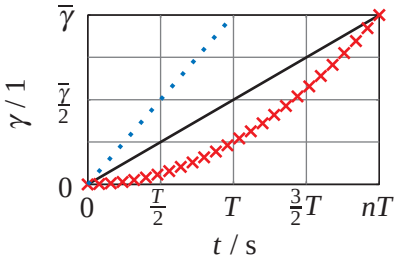
Unter Berücksichtigung der Aufteilung $\gamma(t) = [\gamma(u); u(t)]$ nach Gleichung (3.61) soll nun verdeutlicht werden, dass es die kinematische Bogenlänge ermöglicht, die Ratenabhängigkeit beim Übergang von $\gamma(t)$ zu $\gamma(u)$ auszublenden (Kammer 2015; Absch. 5.1). Dazu wird die Schubverzerrung mittels den drei verschiedenen Realisierungen

$$\gamma = f_1(t) = \dot{\bar{\gamma}} t \qquad 0 \le t \le T\,, \quad \dot{\bar{\gamma}} = \frac{\overline{\gamma}}{T} \tag{3.62}$$

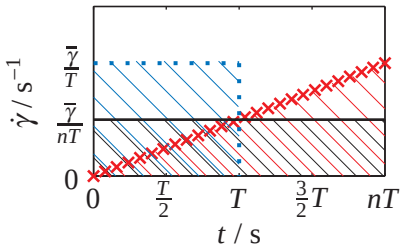
$$\gamma = f_2(t) = \frac{1}{n}\dot{\bar{\gamma}} t \qquad 0 \le t \le nT\,, \quad n = \text{konst} > 0 \tag{3.63}$$

$$\gamma = f_3(t) = \frac{\overline{\gamma}}{(nT)^2} t^2 \qquad 0 \le t \le nT \tag{3.64}$$

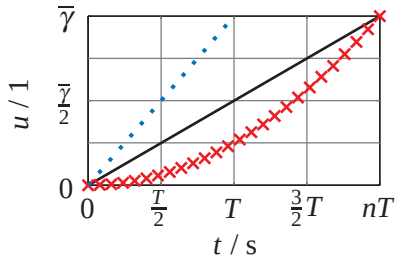
von $\gamma(t=0) = 0$ auf $\gamma = \overline{\gamma}$ erhöht. Die Schubverzerrung in Abhängigkeit von der Zeit ist in Abbildung 3.8(a) dargestellt, die Rate der Schubverzerrung in Abbildung 3.8(b). Die analytische Lösung zu konstanten Raten $f_1(t)$ und $f_2(t)$ wird in Abschnitt 6.3 ermittelt und hier vorab genutzt. Die kinematische Bogenlänge als Funktion der Zeit ist in Abbildung 3.8(c) aufgetragen. In Abbildung 3.8(d) erkennt man, dass $\gamma(u)$ für alle Verläufe der Schubverzerrung identisch ist. Dies ist auch in Abbildung 3.8(b) daran zu erkennen, dass die Gesamtflächen unterhalb der Kurven gleich groß sind. Dass die Bogenlängendefinition nicht sensitiv



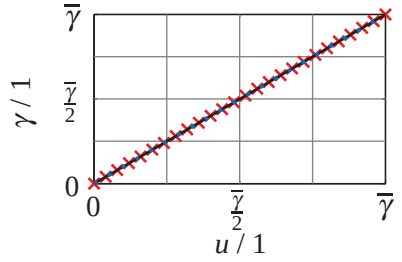
(a) Verlauf der Schubverzerrung $0 \le \gamma \le \overline{\gamma}$ realisiert durch verschiedene Raten



(b) Raten der Verzerrungsverläufe



(c) Kinematische Bogenlänge (akkumulierte Schubverzerrung)



(d) Schubverzerrungen in Abhängigkeit der Bogenlänge

Abbildung 3.8: Visualisierung ratenunabhängiger Eigenschaften der kinematischen Bogenlänge motiviert durch die Zerlegung des Schubverzerrungsverlaufs nach Gleichung (3.61) in $\gamma(t) = [\gamma(u); u(t)]$. Auswertung der Schubverzerrungsverläufe nach Gleichungen (3.62) bis (3.64) mit $\overline{\gamma} = 0.1$, $T = 0.5$ und $n = 2$. Ratenunabhängigkeit liegt vor, da alle $\gamma(u)$-Verläufe, unabhängig davon mit welcher Geschwindigkeit $\dot{u}$ sie durchfahren werden, identisch sind. $f_1(t)$: ·····, $f_2(t)$: ——, $f_3(t)$: xxx

gegenüber der Rate ist, mit der die verzerrungsgesteuerte Belastung realisiert wird, kann anschaulich für zwei Anregungen unterschiedlicher Rate $\gamma_1 = f_1(t_1)$ und $\gamma_2 = f_2(t_2)$ gezeigt werden. Trotz, dass die Verläufe der Schubverzerrung mit unterschiedlichen Raten durchfahren werden, sind deren Bogenlängen

$$u_1 = \int_0^{T_1} |\dot{\gamma}_1|\, dt_1 = \int_0^{T_1} \left| \frac{d f_1(t_1)}{dt_1} \right| dt_1 \tag{3.65}$$

$$u_2 = \int_0^{T_2} |\dot{\gamma}_2|\, dt_2 = \int_0^{T_2} \left| \frac{d f_2(t_2)}{dt_2} \right| dt_2 = \int_0^{g^{-1}(T_2)} \left| \frac{d f_2[g(t_1)]}{dg} \right| \frac{dg(t_1)}{dt_1} dt_1 = \int_0^{T_1} \left| \frac{d f_2[g(t_1)]}{dg} \frac{dg(t_1)}{dt_1} \right| dt_1 = u_1 \tag{3.66}$$

bei $\gamma = \overline{\gamma}$ identisch. Dazu wurden zunächst die Relationen $t_2 = g(t_1)$ und $t_1 = g^{-1}(t_2)$ unter Verwendung der Transformationsbeziehungen $g(\ )$ und $g^{-1}(\ )$, die sich aus $\gamma = f_1(t_1) \overset{!}{=} f_2(t_2)$ ergeben, formuliert. Daraus kann das Differential $dt_2 = \frac{dg(t_1)}{dt_1} dt_1$ sowie $\frac{df_1(t_1)}{dt_1} = \frac{df_2[g(t_1)]}{dg} \frac{dg(t_1)}{dt_1}$ abgeleitet werden. Außerdem gilt $\frac{dg(t_1)}{dt_1} > 0$, da t_1 und t_2 Zeitskalen sind, die über monoton steigende Funktionen miteinander verknüpft sind. Damit ist gezeigt, dass die bis zur Schubverzerrung $\overline{\gamma} = f_1(T_1) = f_2(T_2)$ akkumulierten kinematischen Bogenlängen trotz verschiedener Raten übereinstimmen.

3.5.3 Experimentelle Möglichkeiten zur Feststellung von Ratenabhängigkeit

Ratenabhängige Materialeigenschaften können identifiziert werden, indem Anregungen mit konstanter Rate durchgeführt werden und die Rate variiert wird. Arbeiten in denen ratenabhängiges Materialverhalten für verschiedene konstante Schubverzerrungsraten $\gamma = \dot{\overline{\gamma}} \cdot t$ mit $\dot{\overline{\gamma}} = \text{konst}$ untersucht wird, findet man bei Lion (1994; Abb. 2.3.2), Lion (2000b; Abb. 5.2.2.1, 5.2.4.2), Sedlan (2000; Abb. 3.15, 3.20), Haupt (2002; Abb. 6.5), Kästner (2010; Abb. 3.4a, 3.7) und Kästner et al. (2012; Abb. 2a, 4).
Auf Ratenabhängigkeit kann auch indirekt geschlussfolgert werden, wenn man berücksichtigt, dass ratenabhängiges Material relaxiert (Kästner 2010; S. 58).
Ebenfalls können auch verzerrungsgesteuerte sinusförmige Anregungen $\gamma = \hat{\gamma} \sin(\omega t)$ verwendet werden, um die Abhängigkeit von der Rate zu untersuchen. Wird eine Abhängigkeit des Speicher- und Verlustmoduls von der Kreisfrequenz festgestellt, so ist dem Materialverhalten ratenabhängiges Verhalten nachgewiesen. Dies ist deswegen nachvollziehbar, weil die Kreisfrequenz ein Skalierungsparameter dafür ist, wieviel Zeit die Änderung der Schubverzerrung von einem Umkehrpunkt $\gamma = -\hat{\gamma}$ zum anderen $\gamma = \hat{\gamma}$ in Anspruch nimmt. Ratenabhängigkeit kann daher anschaulich mittels dem PIPKIN Diagramm festgestellt werden. Sehen die LISSAJOUS Diagramme für eine feste Amplitude $\hat{\gamma}$ für alle Kreisfrequenzen annähernd gleich aus, so liegt kein ratenabhängiges Materialverhalten vor. (*Folgerung 10*)

3.6 Phänomenologische Materialklassifizierung nach HAUPT

Haupt (2002; S. 270, 272) schlägt eine Materialklassifikation vor, nach der Materialien auf der Grundlage zweier Klassifizierungskriterien,

- der Gestalt der Gleichgewichtsrelation τ^{eq}-γ^{eq} [67] sowie der
- Ratenabhängigkeit [68],

in die vier Materialklassen

- *Elastizität*: ratenunabhängig ohne Hysterese,
- *Plastizität*: ratenunabhängig mit Hysterese,
- *Viskoelastizität*: ratenabhängig ohne Gleichgewichtshysterese und
- *Viskoplastizität*: ratenabhängig mit Gleichgewichtshysterese

eingeteilt werden. Die Gleichgewichtshysterese wird in der Literatur [69] auch als *statische Hysterese* bezeichnet. Je nachdem in welcher Art dissipative Effekte auftreten, unterscheiden sich die vier oben eingeführten Materialklassen (Haupt 2002; S. 435). Elastisches Material ist dissipationsfrei. Dissipative Effekte viskoelastischer Materialien entstehen aufgrund ratenabhängiger Eigenschaften und führen auf ein sogenanntes *nachlassendes Gedächtnis* (Haupt 1977; S. 4). Plastische Materialien besitzen ein perfektes Gedächtnis [70]. Sie erfassen dissipative Effekte somit aus einem gänzlich anderen Blickwinkel, der von ratenunabhängigen Eigenschaften geprägt ist (Houlsby und Puzrin 2006; S. 211). Viskoplastizität ist die

[67] (Haupt 1993; S. 131, 141; Abb. 2, 5, 7), (Lion 1994; Abb. 3.1.1 - 3.1.4, 3.2.1.1), (Haupt 2002; S. 260, 269)

[68] (Rettig 1984; S. 519), (Krawietz 1986; S. 38), (Haupt 1993; S. 146), (Lion 1996; S. 155), (Lion 1997; S. 2), (Haupt 2002; S. 437)

[69] (Kolsch und Ottl 1990; S. 111), (Kolsch 1992; S. T34), (Kolsch und Ottl 1993), (Kolsch 1993; S. 3, 5, 10), (Werdin 1996; S. 10, 46), (Sedlan 2000; S. 27), (Betten 2001; S. 3)

[70] (Haupt 1977; S. 4, 10), (Dealy und Wissbrun 1990; S. 22)

allgemein gültigste Materialklasse und behandelt dissipative Effekte sowohl durch ratenabhängige als auch ratenunabhängige Eigenschaften. Viskoplastische Materialien, die keinerlei elastische Eigenschaften aufweisen, besitzen daher ausschließlich dissipative Eigenschaften. Eine Übersicht von Materialklassen mit entsprechenden Vertretern rheologischer Modelle ist Haupt (2002; Abb. 6.16) entnommen und in Abbildung 3.9 dargestellt. Nach Haupt (2002; S. 273) ist ein NEWTONsches Fluid demnach ein Grenzfall

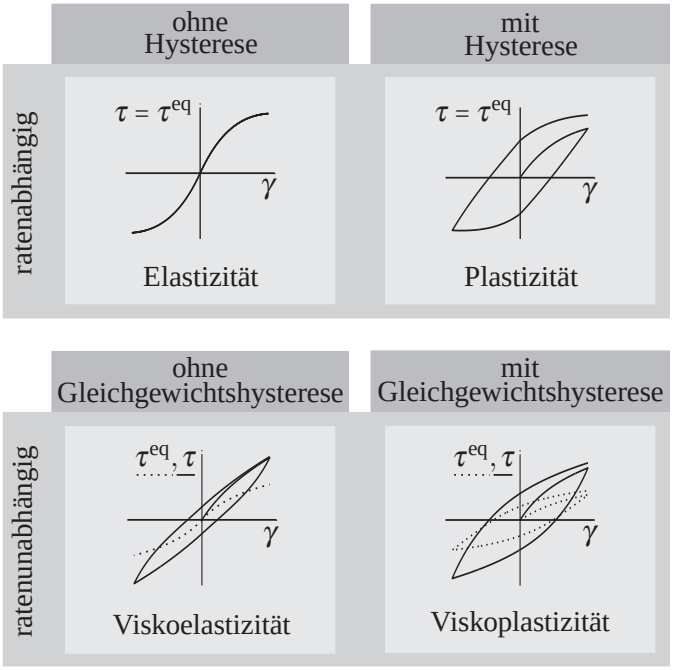


Abbildung 3.9: Materialklassifizierung nach Haupt (2002; S. 270)

viskoelastischen Materialverhaltens. Viskoelastische Materialien, die keine elastischen Anteile besitzen, werden in dieser Arbeit als *rein viskos* bezeichnet. Plastisches Materialverhalten ohne elastischen Vorfließbereich wird nach Göldner (1989; S. 216), Gross et al. (2004; S. 329), Silber und Steinwender (2005; S. 18) und Mezger (2010; S. 58) als *starr plastisch* bezeichnet. Plastische Phänomene ohne entfestigende Effekte [71] und ohne Verfestigungseffekte [72], die also weder isotrope noch kinematische Verfestigung [73] aufweisen, werden als *ideal plastisch* oder *perfekt plastisch* [74] bezeichnet.

Außerdem sei erwähnt, dass die oben eingeführten Materialklassen von anderen Autoren in alternativer Art und Weise abgegrenzt werden [75]. In der DIN 1342-1 (S. 5) und DIN 1342-3 (S. 4) wird plastischem Materialverhalten unterstellt, dass es sich bis zum Erreichen einer Fließspannung wie ein Festkörper und anschließend wie eine Flüssigkeit verhält (Mezger 2010; S. 57). Alternative Definitionen für elastisch, plastisch, viskoelastisch und viskoplastisch sind in Hackley und Ferraris (2001; S. 26 ff.) aufgeführt. Zwei weitere Systematiken von Materialklassen werden in Figura (2004; S. 119–121) präsentiert. Im ersten Fall werden die acht Begriffe – ideal elastisch, nicht-ideal elastisch, plasto-elastisch, visko-elastisch, elasto-viskos, plasto-viskos, nicht-ideal viskos und ideal viskos – in die drei Stoffklassen der Festkörper, Flüssigkeiten und Halb-Festkörper eingeordnet. Im Anschluss daran werden „realistischere“ Materialklassen – visko-elastisch, elasto-plastisch und plasto-viskos – auf Basis „idealisierter“

[71] (Khan und Huang 1995; S. 147), (Simo und Hughes 2000; S. 69, 88), (Ottosen 2005; S. 146, 204), (Wu 2005; S. 286, 315, 427), (Houlsby und Puzrin 2006; S. 20, 26, 31), (Lubliner 2008; S. 125), (Puzrin 2012; S. 214, 217, 220, 247)

[72] (Houwink 1957; S. 3), (Maugin 1992; S. 4), (Puzrin 2012; S. 110)

[73] (Backhaus 1983; S. 280), (Krawietz 1986; S. 417), (Göldner 1989; S. 224–228), (Kreißig 1992; S. 2, 54, 59), (Maugin 1992; S. 23), (Lemaitre und Chaboche 1994; S. 108, 109), (Altenbach 1994; S. 214), (Khan und Huang 1995; S. 160), (Simo und Hughes 2000; S. 11, 12, 17, 19, 90), (Betten 2001; S. 136), (Wriggers 2001; S. 54), (Haupt 2002; S. 231, 272, 452, 461, 479), (Wu 2005; S. 286), (Ottosen 2005; S. 209–218, S. 285–307, S. 321), (Houlsby und Puzrin 2006; S. 25, 27), (Lubliner 2008; S. 112, 125, 146, 147), (Chaboche 2008; S. 1645), (Sedlacek 2009; S. 57, 70), (Nasdala 2010; S. 174), (Puzrin 2012; S. 217, 226)

[74] (Göldner 1989; S. 214), (Simo und Hughes 2000; S. 7, 82, 89), (Gross et al. 2004; S. 328), (Houlsby und Puzrin 2006; S. 20), (Lubliner 2008; S. 113, 125), (Rust 2009; S. 104), (Sedlacek 2009; S. 52), (Nasdala 2010; S. 175), (Puzrin 2012; S. 218)

[75] (Bertram 1989; S. 246 ff.), (Göldner 1989; S. 197), (Lubliner 2008; S. 111), (Mezger 2010; S. 60)

Materialklassen – elastisch, viskos und plastisch – definiert. „Stoffe, die erst nach Überwinden einer endlichen Scherspannung, der so genannten Fließgrenze, zu fließen beginnen, nennt man viskoplastisch“ nach Betten (2001; S. 20) und sinngemäß auch nach Mitsoulis (2007; S. 135)[76]. Weil in der Definition keine Differenzierung hinsichtlich Ratenabhängigkeit vorgenommen wird, trifft sie auch für starr plastische Materialein im HAUPTschen Sinn zu. Bei SCOTT BLAIR[77] wird das Spektrum rheologischer Eigenschaften in neun Klassen unterteilt, bei Weipert et al. (1993; S. 148) in acht, auf die hier nicht näher eingegangen werden soll.
Weiterhin wird Plastizität auch direkt mit der Eigenschaft verknüpft, nach Entlastung bleibende Verformungen aufzuweisen[78]. Genauer betrachtet ist diese Tatsache *notwendig* aber *nicht hinreichend* für Plastizität im HAUPTschen Sinn (*Folgerung 11*). Da viskoelastische Materialien ohne Gleichgewichtsrelation, das heißt $\tau^{\mathrm{eq}} = 0$, ebenfalls bleibende Verformungen nach Entlastung aufweisen, kann nach diesem Kriterium eine Vielzahl von Materialmodellen als plastisch eingeordnet werden. Beispielsweise würde dann auch eine NEWTONsche Flüssigkeit ein plastisches Materialmodell darstellen. Dieses Problem wird auch in Figura (2004; S. 119) benannt. FIGURA berichtet davon, dass für im HAUPTschen Sinn viskoelastische Materialien aufgrund von inelastischen Deformationen nach Entlastung der Begriff „viskoplastoelastisch“ verwendet wird.
Wie ansatzweise gezeigt wurde, existieren in der Literatur viele Vorschläge Materialverhalten zu klassifizieren. Weil die Klassifizierung nach Haupt (2002; S. 270, 272) theoretisch in sich schlüssig ist und auf zwei experimentell messbare Klassifizierungskriterien fußt, wird ihr in dieser Arbeit gegenüber den anderen oben genannten Vorschlägen der Vorzug gewährt.

3.7 Stationäre Materialfunktion für eine konstante Schubverzerrungrate

3.7.1 Fließkurve

Die stationäre Materialfunktion zur Charakterisierung des Materialverhaltens, unter Anregung mit einer konstanten Schubverzerrungsrate[79] $\dot{\tilde{\gamma}}$, wird als *Fließkurve* $\tau_\infty(\dot{\tilde{\gamma}})$ bezeichnet[80]. Diese erfasst die Materialeigenschaften im flüssigkeitsähnlichen Regime und verknüpft eine konstante Schubverzerrungrate, $\dot{\tilde{\gamma}}$, mit der daraus resultierenden stationären Spannung τ_∞. Die Fließkurve misst daher lediglich viskose Effekte sowie reibungsbehaftete Materialeffekte aufgrund einer Fließspannung. Somit beinhaltet die Fließkurve für Materialien mit fest-flüssig Übergang im Allgemeinen viskose und plastische Materialeigenschaften. Die Spannung im stationären Zustand τ_∞ ist theoretisch definiert durch

$$\tau_\infty = \lim_{t\to\infty} \tau(t) \qquad \text{für } \{\dot{\gamma} = \text{konst}\} =: \dot{\tilde{\gamma}} . \tag{3.67}$$

Eine gemessene Fließkurve ist ein mathematischer Vektor $\underline{\tau}_{\infty.\mathrm{meas}}(\underline{\dot{\tilde{\gamma}}})$, der den diskreten, konstant gehaltenen Schubverzerrungsraten die entsprechenden Spannungen zuordnet. Das Symbol $\underline{(\,)}$ wird hier als Spaltenvektor benutzt. Die konstanten Schubverzerrungsraten sind in dem Spaltenvektor $\underline{\dot{\tilde{\gamma}}} = \left(\dot{\tilde{\gamma}}^1, \ldots, \dot{\tilde{\gamma}}^i, \dot{\tilde{\gamma}}^{i+1}, \ldots, \dot{\tilde{\gamma}}^n\right)^{\mathrm{T}}$ zusammengefasst, wobei der Index die Positionsnummer der Vektorkomponente angibt. Die Fließkurve kann mit der Messvorschrift nach Abbildung 3.10 gemessen werden. Dazu werden Schubverzerrungsraten $\dot{\tilde{\gamma}}^i$ über den Zeitraum Δt konstant gehalten und die Spannungsantwort $\tau_{\mathrm{meas}}(t)$ wird gemessen. Der i-te Spannungswert der Fließkurve $\tau^i_{\infty.\mathrm{meas}}$ ergibt sich aus dem letzten Spannungswert der i-ten Haltezeit

$$\tau^i_{\infty.\mathrm{meas}}\left(\dot{\tilde{\gamma}}^i\right) = \lim_{t\to i\cdot\Delta t} \tau_{\mathrm{meas}}(t) \qquad \text{für } \left\{\dot{\gamma}^i = \text{konst}\right\} =: \dot{\tilde{\gamma}}^i . \tag{3.68}$$

[76] englisches Originalzitat: „Viscoplasticity is characterised by a yield stress, below which the material will not deform, and above which they will deform and flow [...] .“ (Mitsoulis 2007; S. 135)

[77] (Scott Blair 1949; S. 64), (Weipert et al. 1993; S. 45)

[78] (Scott Blair 1949; S. 56), (Tobolsky 1967; S. 285 ff.), (Zienkiewicz 1984; S. 420), (Ehrenstein 1999; S. 163), (Lion 2000b; S. 81), (DIN 1342-1;S. 9), (Kardelky 2004; S. 17), (Figura 2004; S. 119)

[79] (Bird 1987; S. 104), (Tschoegl 1989; S. 94), (Dealy und Wissbrun 1990; S. 155), (Hackley und Ferraris 2001; S. 30), (Coussot et al. 2002b; S. 578), (Coussot et al. 2002a; S. 3), (Coussot 2005; S. 91), (Ewoldt 2006; S. 30), (Tadros 2010; S. 37), (Fall et al. 2010; S. 3), (Paredes et al. 2011; S. 3), (Laurati et al. 2011; S. 691), (Rich et al. 2012; S. 583)

[80] (Giesekus und Langer 1977; S. 2), (James et al. 1987; S. 444), (Giesekus 1994; S. 209), (Böhme 2000; S. 125), (Hackley und Ferraris 2001; S. 30), (DIN.1342-1; S. 5), (Coussot 2005; S. 91), (Kröger 2005a), (Carrier und Petekidis 2009; S. 251), (Mezger 2010; S. 37), (Laurati et al. 2011; Abb. 12), (Worthoff 2013; S. 9)

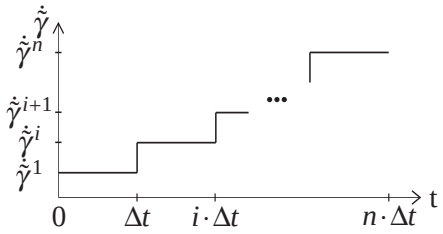


Abbildung 3.10: Messvorschrift zur Messung der Fließkurve $\underline{\tau}_{\infty.\mathrm{meas}}(\underline{\dot{\tilde{\gamma}}})$

Daher hängt der Messwert $\tau^i_{\infty.\mathrm{meas}}$ vom experimentellen Fenster, der Haltezeit Δt ab (Brummer 2006; S. 69, 97). Um sicherzustellen, dass $\tau^i_{\infty.\mathrm{meas}}$ im stationären Zustand gemessen wird, ist die Haltezeit Δt „ausreichend groß“ zu wählen. Eine wesentliche Eigenschaft der Fließkurve ist, eine ungerade Funktion[81]

$$\tau_\infty(\dot{\tilde{\gamma}}) \stackrel{!}{=} -\tau_\infty(-\dot{\tilde{\gamma}}) \qquad \forall \dot{\tilde{\gamma}} \neq 0 \tag{3.69}$$

zu sein. Dies impliziert die Unabhängigkeit der Materialantwort von der Scherrichtung. Wenngleich es unter dieser Annahme genügt, die Fließkurve für $\dot{\tilde{\gamma}}^i \geq 0$ zu messen, muss der Ansatz zur Modellierung der Fließkurve sowohl für positive als auch negative Scherraten gültig sein (*Folgerung 12*). Um dies gewährleisten zu können, ist es ratsam den Modellansatz der Fließkurve sowohl für positive als auch negative Scherraten grafisch darzustellen.

3.7.2 Viskosität

Die Viskosität $\eta_{(\,)}$ ist eine Materialfunktion und ergibt sich nicht a priori aus der Fließkurve. Aufgrund der Tatsache, dass die Viskosität eine das Materialverhalten kennzeichnende Größe ist, kann sie mehr oder weniger geeignet definiert (Scott Blair 1949; S. 52) aber nicht direkt gemessen werden. Sie unterliegt einer willkürlich wählbahren Berechnungsvorschrift, die mehr oder weniger eine Frage der Konvention ist[82]. In Abhängigkeit von der Definitionsvorschrift zur Berechnung der Viskosität ergibt sich deren Platzhalter $(\,)$. Es sei jedoch erwähnt, dass zur Quantifizierung viskoser Eigenschaften und reibungsbehafteten Materialeffekten, infolge einer Fließspannung, die Definition einer *Viskosität* nicht notwendig ist. Diese Eigenschaften sind bereits durch das Messen der Fließkurve ausreichend bestimmt. Soll aus bestimmten Gründen dennoch eine Größe namens „Viskosität“ definiert werden, kann dies auf der Grundlage der Fließkurve erfolgen. Dafür gibt es in der Literatur zwei Ansätze,

- die dynamische Viskosität und
- die differentielle Viskosität.

Unabhängig davon, ob die Scherviskosität als dynamische Viskosität[83]

$$\eta_{\mathrm{dyn}} = \frac{\tau_\infty}{\dot{\tilde{\gamma}}} \tag{3.70}$$

oder als differentielle Scherviskosität[84]

$$\eta_{\mathrm{diff}} = \frac{d\tau_\infty}{d\dot{\tilde{\gamma}}} \tag{3.71}$$

[81] (Coleman et al. 1966; S. 26), (Harris 1977; S. 6, 17), (Becker 1986; S. 93), (Böhme 2000; S. 130), (Debbaut und Burhin 2002; S. 1166), (DIN.1342-3; S. 6), Hess, Kröger und Fischer (2006; S. 394), (Hyun und Wilhelm 2009; S. 413), (Hyun et al. 2011; S. 1704)

[82] englisches Originalzitat: „It is, of course, entirely a matter of convention“ (Scott Blair 1949; S. 52)

[83] (Sieglaff 1976; S. 312), (Dealy und Wissbrun 1990; S. 12, 47), (Wünsch 1994; S. 12), (Rohm und Kovac 1995; S. 320), (Böhme 2000; S. 124, 127), (DIN.1342-1; S. 4), (DIN.1342-2; S. 6), (de Souza Mendes und Dutra 2004; S. 297), (Ewoldt 2006; S. 30), (Mezger 2010; S. 29), (DIN–Taschenbuch 398 2012; S. 23)

[84] (Andrade 1947; S. 61), (Umstätter 1952; S. 6), (Oberst 1963; S. 27), (Wazer et al. 1963; S. 13), (Harris 1977; S. xxxviii, 6), (Becker 1978; S. 453), (Lyklema und van Olphen 1979; S. 1217), (Sood 1991; S. 68), (Halsey 1992; S. 765), (Weipert et al. 1993; S. 186), (Wünsch 1994; S. 12), (Böhme 2000; S. 127), (Hackley und Ferraris 2001; S. 27), (Brunn und Asoud 2002; S. 525), (Figura 2004; S. 103, 114), (Ewoldt 2009; S. 39), (Ewoldt et al. 2009; S. 44), (Boisly et al. 2014a), (Boisly et al. 2014b),, (Boisly et al. 2015)

definiert wird, müssen beide Viskositäten gerade Funktionen sein [85]

$$\eta_{(\,)}(-\dot{\tilde{\gamma}}) \stackrel{!}{=} \eta_{(\,)}(\dot{\tilde{\gamma}}) \,. \tag{3.72}$$

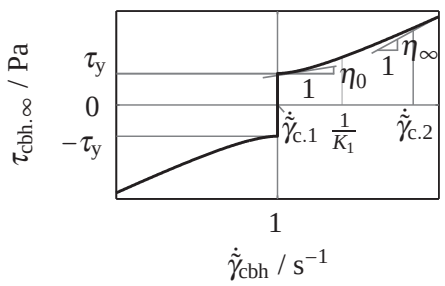
Für NEWTONsche Flüssigkeiten führen beide Definitionen auf das gleiche Ergebnis. Ein Nachteil der dynamischen Viskosität ergibt sich bei der Anwendung auf Materialien mit fest-flüssig Übergang. Die Nullviskosität [86]

$$\eta_{0.(\,)} = \lim_{\substack{\dot{\tilde{\gamma}}\to 0 \\ \dot{\tilde{\gamma}}>0}} \eta_{(\,)} \tag{3.73}$$

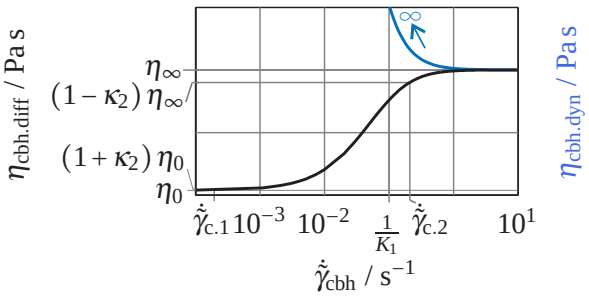
ist aufgrund der endlichen Fließspannung für ein

$$\text{Material mit fest-flüssig Übergang:} \qquad \eta_{0.\mathrm{dyn}} = \lim_{\substack{\dot{\tilde{\gamma}}\to 0 \\ \dot{\tilde{\gamma}}>0}} \frac{\tau_\infty}{\dot{\tilde{\gamma}}} = \infty \tag{3.74}$$

unendlich groß [87] (*Folgerung 12*). Dieses Problem ist anschaulich in Boisly et al. (2014a; Abb. 5) für das Reibelement, dem einfachsten Material mit fest-flüssig Übergang, dargestellt. Es tritt gleichermaßen für das PRANDTL Element in Boisly et al. (2014b; S. 4), das BINGHAM-HOOKE Element in Boisly et al. (2017), das rCROSS-BINGHAM-HOOKE Element in Abschnitt 5.3 sowie das endochrone MAXWELL Element in Abschnitt 6.3 auf. Definiert man die Viskosität als dynamische Viskosität, so werden dem Reib-, PRANDTL und endochronen MAXWELL Element, welche ausschließlich plastische Materialmodelle sind, zwangsläufig viskose Eigenschaften zugeordnet. Man kann sich von dieser Problematik befreien, indem die Viskosität als differentielle Viskosität eingeführt wird.
Dass bei Verwendung der dynamischen Viskosität unter gewissen Umständen sogar qualitativ irrtümliche Aussagen geschlussfolgert werden müssen, ist am Beispiel einer scherverdickenden Flüssigkeit mit Fließspannung anschaulich verdeutlicht. Als theoretisches Modellbeispiel wird dazu das rCROSS-BINGHAM-HOOKE Element aus Abschnitt 5 benutzt, für das sich der scherverdickende Fall mittels $\eta_0 < \eta_\infty$ einstellt. Die Fließkurve ist in Abbildung 3.11(a) dargestellt. Die dynamische Viskosität sowie die differentielle Vis-



(a) Fließkurve einer scherverdickenden Flüssigkeit mit Fließspannung



(b) Differentielle und dynamische Viskosität in semilogarithmischer Skalierung

Abbildung 3.11: Modellvorhersage des scherverdickenden rCROSS-BINGHAM-HOOKE Elements aus Abschnitt 5.3 mit $\tau_y = 50\,\mathrm{Pa}$, $\eta_0 = 18.75\,\mathrm{Pa\,s}$, $\eta_\infty = 500\,\mathrm{Pa\,s}$, $K_1 = 10\,\mathrm{s}$ und $\kappa_2 = 0.1$. Der Schubmodul G hat keinen Einfluss auf die Modellvorhersage des stationären Zustands.

kosität sind in Abbildung 3.11(b) gezeigt. Man erkennt, dass die dynamische Viskosität mit geringer werdender Scherrate ansteigt. Infolgedessen muss fälschlicher Weise scherverdünnendes Verhalten geschlussfolgert werden. Tatsächlich liegt jedoch mit $\eta_0 < \eta_\infty$ scherverdickendes Verhalten zugrunde, welches durch die differentielle Viskosität in korrekter Weise identifiziert wird. Ein weiterer Vorteil der differentiellen

[85] (Harris 1977; S. 6), (Bird 1987; S. 105), (Weipert et al. 1993; S. 62), (Tanner und Walters 1998; S. 80), (Wilhelm et al. 1998; S. 400), (Wilhelm et al. 1999b; S. 754), (Wilhelm et al. 2000; S. 242), (Kallus et al. 2001; S. 554), (Debbaut und Burhin 2002; S. 1165), (Tanner 2002; S. 85), (Klein et al. 2003; S. 449), (Neidhöfer et al. 2003; S. 1352), (Dötsch et al. 2003; S. 924), (Betten 2005; S. 173), (Carrier und Petekidis 2009; S. 249), (Deshpande et al. 2010; S. 96), (Galindo-Rosales et al. 2011; S. 1422)

[86] (Sieglaff 1976; S. 313), (Ebert 1980; S. 36), (Dealy und Wissbrun 1990; S. 12, 155), (Weipert et al. 1993; S. 68), (Pahl et al. 1995; S. 26), (Böhme 2000; S. 124), (Hackley und Ferraris 2001; S. 29), (Morrison 2001; S. 135), (de Souza Mendes und Dutra 2004; S. 298), (Mezger 2010; S. 44), (Deshpande et al. 2010; S. 9), (Worthoff 2013; S. 11)

[87] (Nguyen und Boger 1992; S. 64), (Klein et al. 2007; S. 4254), (Maxey und Hughes 2007; S. 2), (Tadros 2010; S. 42)

Viskosität ist die direkte physikalische Interpretierbarkeit. Für nicht-NEWTONschen Flüssigkeiten kann mittels der TAYLOR-Reihenentwicklung ausschließlich für die differentielle Viskosität eine physikalische Interpretation gefunden werden. Dies gilt jedoch nicht in gleichem Maße für die dynamische Viskosität. Die physikalische Interpretierbarkeit lässt sich beispielsweise anhand der Fließkurve des rCROSS Modells aus Boisly et al. (2015) zeigen. Die Fließkurve ist schematisch in Abbildung 3.12 dargestellt. Man kann erkennen, dass der Anstieg der Spannung um $\Delta\tau_\infty$ resultierend aus dem Zuwachs der Scherrate um $\Delta\dot{\tilde{\gamma}}$ direkt mit der differentiellen Viskosität

$$\Delta\tau_\infty = \eta_{\text{diff}}\big|_{\dot{\tilde{\gamma}}=\dot{\gamma}^*}\,\Delta\dot{\tilde{\gamma}} \tag{3.75}$$

verknüpft ist. Die differentielle Viskosität stellt daher den Anstieg an die Fließkurve dar und ergibt sich als lineares Glied der TAYLOR Reihenentwicklung (*Folgerung 12*)

$$\tau_\infty\left(\dot{\gamma}^* + \Delta\dot{\tilde{\gamma}}\right) = \tau_\infty\left(\dot{\gamma}^*\right) + \underbrace{\left.\frac{d\tau_\infty}{d\dot{\tilde{\gamma}}}\right|_{\dot{\tilde{\gamma}}=\dot{\gamma}^*}}_{\eta_{\text{diff}}\big|_{\dot{\tilde{\gamma}}=\dot{\gamma}^*}}\Delta\dot{\tilde{\gamma}} + \left.\frac{d^2\tau_\infty}{d\dot{\tilde{\gamma}}^2}\right|_{\dot{\tilde{\gamma}}=\dot{\gamma}^*}\frac{\Delta\dot{\tilde{\gamma}}^2}{2} + \ldots \quad . \tag{3.76}$$

Im Gegensatz dazu ist die dynamische Viskosität die Sekante an die Fließkurve und kann daher weniger physikalisch interpretiert werden. Wie in Boisly et al. (2015; Gl. 27, 28, 31, 32) für das rCROSS Modell

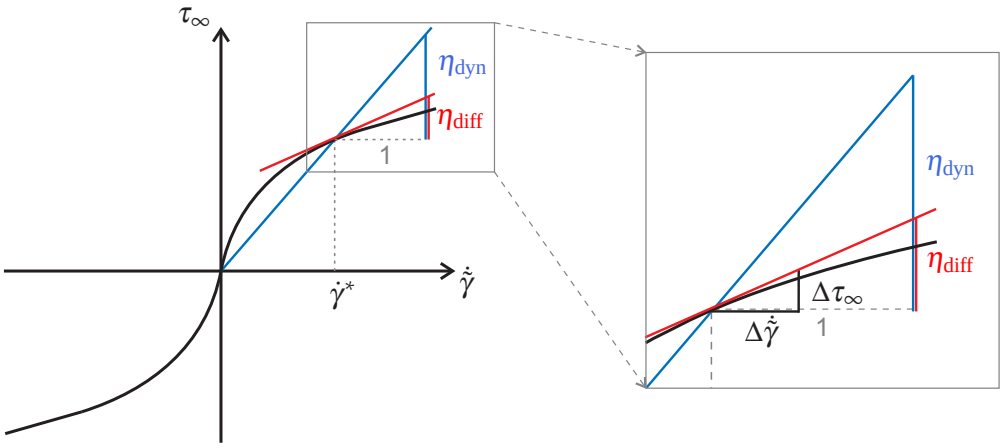


Abbildung 3.12: Unterschied zwischen dynamischer und differentieller Viskosität; Physikalische Interpretierbarkeit der differentiellen Viskosität als lineares Glied der TAYLOR Reihenentwicklung der Fließkurve

und das rCROSS-MAXWELL Element gezeigt ist, stimmen für scherverdickende (und scherverdünnende) Fließkurven zumindest der NEWTONsche Anfangs- und Endbereich der dynamischen und differentiellen Viskosität überein. Im ausgeprägt nicht NEWTONschen Übergangsbereich ist die dynamische Viskosität nicht derart physikalisch interpretierbar, wie es die differentielle Viskosität ist. Daher wird die dynamische Viskosität auch als *scheinbare Viskosität* [88] bezeichnet (*Folgerung 12*). Die dynamische und differentielle Viskosität können unter Beachtung von

$$\tau_\infty = \eta_{\text{dyn}}\left(\dot{\tilde{\gamma}}\right)\dot{\tilde{\gamma}} \tag{3.77}$$

$$\tau_\infty = \int \eta_{\text{diff}}\left(\dot{\tilde{\gamma}}\right)d\dot{\tilde{\gamma}} + C \tag{3.78}$$

ineinander umgerechnet werden. Die Integrationskonstante C ist für Flüssigkeiten identisch Null, jedoch für Materialien mit fest-flüssig Übergang verschieden von Null. Die dynamische Viskosität hängt somit über

$$\eta_{\text{dyn}} = \frac{\int \eta_{\text{diff}}\left(\dot{\tilde{\gamma}}\right)d\dot{\tilde{\gamma}} + C}{\dot{\tilde{\gamma}}} \tag{3.79}$$

[88] (Houwink 1957; S. 9), (Oberst 1963; S. 27), (Wazer et al. 1963; S. 13), (Lodge 1964; S. 97), (Harris 1977; S. xxxvi), (Bird 1987; S. 104), (Weipert et al. 1993; S. 66, 185), (Steffe 1996; S. 24),(Tanner 2002; S. 17), (Figura 2004; S. 114), (Owens und Phillips 2005; S. 9), (Mezger 2010; S. 40), (Deshpande et al. 2010; S. 15), (Worthoff 2013; S. 22)

von der differentiellen Viskosität ab. Umgekehrt kann man die differentielle Viskosität über

$$\eta_{\text{diff}} = \frac{d\,\eta_{\text{dyn}}(\dot{\hat{\gamma}})}{d\dot{\hat{\gamma}}}\,\dot{\hat{\gamma}} + \eta_{\text{dyn}}(\dot{\hat{\gamma}}) \tag{3.80}$$

aus der dynamischen Viskosität berechnen. Dies erfolgt durch Differentiation der Gleichungen (3.77) und (3.78) nach $\dot{\hat{\gamma}}$ unter Berücksichtigung der Produktregel.
Die Definition differentieller Materialfunktionen ist generell nicht unüblich. Das zur differentiellen Viskosität existierende Analogon der Festkörpermechanik ist der *Tangentenmodul* [89]. Der *Elastizitätsmodul* E eines linear elastischen Materials kann mittels des Sekantenmoduls $E = \frac{\sigma}{\varepsilon}$, völlig analog zur dynamischen Viskosität NEWTONscher Flüssigkeiten, berechnet werden. Für nichtlinear elastisches Materialverhalten hingegen ist die materialspezifische Steifigkeit, die mit dem Anstieg der Spannungs-Verzerrungs-Beziehung korreliert, nicht mehr konstant. Sie ist eine Funktion der Verzerrung. Daher wird anstelle des Sekantenmoduls der Tangentenmodul

$$E_{\text{diff}}(\varepsilon) = \frac{d\sigma(\varepsilon)}{d\varepsilon} \tag{3.81}$$

berechnet.

3.8 Stationäre Materialfunktionen für eine sinusförmige verzerrungsgesteuerte Anregung im Bereich geometrisch linearer Theorie

In diesem Abschnitt wird die Spannungsantwort bezüglich einer verzerrungsgesteuerten sinusförmigen Anregung im Bereich geometrisch linearer Theorie ausgewertet. Die sinusförmige Anregung besitzt die Amplitude $\hat{\gamma}$ und die Kreisfrequenz ω. Die Beschränkung auf geometrisch lineare Theorie liefert nach Gleichung (3.28) die Restriktion $|\hat{\gamma}| \lesssim 0.1$, insofern die Maßgabe ist, dass lineare und exakte Verzerrungsmaße um maximal sieben Prozent voneinander abweichen sollen.
Ein Aspekt der sinusförmigen Versuchsführung ist, dass die Ratenabhängigkeit $\dot{\gamma} \sim \hat{\gamma}\omega$ innerhalb eines beschränkten Schubverzerrungbereiches $-\hat{\gamma} \leq \gamma \leq \hat{\gamma}$ lediglich durch die Variation der Kreisfrequenz [90] untersucht werden kann. Sinusförmige Anregungen eignen sich nach Wilhelm et al. (2000) und Wilhelm (2002; S. 92 ff.) auch für eine hochsensitive Untersuchung einer kritischen Schubverzerrung γ_{cr}, welche den Übergang zwischen linearem und nichtlinearem Bereich definiert. Nach dem Überschreiten der Linearitätsgrenze besitzt die periodische Spannungsantwort Anteile von Höherharmonischen, die mithilfe der FOURIER-Transformations (FT) Rheologie [91] gemessen und berechnet werden können. Somit ist das Spannungssignal nicht länger sinusförmig [92]. Zwar wird in der Literatur auf das Fehlen der physikalischen Interpretation Höherharmonischer hingewiesen [93], jedoch steht dies nicht im Widerspruch dazu, Höherharmonische für die Parameteridentifikation nutzen zu können. Im Sinne der phänomenologischen Materialmodellierung wird ein Material entsprechend Abbildung 2.7 als Operator zwischen Eingans- und

[89] (Hahn 1985; S. 59), (Göldner 1989; S. 200), (Hartmann 1993; S. 68), (Lion 1994; S. 89), (Lemaitre und Chaboche 1994; S. 123), (Werdin 1996; S. 28), (Holzapfel 2000; S. 252), (Simo und Hughes 2000; S. 19, 52, 130, 356), (Wriggers 2001; S. 215 ff.), (Bathe 2002; S. 703), (Figura 2004; S. 90), (Ottosen 2005; S. 223), (Ewoldt 2006; S. 36, 51), (MSC.Marc® 2006; S. 278), (Bertram 2007; S. 12), (Läpple 2008; S. 15), (Lubliner 2008; S. 50), (Ewoldt 2009; S. 39), (Ewoldt et al. 2009; S. 44), (Obst 2009; S. 34), (Merkel 2010; S. 246), (Bower 2010; S. 77), (Ewoldt et al. 2010; S. 197), (Kästner 2010; S. 81), (Hyun et al. 2011; S. 1730), (Rogers und Lettinga 2012; S. 14)

[90] (Tsang und Dealy 1981; S. 216), (Giacomin und Dealy 1993; S. 100), (Hyun et al. 2002; S. 52), (Hyun et al. 2003; S. 97), (Li et al. 2003; S. 281), (Jeyaseelan und Giacomin 2008; S. 24), (Hyun et al. 2009; S. 102), (Hyun und Wilhelm 2009; S. 411), (Giacomin et al. 2011; S. 1082), (Hyun et al. 2011; S. 1700), (Rogers 2012; S. 1131)

[91] (Harris und Bogie 1967), (Dodge und Krieger 1971), (Krieger und Niu 1973), (Gamota et al. 1993), (Giacomin und Dealy 1993; Absch. 4.4.1), (Reimers und Dealy 1996; Absch. IV), (Reimers und Dealy 1998; S. 536 ff.), (Wilhelm et al. 1998), (Wilhelm et al. 1999a), (Kallus et al. 2001), (Wilhelm 2002), (Debbaut und Burhin 2002; Absch. V), (Neidhöfer et al. 2003), (Neidhöfer et al. 2004), (Ewoldt 2006; S. 33), (Ewoldt 2009; S. 60), (Hyun et al. 2011; Absch. 4.1), (Reinheimer et al. 2011; S. 820), (Rogers und Lettinga 2012)

[92] (Krieger und Niu 1973), (Gamota et al. 1993), (Giacomin und Dealy 1993), (Wilhelm et al. 1998), (Wilhelm et al. 1999a), (Wilhelm 2002), (Debbaut und Burhin 2002; S. 1156), (Neidhöfer et al. 2003), (Neidhöfer et al. 2004), (Ewoldt 2006; S. 33), (Ewoldt 2009; S. 60), (Reinheimer et al. 2011; S. 820), (Rogers und Lettinga 2012)

[93] (Cho et al. 2005; S. 748), (Ewoldt 2006; S. 34), (Ewoldt et al. 2008a; S. 1430), (Ewoldt et al. 2008b; S. 1), (Ewoldt et al. 2009; S. 40), (Ewoldt 2009; S. 43, 60, 63), (Renou et al. 2010; S. 1219), (Rogers et al. 2011b; S. 436 ff.), (Rogers et al. 2011a; S. 734)

Ausgangssignalen interpretiert. Zur Identifikation von Materialparametern, der den Operator beschreibenden konstitutiven Beziehungen, bestehen aus mathematischer Sicht im Allgemeinen keine Restriktion, die zum Ausschluss bestimmter Materialfunktionen führen würden (*Folgerung 13*). Um der fehlenden physikalischen Interpretierbarkeit höherharmonischer Moduli entgegenzuwirken, wurden in den letzten Jahren zahlreiche Ansätze unternommen. Dazu zählt beispielsweise die FOURIER—CHEBYSHEV Analyse von Ewoldt et al. (2008a), welche die Spannungsaufteilung von Macosko (1994; S. 122) und Cho et al. (2005) unterstellt. Sie ist auf viskoelastisches Materialverhalten anwendbar. Im Gegensatz dazu kann die in dieser Arbeit entwickelte *Methode charakteristischer Punkte* auch zur Auswertung von viskoplastischem Verhalten verwendet werden. Das Verfahren von Klein et al. (2007) zerlegt die Spannungsantwort in die vier fundamentalen Basisfunktionen der Sinus-, Rechteck-, Dreieck- und Sägezahnfunktion, denen je eine physikalische Bedeutung unterstellt wird. Die *Sequenz physikalischer Prozesse* wurde von Rogers (2012) entwickelt. Im Rahmen dieser Arbeit wird jedoch auf diese Methoden nicht näher eingegangen. Weitere Ausführungen und Details findet der interessierte Leser bei Rogers und Lettinga (2012), Giacomin et al. (2011; ch. 9), Rogers et al. (2011a), Rogers et al. (2011b) und Hyun et al. (2011; Tab. 3). Das Verhalten nichtlinearer Systeme wird ebenfalls im Bereich der nichtlinearen Regelungstheorie unter dem Stichwort *Harmonische Balance*, die auch als *Methode der Beschreibungsfunktion* bezeichnet wird, untersucht (Lutz und Wendt 2005; S. 753). Dazu wird eine harmonische Linearisierung auf Basis der Beschreibungsfunktion durchgeführt, die identisch dem *komplexen Modul* [94] ist.

Harmonische Materialfunktionen beschreiben das Materialverhalten unter sinusförmiger Anregung. Im Rahmen dieser Arbeit werden harmonische Materialfunktionen für eine verzerrungsgeregelte Anregungen, die im Allgemeinen durch $\gamma(t) = \hat{\gamma}\sin(\omega t + \phi_0)$ beschrieben ist, untersucht. Die Schubverzerrung genügt zur vollständigen Beschreibung des Verzerrungstensor für geometrisch linearen, einfachen Schub aus Abschnitt 3.2, siehe Gleichungen (3.26) und (3.27). Die Phasenverschiebung ϕ_0 wird, bezogen auf einen mehr oder weniger willkürlich wählbaren Koordinatenursprung (Ewoldt 2013; Abb. 4), im Folgenden ohne Einschränkung der Allgemeinheit Null gesetzt. Die Schubverzerrung ist somit durch [95, 96]

$$\gamma(t) = \hat{\gamma}\sin(\omega t) \qquad \text{mit } \hat{\gamma} > 0,\ \omega > 0 \ \textit{und} \tag{3.82}$$

$$\dot{\gamma}(t) = \hat{\gamma}\omega\cos(\omega t) \tag{3.83}$$

gegeben. Die Anregung kann ebenso in komplexer Schreibweise [97]

$$\gamma(t) = \hat{\gamma}\,\Im\left\{e^{j\omega t}\right\} \tag{3.84}$$

$$\dot{\gamma}(t) = \hat{\gamma}\omega\,\Re\left\{e^{j\omega t}\right\} \tag{3.85}$$

unter Verwendung der imaginären Einheit $j^2 = -1$, des Realteils $\Re\{\ \}$, des Imaginärteils $\Im\{\ \}$ und der EULERschen Formel

$$e^{j\omega t} = \cos(\omega t) + j\sin(\omega t) \tag{3.86}$$

beschrieben werden. Die Spannungsantwort eines rheologischen Elements zu der verzerrungsgesteuerten Anregung nach Gleichung (3.82) ist $\tau(t)$. Im Folgenden wird angenommen, dass die Spannungsantwort in den stationären Zustand (*steady state*) (Boisly et al. 2014b; Gl. (2))

$$\tau_\infty(t) = \text{STEADYSTATE}\left\{\tau(t)|_{\gamma=\hat{\gamma}\sin(\omega t)}\right\} \approx \tau(t > \tilde{t}_0) \tag{3.87}$$

übergeht. Der Operator STEADYSTATE$\{\ \}$ führt $\tilde{t}_0$ als den Parameter ein, welcher die Zeit definiert, ab der die Spannungsantwort in den stationären Zustand übergeht. Die Periodendauer der Spannungsantwort

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \tag{3.88}$$

[94] (Ferry 1980; S. 12, 30), (Ebert 1980; S. 83), (Barnes et al. 1989; S. 46), (Tschoegl 1989; S. 58), (Schwarzl 1990; S. 177), (Dealy und Wissbrun 1990; S. 63), (Macosko 1994; S. 123), (Pahl et al. 1995; S. 125), (Larson 1999; S. 13), (Tanner 2002; S. 60), (Mezger 2010; S. 146), (Tadros 2010; S. 76), (DIN–Taschenbuch 398 2012; S. 39)

[95] (MacSporran und Spiers 1984; S. 91), (Dealy und Wissbrun 1990; S. 60), (Macosko 1994; S. 121), (Steffe 1996; S. 313), (Brummer 2006; S. 45), (Pal 2007; S. 306), (Rao 2007; S. 105), (Yamaguchi 2008; S. 424), (Deshpande et al. 2010; S. 88), (Ewoldt 2013), (Willenbacher und Georgieva 2013; S. 10)

[96] Die Beschreibung des Spannungsignals bezüglich der verzerrungsgesteuerten Anregung $\gamma(t) = \hat{\gamma}\cos(\omega t)$ ist in Oswald (2009; S. 341) beschrieben. Bei Lion (2000b; Gl. (6.3.2.2), S. 174) wird die Spannung in Bezug zur Anregung $\gamma(t) = -\hat{\gamma}\cos(\omega t)$ bestimmt.

[97] (Macosko 1994; S. 123), (Nam et al. 2008; S. 2), (Läuger und Stettin 2010; S. 911), (Ewoldt 2013; S. 181)

ist identisch mit der Periodendauer der Schubverzerrung, sodass

$$\tau_\infty(t) = \tau_\infty(t+T) \ . \tag{3.89}$$

Daher filtert der STEADYSTATE Operator jeden nicht-periodischen Anteil von $\tau(t)$, der mit fortlaufender Zeit gegen Null strebt.

3.8.1 Oszillatorische Scherung physikalisch kleiner Amplituden (SAOS)

In bestimmten Belastungsfällen sind die Belastungsparameter, $\hat{\gamma}$ und ω, kleiner als eine Linearitätsgrenze. Die Linearitätsgrenze kann in Abhängigkeit vom Materialverhalten beispielsweise durch eine kritische Schubverzerrung, $\hat{\gamma} \leq \gamma_{cr}$ [98], oder eine kritische Schubverzerrungsrate, $\hat{\gamma}\omega \leq \dot{\gamma}_{cr}$ [99], gegeben sein. Deswegen ist das Materialverhalten im Bereich von $0 \leq \hat{\gamma} \leq \gamma_{cr}$ beziehungsweise $0 \leq \hat{\gamma}\omega \leq \dot{\gamma}_{cr}$ durch einen Linearoperator beschrieben, dessen Eigenschaften in Abschnitt 3.1 definiert sind. Dieser lineare Bereich wird daher als *Bereich physikalisch kleiner Amplituden* bezeichnet. In Anlehnung an die englische Bezeichnung, *small amplitude oscillatory shear* [100], wird dieser Bereich im Folgenden mit SAOS abgekürzt. Der stationäre Anteil $\tau_\infty(t)$ der Spannungsantwort $\tau(t)$, bezüglich sinusförmiger verzerrungsgesteuerter Anregung nach Gleichung (3.82), kann für SAOS mittels der sogenannten *elastischen Interpretation* [101] beschrieben werden. Im Rahmen dessen erhält man die stationäre Spannungsantwort [102, 103]

$$\tau_\infty(t) = \hat{\gamma}\left[G'(\omega)\sin(\omega t) + G''(\omega)\cos(\omega t)\right] \ . \tag{3.90}$$

Der *Speichermodul* $G'(\omega)$ ist in Phase mit der verzerrungsgesteuerten Anregung (DIN–Taschenbuch 398 2012; S. 92). Der *Verlustmodul* $G''(\omega)$ ist in Phase mit der Schubverzerrungsrate, und somit um 90° phasenverschoben zur verzerrungsgesteuerten Anregung [104, 105]. Der Apostroph ist Teil der Definition und stellt keinen Ableitungsoperator dar. In komplexer Schreibweise ergibt sich

$$\tau_\infty(t) = \hat{\gamma}\,\Im\left\{G^* e^{j\omega t}\right\} \tag{3.91}$$

unter Verwendung des *komplexen Moduls* [106]

$$G^* = G' + jG'' \ . \tag{3.92}$$

Weil die verzerrungsgesteurte Anregung entsprechend Gleichung (3.84) dem imaginären Anteil entspricht, ergibt sich die stationäre Spannungsantwort im Sinne der elastischen Interpretation (Gleichung (3.91))

[98] (Scott Blair 1949; S. 58), (Weiss et al. 1994), (Pahl et al. 1995; S. 146), (Yziquel et al. 1999b; S. 14 ff.), (Wilhelm 2002; S. 93, Abb. 6), (Li et al. 2003; S. 282), (Uhlherr et al. 2005; S. 107), (Coussot 2005; S. 61, 90), (Tiu et al. 2006; S. 653), (Hyun et al. 2007; S. 1325), (Christopoulou et al. 2009; S. 5057 ff.), (Tadros 2010; S. 77), (Mezger 2010; S. 151), (Boisly et al. 2014b)

[99] (Wilhelm et al. 1998; S. 402), (Coussot 2005; S. 63), (Hess, Kröger und Fischer 2006; S. 396), (Boisly et al. 2015)

[100] (Walters 1975; S. 28), (MacSporran und Spiers 1982; S. 186), (Dealy und Wissbrun 1990; S. 62), (Nelson und Dealy 1993; S. 197), (Carreau et al. 1999; S. 1300), (Larson 1999; S. 13), (Morrison 2001; S. 153), (Ewoldt 2006; S. 30), (Hyun et al. 2007; S. 1325), (Celli et al. 2007; S. 1584), (Mezger 2010; S. 159), (Brader et al. 2010; S. 3), (Läuger und Stettin 2010; S. 911), (Deshpande et al. 2010; S. 88), (Rogers et al. 2011b; S. 456), (Laurati et al. 2011; S. 679), (Hyun et al. 2011; S. 1698, 1720), (Dimitriou et al. 2012; S. 406)

[101] englische Bezeichnung: „elastic scaling“ [(Ewoldt et al. 2008a; S. 1428), (Ewoldt 2009; S. 60)]

[102] (Ferry 1980; S. 12), (Dealy und Wissbrun 1990; S. 62), (Nelson und Dealy 1993; S. 198), (Pahl et al. 1995; S. 124), (Sim et al. 2003; S. 241), (Ewoldt 2006; S. 31), (Jeyaseelan und Giacomin 2008; S. 27), (Ewoldt et al. 2009; S. 43), (Laun et al. 2009; S. 2), (Ewoldt 2009; S. 41), (Deshpande et al. 2010; S. 88), (Rogers et al. 2011b; S. 456)

[103] Die Zerlegung der stationären Spannungsantwort $\tau_\infty(t) = \hat{\gamma}\left[G'(\omega)\cos(\omega t) - G''(\omega)\sin(\omega t)\right]$ für die verzerrungsgesteuerte Anregung $\gamma(t) = \hat{\gamma}\cos(\omega t)$ ist in Oswald (2009; S. 341) verwendet. Hingegen Lion (2000b; Gl. (6.3.2.2), S. 174) benutzte die Aufteilung $\tau_\infty(t) = \hat{\gamma}\left[-G'(\omega)\cos(\omega t) + G''(\omega)\sin(\omega t)\right]$ zu der verzerrungsgesteuerten Anregung $\gamma(t) = -\hat{\gamma}\cos(\omega t)$.

[104] (Larson 1999; S. 13), (Brader et al. 2010; S. 3), (DIN–Taschenbuch 398 2012; S. 93)

[105] (Ferry 1980; S. 41, 42, 184), (Dealy und Wissbrun 1990; S. 63), (Larson 1999; S. 13), (Macosko 1994; S. 122), (Pal 2007; S. 308), (Oswald 2009; S. 346)

[106] (Wazer et al. 1963; S. 343), (Malvern 1969; S. 312), (Onogi et al. 1970; S. 282), (Pipkin 1972; S. 17), (Matsumoto et al. 1973; S. 52), (Walters 1975; S. 29), (Ebert 1980; S. 83), (Ferry 1980; S. 12), (Barnes et al. 1989; S. 46), (Dealy und Wissbrun 1990; S. 63), (Macosko 1994; S. 123), (Larson 1999; S. 13), (Tanner 2002; S. 60), (Kröger 2005b; S. 81) (Brummer 2006; S. 48), (Pal 2007; S. 309), (Nam et al. 2008; S. 2), (Yamaguchi 2008; S. 425), (Oswald 2009; S. 341), (Mezger 2010; S. 146), (Rogers 2012; S. 1130), (DIN–Taschenbuch 398 2012; S. 39), (Willenbacher und Georgieva 2013; S. 11)

ebenfalls aus dem imaginären Anteil. Dies ist in Abschnitt A.4.2 hergeleitet. Gleichung (3.90) kann alternativ durch [107]

$$\tau_{\infty}(t) = G'(\omega)\,\gamma(t) + \frac{G''(\omega)}{\omega}\dot{\gamma}(t) = G'(\omega)\,\gamma(t) + \eta'(\omega)\,\dot{\gamma}(t) \tag{3.93}$$

unter Verwendung von [108]

$$\eta'(\omega) = \frac{G''(\omega)}{\omega} \tag{3.94}$$

ausgedrückt werden. Die Materialfunktion η' wird in der Literatur als *dynamische Viskosität* [109] bezeichnet, ist jedoch nicht zu verwechseln mit der dynamischen Viskosität nach Gleichung (3.70). Um Missverständnisse zu vermeiden, wird der Begriff *dynamische Viskosität* im Folgenden ausschließlich für die nach Gleichung (3.70) eingeführte Größe benutzt. Aus Gleichung (3.93) kann man die Darstellung der stationären Spannungsantwort im Rahmen der *dissipativen Interpretation* [110, 111]

$$\tau_{\infty}(t) = \hat{\gamma}\omega\left[\eta''(\omega)\sin(\omega t) + \eta'(\omega)\cos(\omega t)\right] = \eta''(\omega)\;\omega\gamma(t) + \eta'(\omega)\,\dot{\gamma}(t) \tag{3.95}$$

motivieren. Ihr ist die Amplitude der Schubverzerrungsrate vorangestellt. Die Materialfunktionen $\{G', G''\}$ und $\{\eta', \eta''\}$ [112] werden über einen Koeffizientenvergleich der stationären Spannungsantwort $\tau_{\infty}(t)$ ineinander umgerechnet. Damit ergibt sich [108]

$$\eta''(\omega) = \frac{G'(\omega)}{\omega}\,. \tag{3.96}$$

Die Materialfunktion η'' besitzt nach dem Kenntnisstand des Autors keinen reservierten Begriff [113]. Die Beschreibung im Sinn der dissipativen Inerpretation kann auch in komplexer Schreibweise

$$\tau_{\infty}(t) = \hat{\gamma}\,\omega\,\Re\left\{\eta^{*} e^{j\omega t}\right\} \tag{3.97}$$

unter Verwendung der *komplexen Viskosität* [114]

$$\eta^{*} = \eta' - j\,\eta'' \tag{3.98}$$

formuliert werden. Weil die Schubverzerrungsrate nach Gleichung (3.85) dem Realteil der komplexen Exponentialfunktion entspricht, drückt sich auch die stationäre Spannungsantwort im Rahmen der dissipativen Inerpretation (Gleichung (3.97)) mittels des Realteils aus. Dies ist in Abschnitt A.4.1 hergeleitet.

[107] (Steffe 1996; S. 315, 316), (Cho et al. 2005; S. 749), analog zu Oswald (2009; S. 341)

[108] (Wazer et al. 1963; S. 344), (Walters 1975; S. 29), (Ferry 1980; S. 14, 43), (Walters 1980; S. 17), (Ebert 1980; S. 83), (Barnes et al. 1989; S. 48), (Dealy und Wissbrun 1990; S. 63), (Macosko 1994; S. 123), (Steffe 1996; S. 316), (Tanner und Walters 1998; S. 205), (Barnes 2000; S. 89), (Tanner 2002; S. 60), (Brummer 2006; S. 49), (Pal 2007; S. 309), (Rao 2007; S. 106), (Yamaguchi 2008; S. 426), (Tadros 2010; S. 76), (DIN–Taschenbuch 398 2012; S. 39), (Ewoldt 2013; S. 181), (Willenbacher und Georgieva 2013; S. 11)

[109] (Pipkin 1972; S. 18), (Walters 1975; S. 28), (Ferry 1980; S. 43), (Walters 1980; S. 17), (Barnes et al. 1989; S. 48), (Dealy und Wissbrun 1990; S. 63), (Macosko 1994; S. 123), (Steffe 1996; S. 316), (Tanner und Walters 1998; S. 205), (Barnes 2000; S. 89), (Pal 2007; S. 309), (Yamaguchi 2008; S. 426), (Tadros 2010; S. 76)

[110] englische Bezeichnung: „dissipative scaling“ [(Walters 1975; S. 28), (MacSporran und Spiers 1984; S. 92), (Dealy und Wissbrun 1990; S. 63), (Macosko 1994; S. 123), (Ewoldt et al. 2008a; S. 1428), (Yamaguchi 2008; S. 425), (Ewoldt 2009; S. 60), (Läuger und Stettin 2010; S. 911), (Giacomin et al. 2011; S. 1082), (Melito et al. 2012; S. 4), (Ewoldt 2013; S. 181)]

[111] Die dissipative Interpretation wird von Ewoldt et al. (2008a; S. 1428), Ewoldt (2009; S. 60), Melito et al. (2012; S. 4) und Ewoldt (2013; S. 181) auch als *viskose Interpretation* (englische Bezeichnung: „viscous scaling“) bezeichnet. Die Bezeichnung ist nach Auffassung des Autors lediglich für linear viskoelastisches Material zutreffend, da beispielsweise starr-ideal plastisches Materialverhalten (Reibelement aus Boisly et al. (2014a)) ebenfalls in Phase mit der Rate der Verzerrung ist aber ausschließlich dissipative Anteile enthält die nicht viskoser Natur sind. Daher ist die Bezeichnung *viskose Interpretation* ausschließlich für den Bereich physikalisch kleiner Amplituden (SAOS) zutreffend. Daher wird in dieser Arbeit der allgemeinere Begriff der verwendet.

[112] (MacSporran und Spiers 1984; S. 92), (Steffe 1996; S. 49)

[113] (Barnes et al. 1989; S. 48), (Steffe 1996; S. 316)

[114] (Wazer et al. 1963; S. 343), (Walters 1975; S. 29, 120), (Walters 1980; S. 17), (Ferry 1980; S. 14), (Ebert 1980; S. 82), (Barnes et al. 1989; S. 48), (Dealy und Wissbrun 1990; S. 64), (Wünsch 1994; S. 54), (Tanner und Walters 1998; S. 205), (Larson 1999; S. 13), (Tanner 2002; S. 60), (Kröger 2005b; S. 81), (Brummer 2006; S. 49), (Pal 2007; S. 309), (Rao 2007; S. 106), (Yamaguchi 2008; S. 426), (Nam et al. 2008; S. 2), (Oswald 2009; S. 345), (Mezger 2010; S. 146), (DIN–Taschenbuch 398 2012; S. 39)

Um die für SAOS geltende Bedingungen der Linearität zu erfüllen, dürfen $\{G', G''\}$ und $\{\eta', \eta''\}$ keine Funktionen der Amplitude der Schubverzerrung sein [115]. Daher ergibt sich für die Schubverzerrung eine Linearitätsgrenze, die in der Literatur auch als kritische Schubverzerrung γ_{cr} eingeführt wird. Diese ist die größte Amplitude der Schubverzerrung, bei der $\{G', G''\}$ und $\{\eta', \eta''\}$ gerade noch als amplitudenunabhängig [116] betrachtet werden können. Somit ist die Amplitude der Spannungsantwort $\tau_{\infty}(t) = \hat{\gamma}[G'(\omega)\sin(\omega t) + G''(\omega)\cos(\omega t)] \stackrel{!}{=} \hat{\tau}\sin[\omega t + \phi(\omega)]$ direkt proportional zur aufgebrachten Schubverzerrungsamplitude [117]

$$\hat{\tau} = \frac{G'(\omega)}{\cos[\phi(\omega)]}\hat{\gamma} = \frac{G''(\omega)}{\sin[\phi(\omega)]}\hat{\gamma}\,, \tag{3.99}$$

was sich mit $k = 1$ für den allgemeinen Fall (Gleichungen (3.149) und (3.150)) ergibt. Entsprechend der Amplitude der dissipativen Interpretation, $\hat{\gamma}\omega$, tritt für rein nichtlinear viskose Materialien die kritische Schubverzerrungsrate $\dot{\gamma}_{cr}$ an die Stelle der kritischen Schubverzerrung. Dies ist in Boisly et al. (2015; Abb. 2, 3; S. 15) anhand der Vorhersagen des rCROSS Modells erklärt, dessen kritische Schubverzerrungsrate $\dot{\gamma}_{c.1}$ beträgt.

3.8.2 Oszillatorische Scherung physikalisch großer Amplituden (LAOS)

Analytische Beschreibung von LAOS mittels FOURIER-Transformation

Ist die Amplitude der Schubverzerrung größer als die Linearitätsgrenze, so verhält sich eine Materialprobe nichtlinear. Infolgedessen kann das Materialverhalten nicht mehr durch einen Linearoperator beschrieben werden. Das nichtlineare Verhalten wird durch physikalisch große Amplituden hervorgerufen. In Anlehnung an die englische Bezeichnung, *large amplitude oscillatory shear*, wird dieser Bereich mit LAOS [118] abgekürzt. In diesem Zusammenhang bedeutet *groß*, dass sich ein Material aufgrund ausreichend großer Verzerrungen beziehungsweise Verzerrungsraten physikalisch nichtlinear verhält (Heymann et al. 2002; S. 94). Die Bezeichnung *große Amplituden* impliziert also physikalisch nichtlineares Materialverhalten, steht aber in keinem Zusammenhang mit der kinematischen Theorie großer Deformation aus Abschnitt 3.1. Ein LAOS Regime kann daher ohne Weiteres auch im Bereich geometrisch linearer Theorie auftreten. Im Rahmen dieser Arbeit wird die verzerrungsgesteuerte Anregung derart eingeschränkt, dass genau dieser Fall vorliegt. Aufgrund der verzerrungsgesteuerten Versuchsführung liegt im Rahmen dieser Arbeit LAOStrain vor. Im Gegensatz dazu besteht auch die Möglichkeit einer spannungsgesteuerten Lastführung, welche in der Literatur mit LAOStress [119] bezeichnet wird. In diesem Fall verhält sich ein Material aufgrund ausreichend großer Spannungsamplituden nichtlinear. Da im Rahmen dieser Arbeit ausschließlich verzerrungsgesteuerte Anregungen diskutiert werden, wird LAOS als Abkürzung für LAOStrain benutzt.

Im Fall von LAOS kann die stationäre Spannungsantwort bezüglich einer verzerrungsgesteuerten Anregung nach Gleichung (3.82) im Sinne der elastischen Interpretation zunächst rein formal mittels der

[115] (Dealy und Wissbrun 1990; S. 60), (Giacomin und Dealy 1993; S. 101), (Rohm und Kovac 1995; S. 320), (Steffe 1996; S. 320), (Hyun et al. 2002; S. 57), (Ewoldt 2006; S. 31), (Hyun et al. 2007; S. 1325), (Deshpande et al. 2010; S. 94), (Hyun et al. 2011; S. 1698)

[116] (Steffe 1996; S. 320), (Li et al. 2003; S. 282), (Celli et al. 2007; S. 1584), (Bhavsar et al. 2013; S. 855), (Lim und Ahn 2013; S. 648)

[117] (MacSporran und Spiers 1982; S. 186 f.), (Dealy und Wissbrun 1990; S. 60 ff.), (Giacomin und Dealy 1993; S. 101), (Nelson und Dealy 1993; S. 197 ff.), (Morrison 2001; S. 155), (Ewoldt 2006; S. 31)

[118] (Krieger und Niu 1973), (Tee und Dealy 1975), (Ferry 1980; S. 424), (Dealy und Wissbrun 1990; S. 219), (Nguyen und Boger 1992; S. 81), (Gamota et al. 1993; S. 920), (Giacomin und Dealy 1993; S. 104), (Debbaut und Burhin 2002), (Cho et al. 2005), (Ewoldt 2006; S. 19, 32), (Tiu et al. 2006; S. 658), (Hyun et al. 2007; S. 1325), (Ewoldt 2009; S. 43), (Carrier und Petekidis 2009), (Deshpande et al. 2010; S. 94), (Mezger 2010; S. 160), (Brader et al. 2010; S. 3), (Läuger und Stettin 2010; S. 909), (Rogers et al. 2011b; S. 436), (Laurati et al. 2011; S. 679), (Hyun et al. 2011; S. 1698, 1720), (Lim und Ahn 2013; S. 649)

[119] (Lion 2000b; S. 44, 49, 88), (Ewoldt et al. 2006), (Ewoldt 2009; S. 133), (Läuger und Stettin 2010), (DIN–Taschenbuch 398 2012; S. 39), (Dimitriou et al. 2013), (Ewoldt 2013)

FOURIER Reihe [120]

$$\tau_\infty(t) = \hat{\gamma} \sum_{k=1}^{\infty} \left[a_k(\omega, \hat{\gamma}) \sin(k\omega t) + b_k(\omega, \hat{\gamma}) \cos(k\omega t) \right] \tag{3.100}$$

dargestellt werden. Diese besitzt im Allgemeinen sowohl ungerade als auch gerade Harmonische [121]. Die FOURIER Koeffizienten, $a_k(\omega, \hat{\gamma})$ und $b_k(\omega, \hat{\gamma})$, sind Funktionen der Kreisfrequenz und der Schubverzerrungsamplitude. In Gleichung (3.100) wurde angenommen, dass der Mittelwert

$$\int_{\tilde{t}_0}^{\tilde{t}_0+T} \tau(t)\, dt = 0 \tag{3.101}$$

verschwindet (Gamota et al. 1993; S. 922). Unterstellt man der stationären Spannungsantwort weiterhin die Eigenschaft

$$\tau(\tilde{t}_0 + \Delta t) = -\tau\left(\tilde{t}_0 + \frac{T}{2} + \Delta t\right), \tag{3.102}$$

sodass entsprechend Abbildung 3.13 die erste Hälfte einer Periode dem Negativen der zweiten Hälfte einer Periode entspricht, ergeben sich die geraden Harmonischen zu Null. Dies wird bei Ewoldt (2009; S. 63)

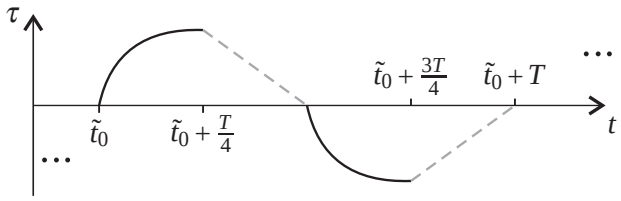


Abbildung 3.13: Signal beinhaltet keine geraden Höherharmonischen, da es Gleichung (3.102) erfüllt.

und Ewoldt et al. (2010; S. 199) gleichermaßen mit Punktsymmetrie der LISSAJOUS Diagramme erklärt, wonach sich diese gegenüber einer Drehung um 180° nicht verändern. Als Konsequenz tragen lediglich die ungeraden Harmonischen mit $k = 2n - 1$ für $n \in \mathbb{N}^+$ zur stationären Spannungsantwort bei [122]

$$\tau_\infty(t) = \hat{\gamma} \sum_{k}^{\infty} \left[a_k(\omega, \hat{\gamma}) \sin(k\omega t) + b_k(\omega, \hat{\gamma}) \cos(k\omega t) \right] \qquad k = \text{ungerade}\ . \tag{3.103}$$

Die stationäre Spannungsantwort kann alternativ dazu auch im Sinne der dissipativen Interpretation [123]

$$\tau_\infty(t) = \hat{\gamma}\omega \sum_{k}^{\infty} \left[c_k(\omega, \hat{\gamma}) \cos(k\omega t) + d_k(\omega, \hat{\gamma}) \sin(k\omega t) \right] \qquad k = \text{ungerade} \tag{3.104}$$

mit Bezug zu (Ewoldt 2013; S. 181)

$$\eta'(\omega, \hat{\gamma}) \equiv c_1(\omega, \hat{\gamma}) \tag{3.105}$$

$$\eta''(\omega, \hat{\gamma}) \equiv d_1(\omega, \hat{\gamma}) \tag{3.106}$$

$$c_k(\omega, \hat{\gamma}) = \frac{b_k(\omega, \hat{\gamma})}{\omega} \tag{3.107}$$

$$d_k(\omega, \hat{\gamma}) = \frac{a_k(\omega, \hat{\gamma})}{\omega} \tag{3.108}$$

[120] (Onogi et al. 1970; S. 282), (Ferry 1980; S. 424), (Nguyen und Boger 1992; S. 82), (Lion 1998; S. 900), (Lion 2000b; S. 87), (Papula 2001; S. 165), (Kardelky 2004; S. 107), (Lutz und Wendt 2005; S. 755), (Laun et al. 2009; S. 2), (Ewoldt 2009; S. 43), (Brader et al. 2010; S. 4), (Ng et al. 2011; S. 636)

[121] (Ganeriwala und Rotz 1987; S. 167), (Yu et al. 2009; S. 216), (Ewoldt 2009; S. 62, 128)

[122] (Onogi et al. 1970; S. 275, 279, 286), (Matsumoto et al. 1973; S. 51), (Harris 1977; S. 17), (Ferry 1980; S. 425), (Ganeriwala und Rotz 1987; S. 167, 170), (Dealy und Wissbrun 1990; S. 222), (Gamota et al. 1993; Abb. 1d), (Giacomin und Dealy 1993; S. 103), (Wilhelm et al. 1998; S. 400), (Wilhelm et al. 1999b; S. 755), (Kallus et al. 2001; S. 554), (Daniel et al. 2001), (Debbaut und Burhin 2002; S. 1166), (Li et al. 2003; S. 281), (Sim et al. 2003; S. 241), (Atalık und Keunings 2004; S. 109), (Ewoldt 2006; S. 33), (Jeyaseelan und Giacomin 2008; S. 26), (Ewoldt 2009; S. 60, 63), (Yu et al. 2009; S. 216), (Carrier und Petekidis 2009; S. 259), (Ewoldt et al. 2010; S. 194, 199), (Calin et al. 2010), (Hyun et al. 2011; S. 1723), (Rogers et al. 2011b; S. 456), (Rogers und Lettinga 2012; S. 3)

[123] (MacSporran und Spiers 1984; S. 92), (Dealy und Wissbrun 1990; S. 63), (Macosko 1994; S. 123), (Ewoldt et al. 2008a; S. 1428), (Yamaguchi 2008; S. 425), (Ewoldt 2009; S. 60), (Giacomin et al. 2011; S. 1082), (Melito et al. 2012; S. 4), (Ewoldt 2013; S. 181)

formuliert werden. Da Gleichung (3.102) ebenfalls für Flüssigkeiten mit Fließspannung erfüllt ist, kann man aufgrund der Existenz einer Fließspannung nicht zwangsläufig, wie teilweise angenommen [124], auf gerade Harmonische schließen. Beispielhaft ist dies für das PRANDTL Element in Boisly et al. (2014b) gezeigt. Ebenfalls haben Yu et al. (2009; S. 226) bereits darauf hingewiesen, dass die Fließspannung keine hinreichende Bedingung für das Auftreten gerader Harmonischer ist [125]. Inhaltlich gleichwertige Aussagen findet man auch bei Atalık und Keunings (2004; S. 107, 116), Ewoldt (2009; S. 169), Ewoldt et al. (2010; S. 199) und Hyun et al. (2011; S. 1723, Tabelle 1). Die Gleichungen (3.103) und (3.104) können auch in komplexer Schreibweise formuliert werden. Dies ist in Abschnitt A.4 ausgearbeitet und man erhält

$$\tau_\infty(t) = \hat{\gamma} \sum_k^\infty \left[\Im\left\{G_k^* e^{jk\omega t}\right\}\right] \qquad k = \text{ungerade} \tag{3.109}$$

$$\tau_\infty(t) = \hat{\gamma}\omega \sum_k^\infty \left[\Re\left\{\eta_k^* e^{jk\omega t}\right\}\right] \qquad k = \text{ungerade} \tag{3.110}$$

unter Beachtung von

$$G_k^* = a_k + j\,b_k \tag{3.111}$$

$$\eta_k^* = c_k - j\,d_k\ . \tag{3.112}$$

Die Berechnung des Speichermoduls

$$G'(\omega,\hat{\gamma}) \equiv a_1(\omega,\hat{\gamma}) \tag{3.113}$$

ergibt sich ausgehend von der Spannungsantwort $\tau(t)$ zu [126, 127]

$$G'(\omega,\hat{\gamma}) = \frac{2}{\hat{\gamma}T}\int_{\tilde{t}_0}^{\tilde{t}_0+T} \tau(t)\sin(\omega t)\,dt\ . \tag{3.114}$$

Die Berechnung des Verlustmoduls

$$G''(\omega,\hat{\gamma}) \equiv b_1(\omega,\hat{\gamma}) \tag{3.115}$$

erfolgt analog [127, 128]

$$G''(\omega,\hat{\gamma}) = \frac{2}{\hat{\gamma}T}\int_{\tilde{t}_0}^{\tilde{t}_0+T} \tau(t)\cos(\omega t)\,dt\ . \tag{3.116}$$

Bedenkt man weiterhin, dass Gleichung (3.102) ebenfalls von

$$\sin\left[\omega\left(\tilde{t}_0+\Delta t\right)\right] = -\sin\left[\omega\left(\tilde{t}_0+\frac{T}{2}+\Delta t\right)\right] \tag{3.117}$$

$$\cos\left[\omega\left(\tilde{t}_0+\Delta t\right)\right] = -\cos\left[\omega\left(\tilde{t}_0+\frac{T}{2}+\Delta t\right)\right] \tag{3.118}$$

[124] (Harris und Bogie 1967; S. 5), (MacSporran und Spiers 1984; S. 90), (Mas und Magnin 1997; S. 53), (Klein et al. 2007; S. 4253), (Yu et al. 2009; S. 225), (Hilliou et al. 2009; S. 2325)

[125] englisches Originalzitat: „the yield stress is not a sufficient condition to cause even harmonics“ (Yu et al. 2009; S. 226)

[126] (Lion 2000b; S. 87), (Debbaut und Burhin 2002; S. 1166), (Lutz und Wendt 2005; S. 756); unterschiedlich zu Laun et al. (2009; S. 4) und Brader et al. (2010; S. 4)

[127] Wird die Spannungsantwort $\tau(t)$ mit $\sin(\omega t)$ multipliziert und anschließend integriert $\int_{\tilde{t}_0}^{\tilde{t}_0+T} dt$ erhält man unter Berücksichtigung von Gleichung (3.100) zunächst $\int_{\tilde{t}_0}^{\tilde{t}_0+T} \tau(t)\sin(\omega t)\,dt = \hat{\gamma}\int_{\tilde{t}_0}^{\tilde{t}_0+T} G'(\omega,\hat{\gamma})\sin^2(\omega t)\,dt$. Mit $\int_{\tilde{t}_0}^{\tilde{t}_0+T} \sin^2(k\omega t)\,dt = \frac{T}{2}$ ergibt sich die Berechnungsvorschrift des Speichermoduls.

[128] Die Spannungsantwort $\tau(t)$ wird mit $\cos(\omega t)$ multipliziert, integriert $\int_{\tilde{t}_0}^{\tilde{t}_0+T} dt$ und mit Gleichung (3.100) sowie $\int_{\tilde{t}_0}^{\tilde{t}_0+T} \cos^2(k\omega t)\,dt = \frac{T}{2}$ ergibt sich die auch für LAOS gültige Definition des Verlustmoduls.

in der selben Art wie $\tau(t)$ erfüllt wird, so gehen die Definitionsgleichungen (3.114) und (3.116) für Speicher- und Verlustmodul über in [129]

$$G'(\omega,\hat{\gamma}) = \frac{4}{\hat{\gamma}T}\int_{\tilde{t}_0}^{\tilde{t}_0+\frac{T}{2}} \tau(t)\sin(\omega t)\,dt \tag{3.119}$$

$$G''(\omega,\hat{\gamma}) = \frac{4}{\hat{\gamma}T}\int_{\tilde{t}_0}^{\tilde{t}_0+\frac{T}{2}} \tau(t)\cos(\omega t)\,dt\ . \tag{3.120}$$

Diese beiden Gleichungen sind unter der Annahme von Gleichung (3.102) allgemeingültig und können auch für nichtlineares Materialverhalten angewendet werden. Die Berechung Höherharmonischer erfolgt völlig analog und man erhält

$$a_k(\omega,\hat{\gamma}) = \frac{2}{\hat{\gamma}T}\int_{\tilde{t}_0}^{\tilde{t}_0+T} \tau(t)\sin(k\omega t)\,dt = \frac{4}{\hat{\gamma}T}\int_{\tilde{t}_0}^{\tilde{t}_0+\frac{T}{2}} \tau(t)\sin(k\omega t)\,dt \qquad k = \text{ungerade} \tag{3.121}$$

$$b_k(\omega,\hat{\gamma}) = \frac{2}{\hat{\gamma}T}\int_{\tilde{t}_0}^{\tilde{t}_0+T} \tau(t)\cos(k\omega t)\,dt = \frac{4}{\hat{\gamma}T}\int_{\tilde{t}_0}^{\tilde{t}_0+\frac{T}{2}} \tau(t)\cos(k\omega t)\,dt \qquad k = \text{ungerade} \tag{3.122}$$

unter Beachtung von

$$\sin\left[k\omega(\tilde{t}_0+\Delta t)\right] = -\sin\left[k\omega\left(\tilde{t}_0+\frac{T}{2}+\Delta t\right)\right] \qquad k = \text{ungerade} \tag{3.123}$$

$$\cos\left[k\omega(\tilde{t}_0+\Delta t)\right] = -\cos\left[k\omega\left(\tilde{t}_0+\frac{T}{2}+\Delta t\right)\right] \qquad k = \text{ungerade}\ . \tag{3.124}$$

Vereinfachungen für *periodisch gerad-symmetrische* und *periodisch ungerad-symmetrische* Spannungsverläufe

Die Gleichungen (3.119) bis (3.122) sind allgemeingültige Definitionen zur Bestimmung des Speicher- und Verlustmoduls sowie Höherharmonischer, insofern die Spannungsantwort einen stationären Verlauf annimmt, der Gleichung (3.102) erfüllt. Hinsichtlich der Auswertung von LAOS für rein viskose und rein elastische Materialien, ist es zweckmäßig weitere Sonderfälle zu betrachten, für welche die Berechnungsvorschriften der harmonischen Materialfunktionen weiter vereinfacht werden können. Für rein elastische Materialien ist die Spannungsantwort in Phase mit der verzerrungsgesteuerten Anregung aus Gleichung (3.82). Sie kann durch eine *periodisch ungerad-symmetrische* Funktion $f_\mathrm{o}(t)$ mit den Eigenschaften

$$\text{ungerad-symmetrisch:} \qquad f_\mathrm{o}(t) = -f_\mathrm{o}(-t) \tag{3.125}$$

$$\text{periodisch:} \qquad f_\mathrm{o}(t) = f_\mathrm{o}(t+T) \qquad \forall t \tag{3.126}$$

beschrieben werden. Im Fall rein viskoser Materialien ist die Spannungsantwort infolge der sinusförmigen Schubverzerrung aus Gleichung (3.82) eine *periodisch gerad-symmetrische* Funktion $f_\mathrm{e}(t)$. Sie hat die Eigenschaften

$$\text{gerad-symmetrisch:} \qquad f_\mathrm{e}(t) = f_\mathrm{e}(-t) \tag{3.127}$$

$$\text{periodisch:} \qquad f_\mathrm{e}(t) = f_\mathrm{e}(t+T) \qquad \forall t\ . \tag{3.128}$$

Sowohl für rein elastische als auch rein viskose Materialien ist die Spannungsantwort unmittelbar nach Lastbeginn im stationären Zustand. Daher gilt für

$$\text{rein elastisches Material:} \qquad \tau_\infty = \tau|_{\gamma=\hat{\gamma}\sin(\omega t)} = \tau_\mathrm{o}(t) \tag{3.129}$$

und für

$$\text{rein viskoses Material:} \qquad \tau_\infty = \tau|_{\gamma=\hat{\gamma}\sin(\omega t)} = \tau_\mathrm{e}(t)\ . \tag{3.130}$$

[129] (Lion 2000b; S. 169); analog zu (Lutz und Wendt 2005; S. 757 ff.)

Weil die Sinusfunktion ungerade und die Kosinusfunktion gerade sind, ergeben sich die Vereinfachungen

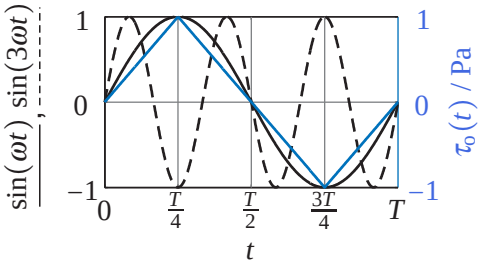
$$\int_0^T f_\mathrm{o}(t)\sin(k\omega t)dt = 4\int_0^{\frac{T}{4}} f_\mathrm{o}(t)\sin(k\omega t)dt \qquad k = \text{ungerade} \tag{3.131}$$

$$\int_0^T f_\mathrm{o}(t)\cos(k\omega t)dt = 0 \qquad k = \text{ungerade} \tag{3.132}$$

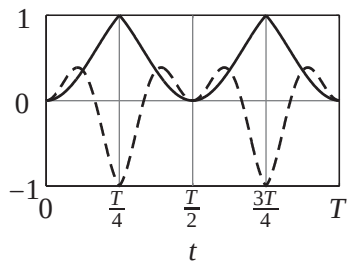
$$\int_0^T f_\mathrm{e}(t)\cos(k\omega t)dt = 4\int_0^{\frac{T}{4}} f_\mathrm{e}(t)\cos(k\omega t)dt \qquad k = \text{ungerade} \tag{3.133}$$

$$\int_0^T f_\mathrm{e}(t)\sin(k\omega t)dt = 0 \qquad k = \text{ungerade}\ . \tag{3.134}$$

Die inhaltliche Aussage der Gleichung (3.131) ist in Abbildung 3.14 grafisch dargestellt. Dazu werden



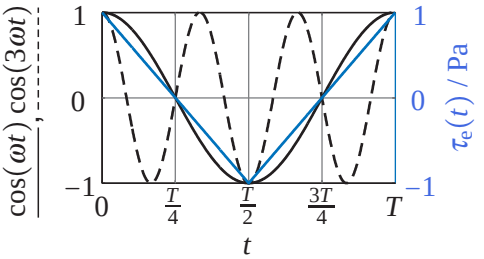
(a) Periodisch ungerad-symmetrische Spannungsantwort $\tau_\mathrm{o}(t)$: —— ; $\sin(\omega t)$: —— ; $\sin(3\omega t)$: – – –



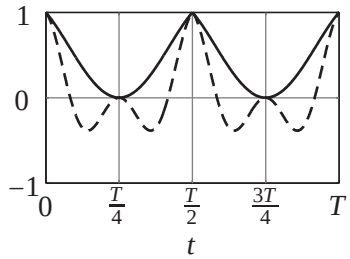
(b) Integranden von Gleichung (3.131); $\tau_\mathrm{o}(t)\sin(\omega t)$: —— ; $\tau_\mathrm{o}(t)\sin(3\omega t)$: – – –

Abbildung 3.14: Vereinfachungen zur Berechnung des Speichermoduls sowie Höherharmonische a_k im Falle von periodisch ungerad-symmetrischen Spannungsantworten $\tau_\mathrm{o}(t)$

exemplarisch der Sinus ($k = 1$): —— , der dritt-harmonische Sinus ($k = 3$): – – – sowie eine ungerade Dreiecksfunktion ausgewertet. Für Gleichung (3.133) ist dies in völlig analoger Weise in Abbildung 3.15 für den Kosinus ($k = 1$): —— und den dritt-harmonischen Kosinus ($k = 3$): – – – veranschaulicht. In beiden



(a) Periodisch gerad-symmetrische Spannungsantwort $\tau_\mathrm{e}(t)$: —— ; $\cos(\omega t)$: —— ; $\cos(3\omega t)$: – – –



(b) Integranden von Gleichung (3.133); $\tau_\mathrm{e}(t)\cos(\omega t)$: —— ; $\tau_\mathrm{e}(t)\cos(3\omega t)$: – – –

Abbildung 3.15: Vereinfachungen zur Berechnung des Verlustmoduls sowie Höherharmonische b_k im Falle von periodisch gerad-symmetrischen Spannungsantworten $\tau_\mathrm{e}(t)$

Fällen ist zu erkennen, dass das Integral über die erste Viertelperiode mit den Integralen über die zweite, dritte und vierte Viertelperiode identisch ist. Zur Berechnung der harmonischen Materialfunktionen für periodisch ungerad-harmonische sowie periodisch gerad-harmonische Spannungsantworten genügt es daher, ausschließlich die erste Viertelperiode auszuwerten. Man erhält die Definitionsgleichungen der harmoni-

schen Materialfunktionen für die beiden Sonderfälle rein elastischer und rein viskoser Materialien [130]

$$\tau(t)\ldots\text{periodisch ungerad-symmetrisch:}\quad a_k(\omega,\hat{\gamma}) = \frac{8}{\hat{\gamma}T}\int_0^{\frac{T}{4}} \tau(t)\sin(k\omega t)\,dt \qquad k = \text{ungerade} \tag{3.135}$$

$$b_k(\omega,\hat{\gamma}) = 0 \tag{3.136}$$

$$\tau(t)\ldots\text{periodisch gerad-symmetrisch:}\quad b_k(\omega,\hat{\gamma}) = \frac{8}{\hat{\gamma}T}\int_0^{\frac{T}{4}} \tau(t)\cos(k\omega t)\,dt \qquad k = \text{ungerade} \tag{3.137}$$

$$a_k(\omega,\hat{\gamma}) = 0\,. \tag{3.138}$$

Daraus ergeben sich der Speicher- und Verlustmodul entsprechend Gleichungen (3.113) und (3.115) für $k = 1$.

Abschätzung der notwendigen Anzahl Höherharmonischer zur Abbildung der Spannungsantwort

Um abzuschätzen wie viele Höherharmonische zur Approximation der Spannungsantwort eines nichtlinearen Materialverhaltens einbezogen werden müssen, sei zunächst die *Intensität der k-ten Harmonischen* [131]

$$I_k(\omega,\hat{\gamma}) = \sqrt{a_k^2(\omega,\hat{\gamma}) + b_k^2(\omega,\hat{\gamma})} \tag{3.139}$$

eingeführt. Sie ergibt sich aus der Transformation von Gleichung (3.103) in eine *Amplituden-Phasen Beschreibung* [132]

$$\tau_{\tilde{\infty}}(t) = \hat{\gamma}\sum_k^{\infty} I_k \sin(k\omega t + \phi_k) \;\approx\; \hat{\gamma}\sum_k^{n} I_k \sin(k\omega t + \phi_k) \qquad k = \text{ungerade} \tag{3.140}$$

$$\tau_{\tilde{\infty}}(t) = \hat{\gamma}\sum_k^{\infty} I_k \cos\left(k\omega t - \tilde{\phi}_k\right) \;\approx\; \hat{\gamma}\sum_k^{n} I_k \cos\left(k\omega t - \tilde{\phi}_k\right) \qquad k = \text{ungerade}\,. \tag{3.141}$$

Der Parameter n gibt die notwendige Anzahl zu berücksichtigender Höherharmonischer an, um die Spannungsantwort mit befriedigender Güte approximieren zu können. Der Phasenwinkel ϕ_k kann über den Verlustfaktor [133]

$$\phi_k = \arctan\left(\frac{b_k}{a_k}\right) \tag{3.142}$$

berechnet werden. Analoges gilt für den Phasenwinkel $\tilde{\phi}_k$, der sich aus [134]

$$\tilde{\phi}_k = \arctan\left(\frac{a_k}{b_k}\right) \tag{3.143}$$

ergibt. Es gilt für

$$\text{rein elastisches Material:}\qquad \phi_k = 0 \;\rightarrow\; b_k = 0\,, \tag{3.144}$$

$$\text{rein viskoses Material:}\qquad \tilde{\phi}_k = 0 \;\rightarrow\; a_k = 0\,. \tag{3.145}$$

Mithilfe der normierten Intensitäten $\frac{I_k}{I_1}(\omega,\hat{\gamma})$ kann der Parameter n aus Gleichung (3.140) bestimmt werden, sodass $\tau(t)$ mit ausreichender Güte approximiert ist. Deshalb werden in dieser Arbeit für ein rheologisches Element neben a_k und b_k zusätzlich die normierten Höherharmonischen dargestellt. Die Amplituden-Phasen Beschreibung nach Gleichungen (3.140) und (3.142) kann mit

$$\hat{\tau}_k = \hat{\gamma} I_k \tag{3.146}$$

[130] Die Definitionen können analog zu Lutz und Wendt (2005; S. 761 ff.) abgeleitet werden.

[131] (Wilhelm et al. 1998; S. 404), (Wilhelm et al. 1999a; S. 349), (Debbaut und Burhin 2002; S. 1166), (Hyun et al. 2003; S. 103), (Neidhöfer et al. 2003; S. 1353), (Brader et al. 2010; S. 4), (Reinheimer et al. 2011; S. 820), (Rogers und Lettinga 2012; S. 3), (Reinheimer et al. 2012; S. 204)

[132] (Brummer 2006; S. 47), (Yamaguchi 2008; S. 424)

[133] (Wazer et al. 1963; S. 344), (Pipkin 1972; S. 18), (Ferry 1980; S. 46), (Barnes et al. 1989; S. 49), (Dealy und Wissbrun 1990; Gl. (2-61)/Gl. (2-62)), (Macosko 1994; S. 122), (Steffe 1996; S. 316), (Larson 1999; S. 13), (Barnes 2000; S. 89), (Brummer 2006; S. 48), (Pal 2007; S. 308), (Rao 2007; S. 106), (Oswald 2009; S. 345, 347), (Tadros 2010; S. 76, 153)

[134] (Kories und Schmidt-Walter 2004; S. 269), (Balke 2011; S. 108)

in [135]

$$\tau_{\infty}(t) = \sum_{k}^{\infty} \hat{\tau}_k \sin(k\omega t + \phi_k) \qquad k = \text{ungerade} \tag{3.147}$$

umgeschrieben werden. Unter Beachtung des Additionstheorems

$$\sin(k\omega t)\cos(\phi_k) + \cos(k\omega t)\sin(\phi_k) = \sin(k\omega t + \phi_k) \tag{3.148}$$

erhält man analog zu Gleichung (3.99) die Beziehungen [136]

$$a_k = \frac{\hat{\tau}_k}{\hat{\gamma}} \cos(\phi_k) \tag{3.149}$$

$$b_k = \frac{\hat{\tau}_k}{\hat{\gamma}} \sin(\phi_k)\ . \tag{3.150}$$

Überlegungen zu numerischen Berechnungen im LAOS Regime

Die analytischen Berechnungsvorschriften der oben definierten harmonischen Materialfunktionen setzen voraus, dass sowohl die Spannungsantwort $\tau(t)$ als auch der Integrationsbeginn $\tilde{t}_0$ analytisch beschreibbar sind. Es gibt jedoch nichtlineare Materialien deren konstitutive Beziehungen nicht analytisch gelöst werden können. Infolgedessen liegen Spannungsantworten ausschließlich in numerisch gelöster Form vor. Folglich ist der Integrationsbeginn $\tilde{t}_0$ ebenfalls nicht in analytischer Form gegeben. Daher müssen auch Speicher- und Verlustmodul sowie Höherharmonische numerisch bestimmt werden. Dazu werden Gleichungen (3.121) und (3.122) für $i = 1 \ldots n$ mit $n \in \mathbb{N}$ Periode solange numerisch integriert, bis die relativen Abweichungen aufeinander folgender Berechnungsergebnisse

$$\left| \frac{a_k|_{i\cdot T}^{(i+1)\cdot T} - a_k|_{(i-1)\cdot T}^{i\cdot T}}{a_k|_{i\cdot T}^{(i+1)\cdot T}} \right| \overset{!}{\leq} \kappa_1 \qquad k = \text{ungerade} \tag{3.151}$$

$$\left| \frac{b_k|_{i\cdot T}^{(i+1)\cdot T} - b_k|_{(i-1)\cdot T}^{i\cdot T}}{b_k|_{i\cdot T}^{(i+1)\cdot T}} \right| \overset{!}{\leq} \kappa_1 \qquad k = \text{ungerade} \tag{3.152}$$

kleiner oder gleich dem Abbruchkriterium κ_1 sind. Hierbei steht $|_{\{\}}^{[\,]}$ für die untere $\{\}$ und obere $[\,]$ Integrationsgrenze der Integrale aus Gleichungen (3.121) und (3.122). In dieser Arbeit gilt $\kappa_1 = 0.05$.

Betrachtungen hinsichtlich der experimentellen Messung von Speicher- und Verlustmodul sowie Höherharmonischen

Weil sich die stationäre Spannungsantwort für beliebige Materialien nicht augenblicklich nach dem Aufbringen einer Last einstellt [137], gibt es einen Parameter $\tilde{t}_0$ ab dem die Spannungsantwort stationär ist. Daher hängen experimentell bestimmte Werte für Speicher- und Verlustmodul sowie Höherharmonische von der Beobachtungsdauer ab.
Zur Bestimmung der Amplitudenabhängigkeit harmonischer Materialfunktionen wird ein *Amplitudensweep* durchgeführt. Bei konstanter Kreisfrequenz werden die Amplituden variiert. Dazu wird die Prüfvorschrift nach Abbildung 3.10 angewendet, wobei die Schubverzerrungsrate $\dot{\hat{\gamma}}^i$ durch $\hat{\gamma}^i$ zu ersetzen ist. Der mathematische Spaltenvektor der Schubverzerrungsamplitude ist mit $\underline{\hat{\gamma}} = \left(\hat{\gamma}^1, \ldots, \hat{\gamma}^i, \hat{\gamma}^{i+1}, \ldots, \hat{\gamma}^n\right)^{\mathrm{T}}$ gegeben. Die Spannungsantwort und damit auch das Messsignal für Speicher- und Verlustmodul, $G'_{\mathrm{meas}}(t)$

[135] (Dealy und Wissbrun 1990; S. 60), (Macosko 1994; S. 121), (Steffe 1996; S. 314), (Pal 2007; S. 306), (Rao 2007; S. 106), (Deshpande et al. 2010; S. 88), (Balke 2011; S. 108)

[136] (Wazer et al. 1963; S. 343), (Dealy und Wissbrun 1990; indirekt über Gl.(2-61), (2-62)), (Giacomin und Dealy 1993; S. 101), (Steffe 1996; S. 315), (Rao 2007; S. 106), (Tadros 2010; S. 153)

[137] (Yoshimura und Prud'homme 1987; S. 430), (Giacomin und Dealy 1993; S. 102 ff.), (Macosko 1994; S. 121), (Leblanc 2003; Abb. 5)

und $G''_{\text{meas}}(t)$, hängen von der Messzeit Δt pro Verzerrungsniveau ab. Die diskreten Messwerte für Speicher- und Verlustmodul, die den einzelnen Verzerrungsniveaus zugeordnet sind,

$$G'^{i}_{\text{meas}}\left(\hat{\gamma}^i, t\right) = \lim_{t \to i\cdot\Delta t} G'_{\text{meas}}(t)\big|_{\underline{\hat{\gamma}}=\text{konst},\,\omega=\text{konst}} \tag{3.153}$$

$$G''^{i}_{\text{meas}}\left(\hat{\gamma}^i, t\right) = \lim_{t \to i\cdot\Delta t} G''_{\text{meas}}(t)\big|_{\underline{\hat{\gamma}}=\text{konst},\,\omega=\text{konst}} \tag{3.154}$$

werden zu Vektoren $\underline{G}'_{\text{meas}}\left(\underline{\hat{\gamma}}\right)$ und $\underline{G}''_{\text{meas}}\left(\underline{\hat{\gamma}}\right)$ zusammengefasst. In analoger Weise wird ein *Frequenzsweep* bei konstant gehaltener Amplitude durchgeführt, um die Frequenzabhängigkeit der harmonischen Materialfunktionen zu messen. Dies erfolgt ebenfalls entsprechend der Prüfvorschrift nach Abbildung 3.10, wobei die Schubverzerrungrate $\dot{\hat{\gamma}}^i$ rein formal durch ω^i ersetzt wird. Damit ist der mathematische Spaltenvektor der Frequenzen $\underline{\omega} = \left(\omega^1, \ldots, \omega^i, \omega^{i+1}, \ldots, \omega^n\right)^{\mathrm{T}}$ definiert. Für jede dieser $i = 1 \ldots n$ Komponenten ergibt sich ein diskreter Wert für Speicher- und Verlustmodul

$$G'^{i}_{\text{meas}}\left(\omega^i, t\right) = \lim_{t \to i\cdot\Delta t} G'_{\text{meas}}(t)\big|_{\underline{\omega}=\text{konst},\,\hat{\gamma}=\text{konst}} \tag{3.155}$$

$$G''^{i}_{\text{meas}}\left(\omega^i, t\right) = \lim_{t \to i\cdot\Delta t} G''_{\text{meas}}(t)\big|_{\underline{\omega}=\text{konst},\,\hat{\gamma}=\text{konst}}\,. \tag{3.156}$$

Die Gesamtheit aller diskreten Messwerte werden in den mathematischen Vektoren $\underline{G}'_{\text{meas}}(\underline{\omega})$ und $\underline{G}''_{\text{meas}}(\underline{\omega})$ zusammengefasst. Damit die diskreten Messwerte den stationären Zustand beschreiben, muss die Messzeit Δt pro Verzerrungs- und Frequenzniveau „ausreichend groß“ gewählt sein. Erst dann gilt $G'^{i}_{\text{meas}}\left(\hat{\gamma}^i\right) \approx G'\left(\hat{\gamma}^i, \omega\right)$, $G''^{i}_{\text{meas}}\left(\hat{\gamma}^i\right) \approx G''\left(\hat{\gamma}^i, \omega\right)$, $G'^{i}_{\text{meas}}\left(\omega^i\right) \approx G'\left(\hat{\gamma}, \omega^i\right)$ und $G''^{i}_{\text{meas}}\left(\omega^i\right) \approx G''\left(\hat{\gamma}, \omega^i\right)$. Analoges gilt für Höherharmonische a_k und b_k. Ent- und verfestigendes Materialverhalten sowie Thixotropie- und Schädigungseffekte sind bei dieser Überlegung nicht berücksichtigt.

3.8.3 Visualisierung des rheologischen Fingerabdrucks mittels LISSAJOUS Diagrammen im PIPKIN Raum

Neben der Auswertung von harmonischen Materialfunktionen, wie Speicher- und Verlustmodul sowie Höherharmonischen, existieren auch andere Möglichkeiten das LAOS Verhalten von nichtlinearen Materialien zu untersuchen. Eine Möglichkeit bietet die Auswertung von normierten LISSAJOUS Diagrammen [138] die auch als LISSAJOUS-BOWDITCH Diagramme [139] bezeichnet werden (Tee und Dealy 1975). Die systematische Untersuchung der LISSAJOUS Diagramme erfolgt im PIPKIN Raum in Abhängigkeit der Kreisfrequenz und Lastamplitude. Daher nennt man die übersichtliche Anordnung repräsentativer LISSAJOUS Diagramme entlang der Frequenz- und Amplitudenachse auch PIPKIN Diagramm. Die Gesamtheit aller in einem PIPKIN Diagramm angeordneten LISSAJOUS Diagramme ist charakteristisch für ein spezielles Material beziehungsweise Materialmodell. Das PIPKIN Diagramm bietet somit eine Möglichkeit, den *rheologischen Fingerabdruck* [140] darzustellen.

LISSAJOUS Diagramme

Die normierten LISSAJOUS Diagramme stellen den stationären Spannungsverlauf (Ewoldt et al. 2008b; S. 1) für eine sinusförmige verzerrungsgesteuerte Anregung in der normierter Form $\frac{\tau_\infty(t)}{\text{MAX}\{\tau_\infty(t)\}}$ dar. Die normierte Spannungsantwort wird im ersten LISSAJOUS Diagramm über der normierten Schubverzerrung $\frac{\gamma(t)}{\text{MAX}\{\gamma(t)\}}$ aufgetragen. Im zweiten LISSAJOUS Diagramm wird sie in Bezug zur normierten Schubverzerrungsrate $\frac{\dot{\gamma}(t)}{\text{MAX}\{\dot{\gamma}(t)\}}$ gesetzt.
Für rein elastisches Materialverhalten ist das erste LISSAJOUS Diagramm eine offene Linie (Maxey et al.

[138] (Lissajous 1857; S. 161, Pl.II), (Philippoff 1966), (Tschoegl 1989; S. 61), (Pahl et al. 1995; S. 124), (Ewoldt 2006; S. 34, 67), (Tiu et al. 2006; S. 654), (Deshmukh 2007; S. 73), (Le Grand und Petekidis 2008; Abb. 10, 11), (Brader et al. 2010; S. 4), (Mezger 2010; S. 159), (Läuger und Stettin 2010; Abb. 7, 8), (Rogers et al. 2011b; S. 436)

[139] (Ewoldt et al. 2008a; S. 1435), (Ewoldt 2009; S. 44, 61), (Ewoldt et al. 2010; S. 192), (Rogers et al. 2011b), (Rogers et al. 2011a; S. 734), (Ng et al. 2011; S. 629)

[140] (Ewoldt 2006; S. 34), (Ewoldt et al. 2007a; S. 634), (Ewoldt 2009; S. 59), (Ewoldt et al. 2010; S. 191, 209); Aus der persönlichen Korrespondenz mit EWOLDT vom 18.09.2014; Randy H. Ewoldt schrieb: „I'm of the opinion that there are many 'fingers' to fingerprint in rheology. One of these is the LAOS fingerprint, which has various representations. One of them is certainly the raw oscillatory waveforms plotted as Lissajous curves, positioned as a grid within a Pipkin Space.“

2008; S. 3), da die Spannung in Phase mit der Schubverzerrung ist. Das LISSAJOUS Diagramm ist eine ungerade Funktion und erfüllt $y(x) = -y(-x)$. Das zweite LISSAJOUS Diagramm ist eine geschlossene Kurve, welche sowohl zur x als auch zur y-Achse symmetrisch ist. Dies ist dadurch begründet, dass die Spannung um 90° phasenverschoben zur Schubverzerrungsrate ist. Im Sonderfall von linear elastischem Verhalten (HOOKEsches Material) ist das erste LISSAJOUS Diagramm eine Gerade, das Zweite ist ein Kreis. Für nichtlinear elastisches Material ist das erste LISSAJOUS Diagramm eine gekrümmte Kurve. Das zweite LISSAJOUS Diagramm besitzt zwar noch die erwähnte Symmetrieeigenschaft, ist aber nicht mehr kreisförmig. Dies ist bei Ewoldt (2006; S. 37) bildlich dargestellt.
Für rein viskoses Materialverhalten verhält es sich invers, da die Spannung 90° phasenverschoben zur Schubverzerrung und in Phase mit der Schubverzerrungsrate ist. Das erste LISSAJOUS Diagramm ist für linear viskoses Verhalten (NEWTONsches Material) ein Kreis, der Zweite ist eine Gerade. Für nichtlinear viskoses Material ist das erste LISSAJOUS Diagramm nicht mehr kreisförmig, besitzt aber nach wie vor die Symmetrieeigenschaften $y(x) = y(-x)$ und $x(y) = x(-y)$. Das zweite LISSAJOUS Diagramm eines nichtlinear viskosen Materials ist eine offene, gekrümmte Kurve. Dies ist am Beispiel des rCROSS Modells bei Boisly et al. (2015; Abb. 7) und für ein Fließgesetz nach OSTWAND und de WAELE (Potenzansatz) in Ewoldt (2006; S. 36) gezeigt.
Im Falle von linear viskoelastischem (LVE) Materialverhalten sind beide LISSAJOUS Diagramme *elliptisch* [141]. Die Spannung ist weder mit der Schubverzerrung noch mit der Schubverzerrungsrate in Phase. Aus elliptischen Hysteresekurven kann man folglich schließen, dass das FOURIER Spektrum ausschließlich aus frequenzabhängigen Speicher- und Verlustmoduli besteht (Gamota et al. 1993; S. 927, Abb. 2b). Die elliptische Form der LISSAJOUS Diagramme ist explizit in Tschoegl (1989; Gl. (9.3-8)), Jeyaseelan und Giacomin (1993; Gl. (19)), Haupt (2002; S. 217), Kardelky (2004; S. 77), Jeyaseelan und Giacomin (2008; Gl. (14)) und Ng et al. (2011; Gl. (14)) hergeleitet. Charakteristische Parameter des ersten LISSAJOUS Diagramms sind bei Markert (2006; Abb. 2.26) angegeben. Die Hauptachsen der Ellipsen beider LISSAJOUS Diagramme sind jeweils durch $\frac{\tau_\infty(t)}{\mathrm{MAX}\{\tau_\infty(t)\}} = \frac{\gamma(t)}{\mathrm{MAX}\{\gamma(t)\}}$ und $\frac{\tau_\infty(t)}{\mathrm{MAX}\{\tau_\infty(t)\}} = \frac{\dot{\gamma}(t)}{\mathrm{MAX}\{\dot{\gamma}(t)\}}$ definiert. Sobald die Belastungen ausreichend groß sind, sodass der LVE Bereich verlassen wird und LAOS vorliegt, werden die LISSAJOUS Diagramme nicht-elliptisch [142].
Abweichungen von der elliptischen Gestalt der LISSAJOUS Diagramme können durch nichtlinear viskoelastisches, plastisches oder viskoplastisches Verhalten ausgelöst werden. Dies ist in Boisly et al. (2015; Abb. 20, 21) speziell für das nichtlinear viskoelastische rCROSS-MAXWELL Element gezeigt. Die nicht-elliptischen LISSAJOUS Diagramme eines ideal plastischen Materialmodells sind am Beispiel des PRANDTL Elements in Boisly et al. (2014b; Abb. 7, 8) dargestellt. Starr ideal plastisches Verhalten ergibt sich für das Reibelement und ist bei Maxey et al. (2008; Abb. 1) aufgeführt. Bei Boisly et al. (2017) ist anhand des BINGHAM-HOOKE Elements die Nicht-Elliptizität der LISSAJOUS Diagramme für viskoplastisches Materialverhalten gezeigt. Die LISSAJOUS Diagramme des BINGHAM Elements, welches nach HAUPT ebenfalls viskoplastisches Verhalten zeigt, sind bei Maxey et al. (2008; Abb. 1) ausgearbeitet.

PIPKIN Diagramme

Die übersichtliche Anordnung ausgewählter LISSAJOUS Diagramme für fest vorgegebene Frequenzen und Amplituden wird als PIPKIN Diagramm bezeichnet. Im originalen Diagramm von Pipkin (1972; S. 133) sind die Amplitude $\hat{\gamma}$ auf der Ordinate und die dimensionslose Frequenz $\omega\alpha$, das Produkt aus Kreisfrequenz ω und Relaxationszeit α, auf der Abszisse aufgetragen. Dealy und Wissbrun (1990; S. 221), Giacomin und Dealy (1993; S. 117) und Deshpande et al. (2010; S. 96) führen das Diagramm in Abhängigkeit von $\hat{\gamma}\omega$ über ω ein, während Yosick et al. (1997; Abb. 16) das PIPKIN Diagramm als Graph

[141] (Tschoegl 1989; S. 472), (Giacomin und Oakley 1992; S. 1533), (Jeyaseelan und Giacomin 1993; S. 271), (Yosick und Giacomin 1996; S. 196), (Yziquel et al. 1999b; S. 16), (Markert 2006; Abb. 2.22), (Ewoldt et al. 2007a; S. 639), (Ewoldt et al. 2007b; S. 5), (Ewoldt et al. 2008a; S. 1429), (Ewoldt et al. 2008b; S. 3), (Jeyaseelan und Giacomin 2008; S. 26), (Ewoldt et al. 2009; S. 46), (Calin et al. 2010; S. 1568), (Ewoldt et al. 2010; S. 192), (Läuger und Stettin 2010; S. 910 ff.), (Ng et al. 2011; S. 627, 636)

[142] (Tee und Dealy 1975; S. 595), (Tsang und Dealy 1981; S. 217), (Giacomin und Oakley 1992; S. 1533), (Jeyaseelan und Giacomin 1993; S. 271), (Jeyaseelan und Giacomin 1993; S. 848), (Yosick und Giacomin 1996; S. 196), (Yziquel et al. 1999b; S. 16), (Wilhelm 2002; S. 86), (Ewoldt 2006; S. 34), (Ewoldt et al. 2007a; S. 639), (Ewoldt et al. 2007b; S. 5), (Jeyaseelan und Giacomin 2008; S. 26), (Ewoldt et al. 2008a; S. 1430), (Ewoldt et al. 2009; S. 45), (Ewoldt 2009; S. 63), (Ewoldt et al. 2010; S. 192), (Calin et al. 2010; S. 1568), (Läuger und Stettin 2010; S. 911), (Ng et al. 2011; S. 637)

von $\hat{\gamma}\omega\alpha$ über $\omega\alpha$ präsentiert. Im Rahmen dieser Arbeit wird jedoch die Darstellung von EWOLDT [143] bevorzugt, da die LISSAJOUS Diagramme über die eigentlichen Lastparameter der sinusförmigen Anregung nach Gleichung (3.82), ω und $\hat{\gamma}$, aufgetragen werden.
Da das PIPKIN Diagramm für ein Material beziehungsweise Materialmodell die volle Bandbreite existierender LISSAJOUS Diagramme darstellt, ist es eine geeignete Darstellungsform, um den rheologischen Fingerabdruck zu visualisieren. Einzelne LISSAJOUS Diagramme sind für komplexere Materialien beziehungsweise Materialmodelle kein geeignetes Mittel, um das rheologische Verhalten zu untersuchen. Beispielsweise können einzelne LISSAJOUS Diagramme des rCROSS-MAXWELL Elements (Boisly et al. 2015; Abb. 20, 21) nahezu identisch mit denen eines BINGHAM-HOOKE Elements (Boisly et al. 2017) sein. Daher gibt allein das „vollständige“ im PIPKIN Raum dargestellte Spektrum aller charakteristischer LISSAJOUS Diagramme Aufschluss über das Verhalten einer Materialprobe beziehungsweise eines Materialmodells. (*Folgerung 14*)
Zusätzlich dazu eignet sich das PIPKIN Diagramm zur Untersuchung der Ratenabhängigkeit. Für ratenabhängiges Materialverhalten hängt die Gestalt der LISSAJOUS Diagramme von der Kreisfrequenz ab, für ratenunabhängiges Materialverhalten hingegen nicht. Kann auf diesem Wege experimentell nachgewiesen werden, dass ratenabhängige Effekte in guter Näherung zu vernachlässigen sind, so kann das dem Material zugrunde liegende Materialverhalten entweder elastisch oder plastisch sein. Die von der Kreisfrequenz unabhängige Gestalt der LISSAJOUS Diagramme, kann für plastisches Materialverhalten exemplarisch anhand des PRANDTL Elements in Boisly et al. (2014b; Abb. 8) nachvollzogen werden. Wenn zudem das erste LISSAJOUS Diagramm eine offene Linie ist, muss das Materialverhalten elastisch sein. Damit ist gezeigt, dass man dem PIPKIN Diagramm wesentliche Informationen hinsichtlich der Materialmodellierung entnehmen kann.

[143] (Ewoldt 2006; S. 32), (Ewoldt et al. 2007b; S. 6), (Ewoldt et al. 2008a; S. 1428), (Ewoldt 2009; S. 42, 59), (Deshpande et al. 2010; S. 96)

4. Phänomenologische Klassifizierung von Stoffen in Festkörper, Flüssigkeiten und Materialien mit fest-flüssig Übergang

Walters (1980; S. 4) stellte bereits sinngemäß fest, dass man zumeist selbstverständlich über die beiden klassischen Stoffklassen der Flüssigkeiten und Festkörper redet, ohne die Begriffe je definiert zu haben. Dem Gesprächspartner unterstellt man stillschweigend, dass er vergleichbare Eigenschaften mit den Begriffen assoziiert. Würde man jedoch konkret nachfragen, stünden eine Vielzahl von Antworten im Raum [1]. Heutzutage ist eine klare Begriffsdefinition nach wie vor von wesentlicher Bedeutung. Grund dafür ist, dass Vertreter von *Soft Matter*, die sich nicht mehr ohne Weiteres in die klassischen Stoffklassen einordnen lassen, Gegenstand aktueller Forschungsvorhaben sind. Daher wird in diesem Abschnitt eine Klassifikation von Materialien in die drei Stoffklassen

- Festkörper,
- Flüssigkeit und
- Material mit fest-flüssig Übergang

vorgenommen. Die Klassifikation erfolgt auf Basis zweier Klassifizierungskriterien,

- der Gleichgewichtsrelation und
- der Fließkurve.

Materialien mit fest-flüssig Übergang lassen sich weiter in

- *Flüssigkeiten mit Fließspannung* und
- *Flüssigkeiten mit pseudo Fließspannung*

unterteilten. In Vorbereitung dessen, sind grundlegende Betrachtungen zur Gleichgewichtsrelation bereits in den Abschnitten 3.3 und 3.4 erbracht. Mithilfe der Klassifizierung wird man unter Berücksichtigung von Arbeitshypothesen in die Lage versetzt, sowohl die Stoffklasse eines Materialmodell theoretisch berechnen als auch die Stoffklasse einer Materialprobe experimentell bestimmen zu können. Für eindimensionale rheologische Elemente steht somit ein klar definierter Formalismus zur Stoffklassifizierung zur Verfügung. Es ist jedoch ratsam diesen Formalismus in Zukunft für weitere Materialphänomene, wie beispielsweise Thixotropie und Schädigung, die im Rahmen dieser Arbeit nicht berücksichtigt werden konnten, zu überprüfen und gegebenenfalls anzupassen.

4.1 Viskoses und plastisches Fließen

Weil bestehende Definitionen der Begriffe *Festkörper* und *Flüssigkeit* teilweise mit der Vokabel *Fließen* verknüpft sind, wird diese zunächst eingeführt. Fließen hat genau dann für ein Material stattgefunden, wenn eine bleibende Verformung infolge einer Belastung und anschließender Entlastung nach „hinreichend

[1] englisches Originalzitat: „So far, we have discussed *solids* and *liquids* without defining what we mean by these terms. Often, it is taken for granted that when we talk or write about a solid or a liquid, the hearer of reader knows exactly what we mean. If we asked the layman for definitions, we would get a variety of answers [...].“ (Walters 1980; S. 4)

langer“ Beobachtungszeit festgestellt wird (Hackley und Ferraris 2001; S. 30). Unter Entlastung versteht man hierbei die Regelung aufgeprägter Lasten derart, dass die resultierenden äußeren Kräfte und Momente verschwinden. Wichtig für das Feststellen von Fließen ist die Realisierung einer „hinreichend langen“ Beobachtungszeit nach Entnahme der äußeren Lasten. Beispielsweise können viskoelastische Festkörper eine scheinbar bleibende Verformung aufweisen, die sich bei zu geringer Beobachtungszeit noch nicht vollständig zurückgebildet hat. Ein derartiges Verhalten kann zum Beispiel mithilfe einer Parallelschaltung von HOOKEscher Feder und MAXWELL Element nachvollzogen werden.
Die Forderung einer „ausreichend langen“ Haltezeit stellt einen Experimentator aufgrund des endlichen experimentellen Fensters vor diejenigen Probleme, welche in Abschnitt 3.3 bei der Messung der Gleichgewichtsrelation diskutiert wurden. Infolgedessen können Abweichungen zwischen theoretisch existierenden und experimentell ermittelten Ergebnissen auftreten. Dies wird ebenfalls von Lemaitre und Chaboche (1994; S. 100) bestätigt. Sie weisen darauf hin, dass es nicht einfach ist, in einer endlichen Zeit zwischen unendlich langsamen Fließen und dem Erreichen eines Gleichgewichts zu unterscheiden [2].
Der Prozess des Fließens kann in zwei Phänomene unterteilt werden, viskoses Fließen und plastisches Fließen. *Viskoses Fließen* kann für viskoelastische Materialien ohne Gleichgewichtsrelation beobachtet werden, beispielsweise für einen rCROSS Dämpfer oder ein rCROSS-MAXWELL Element (Boisly et al. 2015). Es wird in der Literatur [3] dem Deformationsverhalten von Flüssigkeiten zugesprochen [4]. Viskoses Fließen beschreibt ratenabhängiges Fließverhalten (Haupt 1991; S. T55).
Bei reinem *plastischen Fließen* [5] ist das Fließverhalten ratenunabhängig [6]. Es tritt zum Beispiel für das Reibelement (Boisly et al. 2014a), das PRANDTL Element (Boisly et al. 2014b) oder für das endochrone MAXWELL Element in Abschnitt 6 auf. Rein plastisches Fließen kann mithilfe klassischer kontinuumsmechanischer Materialtheorien auf Basis einer Fließfunktion und Fließbedingung (Haupt 2002; S. 227, 231) beschrieben werden. Im Falle endochroner Plastizität, für welche die Definition einer Fließfunktion und Fließbedingung nicht erforderlich ist, tritt plastisches Fließen auf, sobald eine äußere Last aufgeprägt wird. Fließen, das auf phänomenologischer Ebene sowohl viskose als auch plastische Prozesse beinhaltet, kann im Allgemeinen für Parallelschaltungen von viskoelastischen und plastischen rheologischen Modellen beobachten werden. Beispiele hierfür sind das BINGHAM Element [7], das BINGHAM-HOOKE Element (Boisly et al. 2017) und das rCROSS-BINGHAM-HOOKE Element aus Abschnitt 5.

4.2 Bestehende Ansätze zur Klassifikation von Materialien in Festkörper und Flüssigkeiten

Wie Barnes (1999; S. 141) bereits erwähnte, hat die Suche nach Definitionen für die Begriffe *Festkörper* und *Flüssigkeit* eine lange Geschichte. Daher erhebt der Autor dieser Arbeit für die nachfolgende Zusammenfassung der bereits in der Literatur bestehenden Definitionen keinen Anspruch auf Vollständigkeit. Es werden Aussagen präsentiert und diskutiert, um anschließend in Abschnitt 4.3 eine Klassifizierung aufzubauen, welche auf mathematisch auswertbaren Kriterien beruht und eine dritte Stoffklasse als *Übergangsklasse zwischen Festkörpern und Flüssigkeiten* einführt. Die Einführung einer Klassifikation auf Grundlage mathematisch greifbarer und experimentell erfassbarer Klassifizierungskriterien ist dadurch motiviert, dass die Vokabeln Flüssigkeit und Festkörper vielfach völlig selbstverständlich benutzt werden, ohne sie eindeutig zu definieren (Walters 1980; S. 4). Einige dieser Vorstellungen, die ein mögliches Verständnis der Begriffe Festkörper und Flüssigkeit beschreiben, sind im Folgenden aufgeführt.
Für den Spezialfall einer sinusförmigen verzerrungsgesteuerten Anregung wird in der Literatur eine Einteilung in festkörper- und flüssigkeitsartiges Verhalten vorgenommen, die auf der Relation der Speicher- und

[2] englisches Originalzitat: „It is not easy to differentiate an infinitely slow flow and an equilibrium reached in an infinite time!“ (Lemaitre und Chaboche 1994; S. 100)

[3] (Bingham 1922; S. 4), (Houwink 1957; S. 11), (Reiner 1968; S. 127), (Wrana 1996; S. 22)

[4] (Reiner 1968; S. 28), (Szabo 2001; S. 363)

[5] (Bingham 1922; S. 5), (Houwink 1957; S. 11), (Reiner 1968; S. 127, 172), (Lyklema und van Olphen 1979; S. 1217), (Krawietz 1986; S. 20), (Göldner 1989; S. 228), (Kreißig 1992; S. 3, 5, 21), (Lemaitre und Chaboche 1994; S. 166, 192), (Streilein 1997; S. 9), (Trostel 1999; S. 210), (Simo und Hughes 2000; S. 6), (Hackley und Ferraris 2001; S. 26), (Haupt 2002; S. 227, 228, 273), (DIN.1342-1;S. 9), (Gross et al. 2004; S. 325), (Figura 2004; S. 108), (Sedlacek 2009; S. 52), (Balke 2010a; S. 135, 269), (Puzrin 2012; S. 190), (Boisly et al. 2014a)

[6] (Hackley und Ferraris 2001; S. 26), (Haupt 2002; S. 228, 231)

[7] (Giesekus 1994; S. 213), (Boisly et al. 2014a; Gl. (14))

Verlustmoduli zueinander basiert [8, 9]. Festkörperverhalten wird genau dann postulliert, wenn der Speichermodul größer ist als der Verlustmodul, $G' > G''$. Im Fall von $G'' > G'$ spricht man von flüssigkeitsartigem Verhalten. Dieses Kriterium ist jedoch nicht kompatibel mit der in Abschnitt 4.3 präsentierten Klassifizierung. Definiert man $G' > G''$ als Festkörperverhalten und $G'' > G'$ als flüssigkeitsartiges Verhalten, so muss konsequenterweise der Übergang von $G' > G''$ nach $G'' > G'$ als fest-flüssig Übergang interpretiert werden. Dies führt jedoch für rein viskoelastische Flüssigkeiten zu Widersprüchen, die einen Übergang von $G' > G''$ zu $G'' > G'$ aufweisen können, jedoch ohne Einschränkung viskoelastisches Flüssigkeitsverhalten zeigen. Dies ist am Beispiel des rCROSS-MAXWELL Elements in Boisly et al. (2015) demonstriert. Es besitzt einen Übergang von $G' > G''$ nach $G'' > G'$ sowohl für frequenz- als auch amplitudenabhängige Speicher- und Verlustmoduli, obwohl das rCROSS-MAXWELL Element entsprechend der Stoffklassifikation aus Abschnitt 4.3 eine Flüssigkeit und kein Material mit fest-flüssig Übergang ist.
Im Rahmen dieser Arbeit geht ein fest-flüssig Übergang mit dem Erfüllen der Fließbedingung (Yielding [10]) einher. *Yielding* ist für einen Übergang von $G' > G''$ zu $G'' > G'$ jedoch keinesweges notwendig, wie man am Beispiel des rCROSS-MAXWELL Elements aus Boisly et al. (2015) erkennt. Und umgekehrt ist ein Übergang von $G' > G''$ zu $G'' > G'$ nicht hinreichend für Yielding. Im Fall von $G' > G''$ kann man lediglich darauf schließen, dass elastische Anteile gegenüber dissipativen Effekte dominieren. Dissipatives Verhalten beinhaltet sowohl viskoses Materialverhalten als auch reibungsbehaftete Effekte aufgrund plastischer Eigenschaften (Fließspannung). Für $G'' > G'$ verhält es sich invers, es dominieren dissipative Effekte gegenüber elastischen Anteilen. (*Folgerung 15*)
Coussot (2005; Abb. 3.5) formuliert speziell für Pasten unter sinusförmiger Anregung ein Kriterium für den fest-flüssig Übergang. Es basiert auf dem amplitudenabhängigen Speicher- und Verlustmodul. Weil Pasten zur Stoffklasse der Flüssigkeiten mit Fließspannung zählen und die Klassifizierung von COUSSOT für eben solche Medien formuliert ist, gehen die Erkenntnisse dieser Arbeit einher mit der Klassifizierung von COUSSOT. Nach Coussot (2005; Abb. 3.5) korrespondiert ein fest-flüssig Übergang mit einem abrupten Anstieg des Verlustmoduls $G''(\hat{\gamma})$ und einem Abfall des Speichermoduls $G'(\hat{\gamma})$. Die Klassifizierung verliert ihre Gültigkeit, wenn es sich nicht um ein Material mit fest-flüssig Übergang handelt. Dies kann am Beispiel des rCROSS-MAXWELL Elements in (Boisly et al. 2015) nachvollzogen werden. Weitere Arbeiten, welche auf die Klassifizierung von COUSSOT zurückgreifen, kann man Robertson und Wang (2005; S. 075703-1), Pham et al. (2006; S. 626 ff.), Christopoulou et al. (2009; S. 5058) und (Renou et al. 2010; S. 1238) entnehmen.
Maxwell (1899; S. 303) erwähnte, dass eine Substanz als viskos gilt, wenn eine konstant gehaltene Spannung in ihr eine mit der Zeit kontinuierlich wachsende Verzerrung hervorruft. Wenn diese kontinuierliche Veränderung ausschließlich durch Spannungen hervorgerufen werden kann, die einen bestimmten Wert übersteigen, so wird die Substanz von MAXWELL als Festkörper bezeichnet, unabhängig davon wie weich der Stoff ist. Wenn eine sehr kleine, ausreichend lang aufgebrachte Spannung eine kontinuierliche Veränderung der Form des Probekörpers bewirkt, so ist die Materialprobe nach MAXWELL als viskoses Fluid anzusehen, unabhängig davon wie hart er ist. [11]
Für Bingham (1922; S. 215) sowie Lemaitre und Chaboche (1994; S. 100) sind Flüssigkeiten jene Stoffe, die durch eine sehr kleine Schubspannung kontinuierlich verformt werden konnten. Hingegen sind Festkörper als diejenigen Substanzen definiert, für welche die Deformation unter einer sehr kleinen Schubspannung im Laufe der Zeit zum Erliegen kommt. [12]

[8] frequenzabhängige Einteilung: (Jones et al. 1991; S. 491), (Larson 1999; S. 13, Abb. 1.8), (Hyun et al. 2002; S. 55), (Stokes und Frith 2008; S. 1136), (Laurati et al. 2011; S. 679, 682)

[9] amplitudenabhängige Einteilung: (Carrier und Petekidis 2009; S. 255), (Renou et al. 2010; S. 1227, 1238), (Fall et al. 2012; S. 583), (Rogers 2012; S. 1145)

[10] In englischsprachiger Literatur wird mit *Yielding* das Erfüllen einer plastischen Fließbedingung bezeichnet. Es wird generell zwischen den Begriffen *Yielding* (Fließen), *plastic flow* (plastisches Fließen) und *viscous flow* (viskoses Fließen) unterschieden. Mit *Yielding* verbindet man eine *yield function* (Fließfunktion), eine *yield condition* (Fließbedingung) und einen *yield stress* (Fließspannung) im Sinne der Plastizitätstheorie.

[11] englisches Originalzitat: „If the stress, when it is maintained constant, causes a strain or displacement in the body which increases continually with the time, the substance is said to be viscous. When this continuous alteration of form is only produced by stresses exceeding a certain value, the substance is called a solid, however soft it may be. When the very small stress, if continued long enough, will cause a constantly increasing change of form, the body must be regarded as a viscous fluid, however hard it may be.“ (Maxwell 1899; S. 303)

[12] englisches Originalzitat von Bingham (1922; S. 215): „If a body is continuously deformed by a very small shearing stress, it is a liquid, whereas if the deformation stops increasing after a time, the substance is a solid“; englisches Originalzitat von

Nach Houwink (1957; S. 10, 14) entscheidet die Existenz einer praktischen Fließspannung darüber, ob es sich um eine Flüssigkeit oder einen Festkörper handelt. „Die Existenz einer praktischen Fließgrenze wird als Möglichkeit angenommen, und in diesen Fällen sprechen wir von festen Stoffen. [...] Wenn keine praktische Fließgrenze beobachtet werden kann, wird der Stoff eine Flüssigkeit genannt."
Reiner (1968; S. 118, 172, 173) definiert Festkörper als diejenigen Materialien, welche entweder nicht fließen [13] oder nur plastisch fließen. Hingegen fließt eine Flüssigkeit nach REINER und Barnes et al. (1989; S. 6) unter jeder Last.
Carretti et al. (2005; S. 18) definiert einen Festkörper als ein Material, das seine eigene Gestalt unter dem eigenen Gewicht beibehält. Fließt ein Stoff unter seinem eigenem Gewicht, handelt es sich nach Walters (1980; S. 4) um eine Flüssigkeit. Altenbach (1994; S. 156) und Altenbach (2012; S. 216) beschreiben diesen Sachverhalt damit, dass Fluide „keine Tendenz zur Erhaltung der Gestalt" haben, Festkörper im Gegensatz dazu „einer Gestaltänderung Widerstand entgegen" setzen. Daher wird nach Tschoegl (1989; S. 39, 40) und Eringen (1980; S. 177) ein Körper als Flüssigkeit bezeichnet, wenn all seine Konfigurationen, welche die Dichte unverändert lassen, als Bezugskonfiguration benutzt werden können [14]. Rheologische Elemente, die keine ausgezeichnete Konfiguration besitzen und folglich die „Reaktion des Modells bei Wiederbelastung [...] unabhängig von der zuvor erfolgten inelastischen Verformung" ist, sind beispielsweise bei Krawietz (1986; S. 189 ff.) aufgeführt.
Eine Klassifikation in Flüssigkeiten und Festkörper, welche analog zu Abschnitt 4.3 auf eine mathematische Definition basiert, wurde von Noll (1958; S. 218) eingeführt. Sie beruht auf Eigenschaften bezüglich von Symmetriegruppen [15]. Greve (2003; S. 202) weist darauf hin, dass es in NOLLschem Sinne Materialien gibt, die weder als Flüssigkeit noch Festkörper zu klassifizieren sind. Als Beispiel führt GREVE ein anisotropes Fluid auf. Unabhängig davon weist auch Betten (2001; S. 21) allgemein darauf hin, dass die „scharfe Trennung zwischen Festkörper [...] und Flüssigkeit [...] nicht immer eindeutig möglich ist". Owens und Phillips (2005; S. 2) stellen ebenfalls fest, dass die Aufteilung in Flüssigkeiten und Festkörper mehr verschwommen scheint als ursprünglich angenommen. Sie schlussfolgern, dass eine Diskussion des Materialverhaltens angebrachter wäre [16]. Diesen Sachverhalt führen Lemaitre und Chaboche (1994; S. 100), Barnes (1999; S. 139), Betten (2001; S. 21), Tanner (2002; S. 20–24) und Owens und Phillips (2005; S. 2) auf experimentelle Uneindeutigkeiten zurück, welche durch den eingeschränkten Beobachtungszeitraum innerhalb des experimentellen Fensters begründet sind. Beispielsweise schreiben Owens und Phillips (2005; S. 2) sinngemäß, dass die menschliche Zeitskala nicht ausreichen kann, um Berge fließen zu sehen, obwohl sie dennoch fließen [17].
Dieser Sachverhalt motiviert die Definition einer *Übergangsklasse*, welche teilweise flüssigkeits- als auch festkörperartige Eigenschaften besitzt. Ein weiterer Grund zur Einführung einer Klassifikationsvorschrift mit einer solchen Übergangsklasse ist, dass sich oben aufgeführte Aussagen teilweise widersprechen oder im Sinne einer Materialmodellierung nicht zielführend sind. Die Einführung einer dritten Stoffklasse zwischen Festkörper und Flüssigkeiten ist durch mehrere Aspekte motiviert. So führt beispielsweise auch Scott Blair (1949; ch. IV) eine Gruppe von Materialien zwischen Flüssigkeiten und Festkörpern ein [18]. Harris (1977; S. xix) bezeichnet diese Materialgruppe als *Halb-Festkörper* („semi-solid") und Houwink (1957; S. 38) als Gele. In Walters (1980; S. 7) wird ebenfalls darauf hingewiesen, dass sich einige Materialien unterhalb einer kleinen Spannung wie Festkörper und oberhalb eines kritischen Spannungswertes (Fließspannung) wie Flüssigkeiten verhalten [19].

Lemaitre und Chaboche (1994; S. 100): „A solid admits a state of equilibrium under load. A fluid undergoes a flow for any load even for a small one."

[13] (Barnes et al. 1989; S. 6), (Felt et al. 1996; S. 590), (Gandhi und Bullough 2005; S. 239)

[14] englisches Originalzitat nach Eringen (1980; S. 177): „A body is called a fluid if every configuration of the body leaving the density unchanged can be taken as the reference configuration."

[15] (Malvern 1969; S. 418)„ (Haupt 1977; S. 61), (Giesekus 1994; S. 124), (Haupt 2002; S. 298), (Greve 2003; S. 200), (Truesdell und Noll 2004; S. 79, 82), (Martinec 2011; S. 77)

[16] englisches Originalzitat: „The conclusion of the matter is that the distinction between solids and fluids now seems somewhat more blurred than we may have previosly thought. A discussion of material behaviour might be more appropriate" (Owens und Phillips 2005; S. 2)

[17] englisches Originalzitat: „The human timescale may be insufficient to see mountains flowing, but flow they do!" (Owens und Phillips 2005; S. 2)

[18] englisches Originalzitat: „[...] materials intermediate between liquids and solids" (Scott Blair 1949; ch. IV)

[19] englisches Originalzitat: „[...] some materials behave as solids under small stresses and as fluids after a critical value of the stress (called the yield stress) has been exceeded" (Walters 1980; S. 7)

Die Notwendigkeit, eine zu Flüssigkeiten und Festkörpern gleichberechtigte Übergangsklasse im Rahmen einer phänomenologischen Stoffklassifizierung theoretisch einzubinden, wird am praktischen Beispiel des BINGHAM Elements [20] deutlich. Betten (2001; S. 21) wertet den Sachverhalt, dass für Flüssigkeiten „jede noch so kleine Schubspannung [...] eine Formänderung, d. h. Bewegung, zur Folge" hat, für das BINGHAM Element aus. Somit schlussfolgert BETTEN, dass das BINGHAM Element kein Fluid ist, welches jedoch „im Schriftum häufig als BINGHAM-Fluid bezeichnet und in die Gruppe der nicht-NEWTONschen Fluide eingeordnet" wird. Es gibt aber auch Quellen in den das BINGHAM Element als *plastischer Festkörper* [21], BINGHAM-*Festkörper* [22] oder auch *weicher Festkörper* [23] bezeichnet wird. Reiner (1968; S. 129) reflektiert die Zweideutigkeit anhand von Ölfarbe, deren Materialeigenschaften „eine Kombination von Plastizität und Zähigkeit" sind und mit dem BINGHAM Element beschrieben werden können. REINER schreibt: „Vor dieser Erfahrung nahm man an, dass Ölfarbe eine Flüssigkeit sei, und ihre Zähigkeit wurde aus dem POISEUILLEschen Gesetz bestimmt. [...] Trägt man eine Flüssigkeit an einer senkrechten Wand auf, so muß sie, wenn man ihr genügend Zeit lässt, abfließen. Bleibt das Material aber an der Fläche, so muss es ein Festkörper, wenn auch ein sehr weicher Festkörper sein. Ölfarbe ist tatsächlich solch ein Material. Ist die Farbschicht so dünn, dass ihr Gewicht eine Schubspannung hervorbringt, die kleiner als die Fließspannung ist, wird kein Fließen auftreten."
Dieser Zwiespalt, sowie die Notwendigkeit den Begriff *Flüssigkeit mit Fließspannung* [24] zufriedenstellend zu definieren, motiviert eine Stoffklassifikation unter Berücksichtigung einer Übergangsklasse. Die Übergangsklasse wird im Folgenden eingeführt und als *Material mit fest-flüssig Übergang* bezeichnet.

4.3 Klassifizierung von Stoffen in Festkörper, Flüssigkeiten und Materialien mit fest-flüssig Übergang

Zur Klassifikation von Stoffen werden zwei Kriterien eingeführt, die sich maßgeblich durch folgende Literaturstellen motivieren. In der DIN 1342-3 (S. 2) wird „ein deformierbarer Stoff [...] als Flüssigkeit bezeichnet, wenn er die folgenden Eigenschaften aufweist: (a) Jede endliche, noch so kleine Schubspannung, die nicht durch Trägheits- oder Grenzflächenkräfte kompensiert wird, erzeugt bei zeitlich unbegrenzter Einwirkung eine unbegrenzt große Verformung, ohne dass Bruchmechanismen hierfür wesentlich sind. Gleichbedeutend hiermit ist: Nach dem Aufhören der Einwirkung einer endlichen Schubspannung verschwindet die durch sie hervorgerufene Verformung nach unbegrenzt langer Zeit nicht wieder vollständig. (b) Bei zeitlich konstanter Schubspannung strebt die Verformungsgeschwindigkeit des Vorganges nach a) [...] gegen einen zeitlich konstanten, endlichen Endwert. (c) Der funktionale Zusammenhang zwischen zeitlich konstanter Schubspannung und zugehörigem Endwert der Verformungsgeschwindigkeit nach b) ist bis zu den kleinsten messend zu verfolgenden Schubspannungen herab stetig und endlich."
Eine Stoffklassifizierung anhand von Kriecheigenschaften wird von Pipkin (1972; S. 6), Ferry (1980; S. 16) und Tanner (2002; S. 22) vorgeschlagen. Sie bezeichnen Materialien als Flüssigkeiten, für welche sich unter einer sprunghaft aufgebrachten Spannung stationäres Fließen beziehungsweise eine linear steigende Deformation mit wachsender Zeit einstellt. Festkörpern hingegen, wird das Erreichen einer Gleichgewichtsdeformation beziehungsweise verschwindenden Verzerrungsrate unterstellt.
Analog dazu verwenden Tschoegl (1989; S. 40, 93), Emri und Tschoegl (1993a; S. 316) und Barnes (1999; S. 139) die Fähigkeit zu Fließen, um zwischen Festkörpern und Flüssigkeiten zu unterscheiden. In diesem Sinne führen sie *rheodiktische* Materialien ein, welche in der Lage sind stationär zu fließen, im Gegensatz zu *arrheodiktischen* Stoffen, welche diese Eigenschaft nicht besitzen.
Pipkin (1972; S. 5) und Giesekus (1994; S. 282) verfolgen den Ansatz, Materialien mittels dem Verhalten unter Relaxation zu klassifizieren. Für Festkörper stellt sich bei Relaxation ein von Null verschiedener Grenzwert für die Spannung ein. Dieser Grenzwert ist für Flüssigkeiten Null.
Desweiteren sind zur Definition der Begriffe *Festkörper* und *Flüssigkeit* die Ideen von Maxwell (1899; S. 303), Bingham (1922; S. 215), Tanner (2002; S. 20–24), Larson (1999; S. 14), Giesekus (1994; S. 282),

[20] (Giesekus 1994; S. 213), (Boisly et al. 2014a; Gl. (14))
[21] (Bingham 1922; S. 217): „plastic solid"
[22] (Oldroyd 1947b), (Oldroyd 1947a), (Prager 1961b; S. 153): „Bingham solid"
[23] (Reiner 1968; S. 129), (Barnes 1999; S. 139), (Uhlherr et al. 2005; S. 101): „soft solid"
[24] übersetzt aus dem englischen Begriff *yield stress fluid*

Scott Blair (1949; ch. IV) und Tschoegl (1989; S. 93) eingeflossen. Die Ansätze werden leicht modifiziert. Zwar existiert die Ansicht, dass „alles fließt“ [25] und jedes Material sich wie eine Flüssigkeit verhält wenn das experimentelle Fenster nur groß genug gewählt wird [26], jedoch ist es für Modellierungszwecke zulässig, ein Material innerhalb eines begrenzten experimentellen Fensters als Festkörper zu betrachten (Barnes et al. 1989; S. 5). Beispielsweise empfindet man Glas mehr als Festkörper, obwohl eine Fensterscheibe unter der Schwerkraft stetig fließt (Owens und Phillips 2005; S. 2). Das zeigt, dass es sowohl hinsichtlich kommunikativer Aspekte als auch für Modellierungszwecke nützlich ist, Stoffklassen zu definieren. Hess, Kröger und Fischer (2006; S. 385) haben jedoch darauf hingewiesen, dass es müßig ist beispielsweise nach einer allgemeingültigen Definitionen für *Flüssigkeit* zu suchen.
Daher sei explizit darauf hingewiesen, dass die folgenden Definitionen vom phänomenologischen Standpunkt aus formuliert sind, um zielgerichtet Entscheidungen hinsichtlich der Materialmodellierung treffen zu können. In diesem Sinn werden Materialien in die drei Stoffklassen

- Festkörper,
- Flüssigkeit und
- Material mit fest-flüssig Übergang, welche die Untermengen *Flüssigkeit mit Fließspannung* und *Flüssigkeit mit pseudo Fließspannung* beinhaltet,

unterteilt. Die Einordnung in eine der drei Stoffklassen erfolgt anhand zweier Klassifizierungskriterien, der

- Gleichgewichtsrelation und der
- Fließkurve.

Die Gleichgewichtsrelation kann über Relaxation ODER Kriechen gemessen werden. Infolge von Relaxationsversuchen wird die Gleichgewichtsspannung entsprechend Gleichung (3.44) untersucht. Das Ziel von Kriechversuchen ist die Untersuchung der Gleichgewichtsverzerrung nach Gleichung (3.45). Der Ausdruck ODER ist dabei als logischer Operator zu interpretieren. Er ist in Tabelle 4.1 definiert und durch das logi-

Tabelle 4.1: Definition des logischen ODER Operators $\vee$

A	B	C = A $\vee$ B
1	0	1
1	1	1
0	1	1
0	0	0

sche Symbol $\vee$ ersetzt. Hier bezeichnen A, B und C logische Variablen. C ist allerdings nicht unabhängig von A und B, sondern ergibt sich aus C = A $\vee$ B. Es sei A mit der Aussage *Messung der Gleichgewichtsspannung mittels Relaxation* belegt. Die Aussage *Messung der Gleichgewichtsverzerrung mittels Kriechen* wird der logischen Variablen B zugeordnet. Das Zeichen 1 bestätigt den Wahrheitsgehalt einer Aussage, 0 die Negation. Somit bedeutet A = 1, dass die Gleichgewichtsspannung mittels Relaxation gemessen werden kann, und A = 0 wenn nicht. Analog dazu kann die Gleichgewichtsverzerrung mittels Kriechen gemessen werden wenn B = 1 gilt. Für B = 0 trifft es nicht zu. Man kann die logische Aussage $C = A \vee B \stackrel{!}{=} 1$, dass die Gleichgewichtsrelation entweder mittels Relaxation (A) und/oder mittels Kriechen (B) bestimmt werden kann, wie folgt interpretieren:

- $(A = 1) \vee (B = 0) = 1$ ... Die Gleichgewichtsrelation bestimmt sich über Relaxation, wenn sie nicht über Kriechen ermittelt werden kann. Gemessen wird die Gleichgewichtsspannung.
- $(A = 0) \vee (B = 1) = 1$ ... Die Gleichgewichtsrelation ist durch Kriechen definiert, wenn sie sich nicht mittels Relaxationsversuchen bestimmen lässt. Gemessen wird die Gleichgewichtsverzerrung.

[25] (Reiner 1964), (Reiner 1968; S. 172), (Barnes et al. 1989; S. 5), (Barnes 1999; S. 133, 139), (Figura 2004; S. 87), (Betten 2005; S. 237), (Owens und Phillips 2005; S. 2)

[26] (Andrade 1947; S. 6), (Lemaitre und Chaboche 1994; S. 100), (Owens und Phillips 2005; S. 2), (Stokes und Frith 2008; S. 1136)

- $(\mathrm{A} = \mathbf{1}) \vee (\mathrm{B} = \mathbf{1}) = \mathbf{1}$ . . . Die Gleichgewichtsrelation kann sowohl über Kriechen als auch Relaxation bestimmt werden. Dies impliziert, dass die Ergebnisse beider Untersuchungsmethoden identisch sind.
- Außerdem kann abgeleitet werden, dass die Gleichgewichtsrelation mindestens durch eine der beiden Untersuchungsmethoden eindeutig identifiziert werden kann.

Die Stoffklassen sind in übersichtlicher Darstellung in Tabelle 4.2 entsprechend der beiden Klassifizierungskriterien voneinander abgegrenzt. Somit besteht die Möglichkeit, sowohl einen Probekörper experimentell als auch ein Materialmodell rechentechnisch in eine der drei Stoffklassen einzuordnen. Die Konstellation einer Gleichgewichtsspannung von Null und einer nicht messbarer Fließkurve ergibt sich rein formal, hat aber für diese Arbeit keine praktische Relevanz.

Tabelle 4.2: Stoffklassen in Abhängigkeit der beiden Klassifizierungskriterien, Fließkurve und Gleichgewichtsrelation. Die Gleichgewichtsrelation $(\gamma^{\mathrm{eq}.i}, \tau^{\mathrm{eq}.i})$ kann mittels Relaxation ODER Kriechen bestimmt werden. Relaxation ergibt eine Gleichgewichtsspannung $\tau^{\mathrm{eq}.i}$ nach Gleichung (3.44): $\left(\gamma^{\mathrm{eq}.i} \equiv \gamma^{i}, \tau^{\mathrm{eq}.i}\right)$. Kriechen ergibt eine Gleichgewichtsverzerrung $\gamma^{\mathrm{eq}.i}$ entsprechend Gleichung (3.45): $\left(\gamma^{\mathrm{eq}.i}, \tau^{\mathrm{eq}.i} \equiv \tau^{i}\right)$.

		Gleichgewichtsspannung bezüglich Relaxation ODER Gleichgewichtsverzerrung bezüglich Kriechen	
		Null	verschieden von Null
Fließkurve	messbar	Flüssigkeit	Material mit fest-flüssig Übergang: Flüssigkeit mit Fließspannung Flüssigkeit mit pseudo Fließspannung
	nicht messbar	–	Festkörper

Abschließend sei darauf hingewiesen, dass diese Klassifizierungsvorschrifft nicht mit jeder beliebigen Aussage der Literatur kompatibel sein kann. Beispielsweise wird in der DIN 1342-1 (S. 5) und DIN 51480-1 (S. 6) geschrieben, dass sich plastisches Material wie eine Flüssigkeit verhält sobald die Beanspruchung die Fließspannung überschreitet. Husband et al. (1993; S. 218), Barnes (1999; S. 136), Stokes und Telford (2004; S. 137), Uhlherr et al. (2005; S. 101) und Ardakani et al. (2011; S. 1262) vertreten inhaltlich dieselbe Auffasung und interpretieren die Fließspannung als die kritische Spannung des fest-flüssig Übergangs. Die Aussage stimmt für Flüssigkeiten mit Fließspannung ohne Verfestigung. Sie ist aber nicht allgemeingültig, ansonsten würden beispielsweise auch Metalle zur Stoffklasse der Flüssigkeiten zählen. Dass die Aussage mit der hier vorgestellten Klassifizierung kollidiert, sieht man in Boisly et al. (2014a; Abb. 6) und Abbildung 4.4(b) an der Tatsache, dass die Fließkurve für plastisches Material mit linear kinematischer Verfestigung [27] theoretisch nicht definiert ist. Daher kann es in keinen flüssigkeitsartigen Fließzustand übergehen. Nach Erfüllen der Fließbedingung beginnt es plastisch zu fließen, verhält sich jedoch stets festkörperartig.

Die Definitionen der Begriffe *Festkörper*, *Flüssigkeit* und *Material mit fest-flüssig Übergang* sind zunächst zweckdienlich und praktikabel, um eindimensionales Verhalten eines Black-Box Operators nach Abbildung 2.7 zu klassifizieren. Dies ist speziell für den ersten Schritt der zweistufigen Strategie zur phänomenologischen Materialmodellierung nach Abbildung 2.8 hilfreich. Als Ergebnis ist die qualitative Struktur eines Materialmodells, die notwendig ist, um das Materialverhaltens eines Probekörpers zu modellieren, bestimmt. Es empfiehlt sich dennoch, das Ergebnis für dreidimensionales Verhalten im zweiten Schritt der zweistufigen Modellierungsstrategie zu überprüfen. Man stelle sich beispielsweise ein anisotropes Material vor, welches unter Schubbelastung parallel zu Gleitebenen merklich fließt, sich jedoch normal zu den

[27] (Backhaus 1983; S. 280), (Krawietz 1986; S. 417), (Valanis 1990; S. 356), (Kreißig 1992; S. 59), (Lemaitre und Chaboche 1994; S. 110, 196, 205), (Streilein 1997; S. 54), (Lubarda 2002; ch. 9.4.2), (Houlsby und Puzrin 2006; S. 27, 98), (Rust 2009; S. 105), (Nasdala 2010; S. 158), (Kuna 2010; S. 405), (Puzrin 2012; S. 217, 227, 273)

Gleitebenen festkörperartig verhält (Greve 2003; S. 202).
Im Folgenden wird die Arbeitsweise der Klassifizierung für jede Stoffklasse anhand eines rheologischen Modellbeispiels exemplarisch vorgeführt. Dazu wird zunächst die Gesamtspannung τ eines rheologischen Modells für eine verzerrungsgeregelte zyklische Anregung nach Abbildung 4.1 mit $(\,) = \gamma$ [28] bestimmt. Für die spannungsgesteuerte Prozessführung verhält es sich invers, der Platzhalter wird durch $(\,) = \tau$ ersetzt und die Gesamtverzerrung γ wird bestimmt.

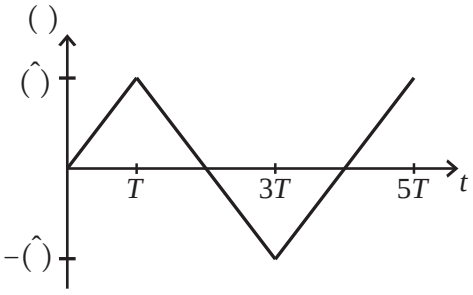


Abbildung 4.1: Experiment mit zyklischer Versuchsführung. Für verzerrungsgesteuerte Experimente gilt $(\,) = \gamma$, für spannungsgesteuerte Versuche $(\,) = \tau$.

4.3.1 Definition der Stoffklasse *Flüssigkeit*

Ein Material zählt nach Tabelle 4.2 genau dann zur Stoffklasse der *Flüssigkeiten*, wenn die

- über Relaxationsversuche bestimmte Gleichgewichtsspannung Null und
- die Fließkurve bestimmbar ist.

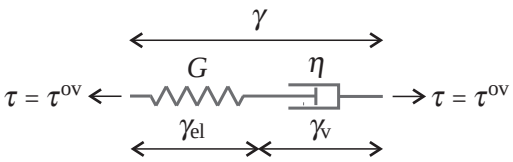
Die Gleichgewichtsrelation kann im Sinne von Haupt (2002; S. 260) [29] für Flüssigkeiten nicht über Kriechversuche bestimmt werden, da sich für Flüssigkeiten bei konstant gehaltener Spannung keine konstante Verzerrung einstellt [30]. Flüssigkeiten werden von jeder noch so kleinen konstanten Spannung zum Fließen gebracht. Daraus ergibt sich im Umkehrschluss, dass der Grenzwert τ_∞ für konstant gehaltene Verzerrungsraten wohl definiert ist. (*Folgerung 16*)
Hinsichtlich der Feststellung, dass sich für Flüssigkeiten infolge einer konstanten Spannung (Kriechen) keine konstante Verzerrung einstellt, ist auf die zeitliche Einschränkung bei der experimentellen Durchführung hinzuweisen. Da das experimentelle Fenster, wie in Abschnitt 3.3 beschrieben, stets beschränkt ist, kann eine „ausreichend lange“ Haltezeit Δt von Kriechversuchen nicht immer garantiert werden. Dem Experimentator stellt sich also die Frage, ob sich für den Kriechprozess bei einer noch größeren Haltezeit eine konstante Verzerrung eingestellt hätte. (*Folgerung 16*)
Um im Folgenden die Arbeitsweise der Klassifizierungsvorschrift speziell für Flüssigkeiten zu veranschaulichen, sei eine viskoelastische Flüssigkeit am Beispiel des MAXWELL Elements untersucht. Die wohl definierte Fließkurve ist in Abbildung 4.2(b) dargestellt. Dass die Fließkurve die elastischen Eigenschaften ausblendent erkennt man daran, dass die Fließkurve des MAXWELL Elements der eines NEWTONschen Dämpfers entspricht (*Folgerung 12*). Um sicherzustellen, dass die Fließkurve eine ungerade Funktion der Schubverzerrungsrate ist [31], wird sie sowohl für positive als auch negative Schubverzerrungsraten aufgetragen. Abbildung 4.3(a) beinhaltet die Spannungsantwort $\tau(\gamma)$ für eine zyklische verzerrungsgesteuerte Anregung entsprechend Abbildung 4.1 mit $(\,) = \gamma$. Außerdem ist die dazugehörige Gleichgewichtsspannung

[28] (Haupt 2002; S. 504), (Lion 1996; Abb. 2.5, 2.7), (Kästner et al. 2012; Abb. 3a)

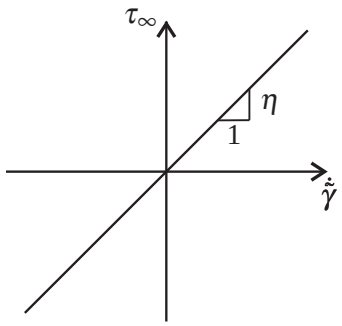
[29] englisches Originalzitat: „Among these is the basic assumption that a dynamic process always comes to a standstill in a passive system if the external conditions are kept constant. That is to say the process tends towards a state of equilibrium. If the relative distortion of the end cross-sections of the specimen is regarded as an external condition, then one can appreciate the hypothesis that an infinitely prolonged relaxation process has to end in a time-independent equilibrium state of stress and deformation.“ (Haupt 2002; S. 260)

[30] (Simo und Hughes 2000; S. 345), (Lubliner 2008; S. 65)

[31] (Harris 1977; S. 6, 17), (Böhme 2000; S. 130), (DIN.1342-3;S. 6), (Hyun und Wilhelm 2009; S. 413), (Hyun et al. 2011; S. 1704)



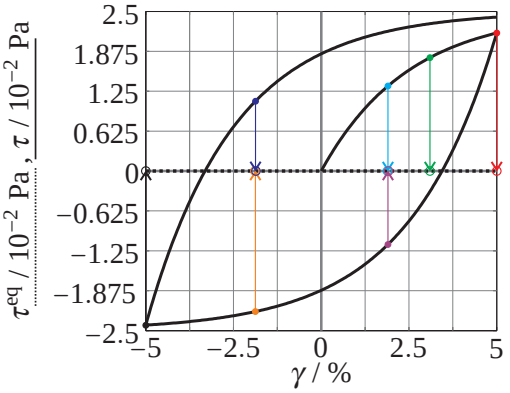
(a) Viskoelastische Flüssigkeit (MAXWELL Element)



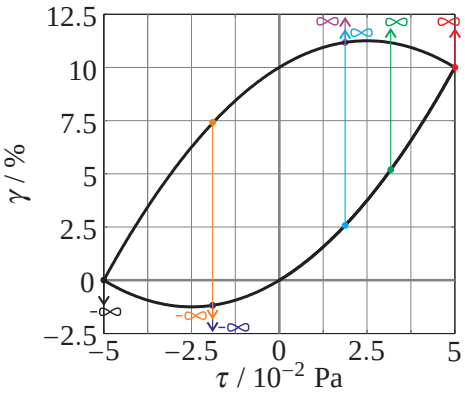
(b) Fließkurve der viskoelastischen Flüssigkeit von (a)

Abbildung 4.2: (a) Beispiel für eine viskoelastische Flüssigkeit deren (b) Fließkurve wohl definiert ist

$\tau^{eq}(\gamma) = 0$ dargestellt, die sich infolge Relaxation nach Abbildung 3.3 mit $(\,) = \gamma$ einstellt. Die analytische Lösung der Gesamtspannung entspricht der des Überspannungsmodells aus Abschnitt 4.3.2 und kann in Boisly et al. (2014a; Anhang B.2, B.3) eingesehen werden. Die farblich hervorgehobenen Pfeile •⟶∞ beschreiben die Spannungsverläufe unter Relaxation. Die Schubverzerrung $\gamma(\tau)$ für eine zyklische spannungsgesteuerte Anregung nach Abbildung 4.1 mit $(\,) = \tau$ ist in Abbildung 4.3(b) zu erkennen. Unabhängig davon von welchem Punkt der Schubverzerrung $[\gamma(\tau); \tau]$ ein Kriechprozess eingeleitet wird, erreicht die Schubverzerrung niemals einen zeitlich konstanten Wert. Für einen Kriechprozess mit $\tau = \text{konst} < 0$ strebt die Schubverzerrung $\gamma \to -\infty$. Für Spannungen $\tau = \text{konst} > 0$ gilt $\gamma \to \infty$. Dies ist durch die bis ins Unendliche verlaufenden Pfeile gekennzeichnet. Die analytische Lösung der Schubverzerrung für eine zyklische



(a) Gesamtspannung $\tau(\gamma)$ und Gleichgewichtsspannung $\tau^{eq}(\gamma)$ der viskoelastischen Flüssigkeit aus Abbildung 4.2(a) für eine zyklische verzerrungsgesteuerte Anregung $\gamma(t)$ nach Abbildung 4.1; Farblich hervorgehobene Pfeile beschreiben das Relaxationsverhalten.



(b) Schubverzerrung $\gamma(\tau)$ der viskoelastischen Flüssigkeit aus Abbildung 4.2(a) für eine zyklische spannungsgesteuerte Anregung $\tau(t)$ nach Abbildung 4.1; Eine der Schubspannung zugeordneten Gleichgewichtsverzerrung $\gamma^{eq}(\tau)$ kann nicht gefunden werden. Die farblich hervorgehobenen Pfeile zeigen das uneingeschränkte Anwachsen von γ für konstant gehaltene Spannungen.

Abbildung 4.3: Untersuchung der Existenz der Gleichgewichtsrelation für eine viskoelastische Flüssigkeit mit $G = 1\text{Pa}$ und $\eta = 0.5\text{Pas}$. Die zyklischen Belastungsparameter sind $T = 1\text{s}$, (a) $\hat{\gamma} = 0.05$ und (b) $\hat{\tau} = 0.05\text{Pa}$.

spannungsgesteuerte Anregung ist die Lösung der Differentialgleichung des MAXWELL Elements[32]. Sie ist in Boisly et al. (2014a; Anhang B.4) dokumentiert. Aufgrund der bestimmbaren Fließkurve und der bezüglich Relaxation ermittelten Gleichgewichtsspannung von Null, wird der Flüssigkeitscharakter des MAXWELL Elements deutlich.

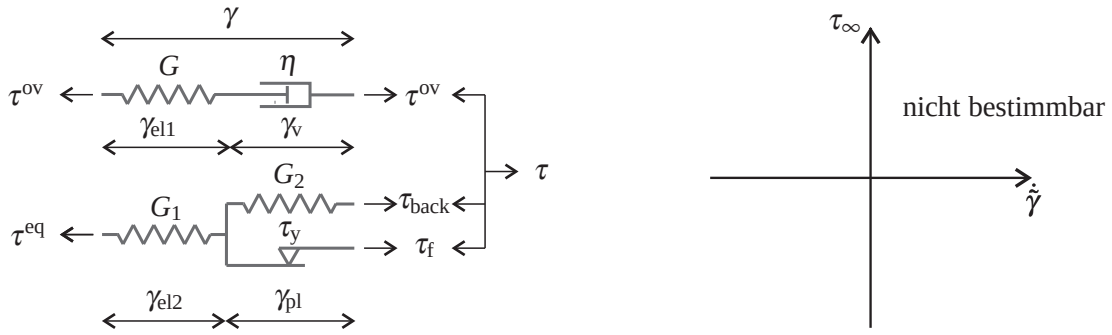
[32] (Giesekus 1994; S. 243), (Macosko 1994; S. 116), (Menges et al. 2002; S. 158), (Haupt 2002; S. 203, 322), (Kardelky 2004; S. 35, 192), (Gross et al. 2004; S. 308), (Silber und Steinwender 2005; S. 156)

4.3.2 Definition der Stoffklasse *Festkörper*

Ein Stoff wird dann als *Festkörper* bezeichnet, wenn er eine

- Gleichgewichtsrelation verschieden von Null besitzt und
- die Fließkurve nicht bestimmt werden kann.

Eine von Null verschiedene Gleichgewichtsrelation beinhaltet, dass entweder infolge Relaxation eine Gleichgewichtsspannung ungleich Null oder eine von Null verschiedene Gleichgewichtsverzerrung infolge Kriechen identifizierbar ist. Für einen Festkörper ist es nicht entscheidend, ob die Gleichgewichtsrelation mittels Relaxation oder Kriechen ermittelt wird. In beiden Fällen werden von Null verschiedene Gleichgewichtsspannungen und Gleichgewichtsverzerrungen identifiziert. Dass die Fließkurve nicht bestimmt werden kann, resultiert aus der Tatsache, dass der Grenzwert τ_∞ der Spannungsantwort für eine Anregung mit konstanter Schubverzerrungsrate nach Gleichung (3.67) nicht existiert. Die Nichtexistenz einer Fließkurve ist verständlich, wenn man für Festkörper annimmt, dass jeder Verzerrungszuwachs bis zum Versagen zu einem Spannungszuwachs führt. Infolgedessen ergibt sich für eine konstante Schubverzerrungsrate ebenfalls ein kontinuierlicher Ansteig der Spannung, sodass der Grenzwert τ_∞ nicht existiert. (*Folgerung 16*) Es ist jedoch anzumerken, dass die Annahme eine Einschränkung darstellt und Verfestigungseffekte mit Sättigung, wie beispielsweise der ARMSTRONG-FREDERICK Beziehung (Haupt 2002; S. 232 f., Abb. 5.17), nicht berücksichtigt. Die Definition ist für theoretische (idealisierte), eindimensionale Materialmodelle überprüft worden, stellt jedoch keinen allgemeingültigen Beweis dar. Die Materialphänomene *Versagen* und *Schädigung* werden im Rahmen dieser Arbeit ebenfalls nicht berücksichtigt.
Zur detaillierten Demonstration der Arbeitsweise der Klassifizierung wird das viskoplastische Materialmodell aus Abbildung 4.4(a) untersucht. Die Gleichgewichtsrelation besteht aus einem linear kinema-



(a) Idealer viskoplastischer Festkörper

(b) Fließkurve des viskoplastischen Festkörpers von (a)

Abbildung 4.4: (a) Beispiel für einen idealisierten Festkörper, dessen (b) Fließkurve nicht bestimmbar ist.

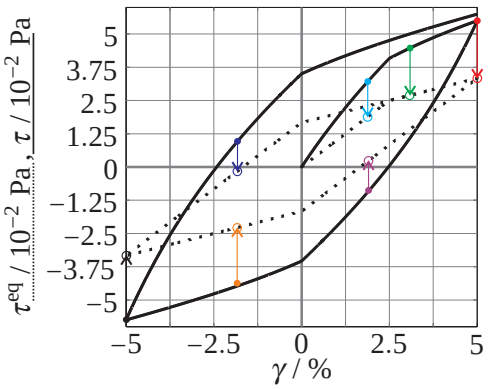
tisch verfestigenden Teilmodell [33]. Der kinematisch verfestigende Charakter erfolgt durch den *Backstress* τ_{back} [34], der eine innere Variable vom Spannungstyp darstellt [35]. Die eindimensionalen konstitutiven Beziehungen des rheologischen Modells aus Abbildung 4.4(a) sind in Boisly et al. (2014a; Anhang B.1) aufgeführt. Dass die Fließkurve des Modells nicht bestimmt werden kann (Puzrin 2012; S. 281), ist mit Abbildung 4.4(b) ausgedrückt. Abbildung 4.5(a) stellt die Spannungsantwort $\tau(\gamma)$ für eine zyklische verzerrungsgesteuerte Anregung nach Abbildung 4.1 mit $(\,) = \gamma$ sowie die dazugehörige Gleichgewichtsspannung $\tau^{\text{eq}}(\gamma)$ infolge Relaxation nach Abbildung 3.3 mit $(\,) = \gamma$ dar. In Abbildung 4.5(b) sind die Schubverzerrung $\gamma(\tau)$ für eine zyklische spannungsgesteuerte Anregung nach Abbildung 4.1 mit $(\,) = \tau$ sowie die resultierende Gleichgewichtsverzerrung $\gamma^{\text{eq}}(\tau)$ aus Kriechversuchen nach Abbildung 3.3 mit $(\,) = \tau$ aufgetragen. Sowohl für Relaxations- als auch Kriechprozesse steigt der prozentuale Anteil der Gleichgewichtsspannung $|\tau^{\text{eq}}|$ an der Gesamtspannung $|\tau|$. Der Anteil der Überspannung $|\tau^{\text{ov}}|$ sinkt während der Haltezeit. Ist

[33] (Malvern 1969; S. 370), (Haupt 2002; S. 272), (Puzrin 2012; S. 281)

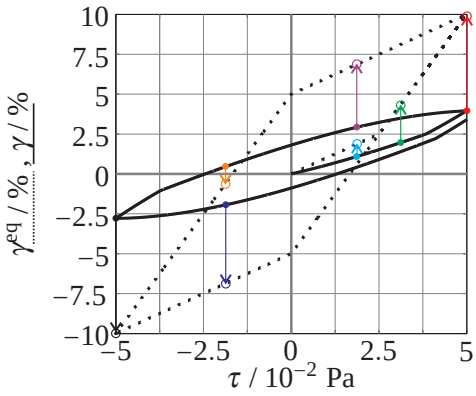
[34] (Krawietz 1986; S. 418), (Simo und Hughes 2000; S. 17), (Haupt 2002; S. 233, 461), (Lubarda 2002; ch. 9.4.2), (Ottosen 2005; S. 216, 292, 607), (Wu 2005; S. 296), (Houlsby und Puzrin 2006; S. 27, 89, 108), (Bertram 2008; S. 272), (Kuna 2010; S. 406)

[35] (Krawietz 1986; S. 418), (Kreißig 1992; S. 60)

die Haltezeit „ausreichend lang“ gewählt, stimmen die Gesamtspannung und die Gleichgewichtsspannung am Ende der Haltezeit überein, $\tau = \tau^{\mathrm{eq}}$, und die Überspannung beträgt Null, $\tau^{\mathrm{ov}} = 0$. Die Verläufe wurden



(a) Gesamtspannung $\tau(\gamma)$ und Gleichgewichtsspannung $\tau^{\mathrm{eq}}(\gamma)$ des idealen viskoplastischen Festkörpers von Abbildung 4.4(a) für eine zyklische verzerrungsgesteuerte Anregung $\gamma(t)$ nach Abbildung 4.1; Farblich hervorgehobene Pfeile beschreiben das Relaxationsverhalten.



(b) Gesamtverzerrung $\gamma(\tau)$ und Gleichgewichtsverzerrung $\gamma^{\mathrm{eq}}(\tau)$ des idealen viskoplastischen Festkörpers von Abbildung 4.4(a) für eine zyklische spannungsgesteuerte Anregung $\tau(t)$ nach Abbildung 4.1; Farblich hervorgehobene Pfeile beschreiben das Kriechverhalten.

Abbildung 4.5: Untersuchung der Existenz der Gleichgewichtsspannung für ein idealen viskoelastischen Festkörper mit $G = 1$Pa, $\eta = 0.5$Pas, $G_1 = 1$Pa, $G_2 = 0.5$Pa und $\tau_{\mathrm{y}} = 0.025$Pa. Die zyklischen Belastungsparameter sind $T = 1$s, (a) $\hat{\gamma} = 0.05$ und (b) $\hat{\tau} = 0.05$Pa.

analytisch berechnet und sind in Boisly et al. (2014a; Anhang B.2, B.3) dokumentiert. Unabhängig davon, ob zur Messung der Gleichgewichtsrelation Relaxations- oder Kriechversuche benutzt werden, kann sie in beiden Fällen bestimmt werden. Die farblich hervorgehobenen Pfeile •⟶∘ beschreiben das Relaxations- beziehungsweise Kriechverhalten. Aufgrund der Tatsache, dass für das rheologische Modell aus Abbildung 4.4(a) keine Fließkurve bestimmt werden kann, aber eine von Null verschiedene Gleichgewichtsrelation existiert, ist gezeigt, dass es sich um einen Festkörper handelt.

4.3.3 Definitionen für *Flüssigkeit mit Fließspannung* und *Flüssigkeit mit pseudo Fließspannung* als Teilmenge der Stoffklasse *Material mit fest-flüssig Übergang*

Vertreter der Stoffklasse *Material mit fest-flüssig Übergang* [36] besitzen eine

- von Null verschiedene Gleichgewichtsrelation und
- eine bestimmbare Fließkurve,

da der Grenzwert τ_∞ wohl definiert ist. Die Gleichgewichtsrelation kann mittels Relaxation ODER Kriechen identifiziert werden. ODER stellt einen logischen Operator dar. Er ist in Tabelle 4.1 definiert und durch das logische Symbol $\vee$ ersetzt. Zur Gruppe der Materialien mit fest-flüssig Übergang zählen Flüssigkeiten mit Fließspannung [37] oder Flüssigkeiten mit pseudo Fließspannung. Flüssigkeiten mit Fließspannung bestehen aus einem Reibelement (Boisly et al. 2014a), welches die Fließspannung in das Materialmodell integriert. Als Flüssigkeiten mit pseudo Fließspannung sind vom theoretischen Standpunkt aus betrachtet jene Materialmodelle gemeint, bei denen plastische Eigenschaften modelltechnisch durch Theorien ohne Fließkriterien implementiert werden. In dieser Arbeit wird in Abschnitt 6.2 das endochrone MAXWELL Element als Vertreter einer Flüssigkeit mit pseudo Fließspannung diskutiert. (*Folgerung 16*)

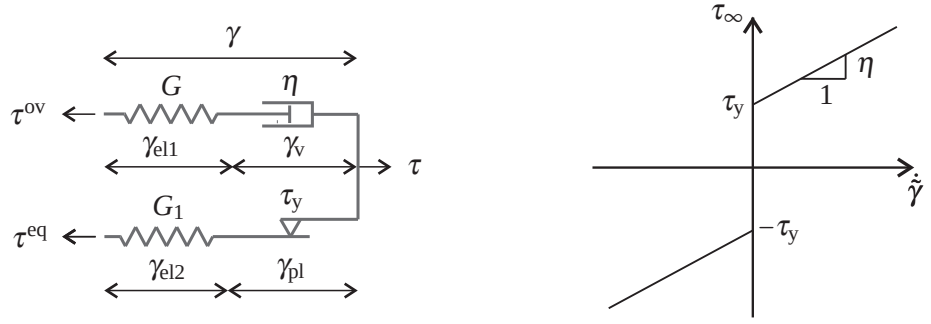
[36] (Denny und Gosline 1980; S. 386, Abb. 9), (Baus et al. 1995; S. 463), (Winter und Mours 1997), (Da Cruz et al. 2002; S. 2), (Coussot 2005; S. 2, 60, 88), (Coussot und Gaulard 2005; S. 3), (Tiu et al. 2006; S. 653, 661), (Stokes und Frith 2008; S. 1133), (Pham et al. 2008; S. 650), (Carrier und Petekidis 2009; S. 255), (Christopoulou et al. 2009; S. 5058), (Bonn und Denn 2009; S. 1402), (Renou et al. 2010; S. 1220), (Rogers et al. 2011a; S. 734), (Paredes et al. 2011; S. 1)

[37] (Nguyen und Boger 1992; S. 47), (Coussot et al. 2002b; S. 573), (Coussot et al. 2002a; S. 1), (Coussot 2005; S. 22), (Mahaut et al. 2008; S. 287), (Coussot et al. 2009; S. 85), (Oswald 2009; S. 12), (Fall et al. 2010; S. 1), (Paredes et al. 2011), (Boisly et al. 2014a)

Materialien mit fest-flüssig Übergang werden in der Literatur auch als *weiche Festkörper* [38] bezeichnet. Im Gegensatz zu Festkörpern kann das Ergebnis der Untersuchung der Gleichgewichtsrelation allerdings mit der Art der Prozessführung variieren. In Abhängigkeit davon, ob entweder ein Relaxations- oder Kriechprozess vorgegeben wird, um entweder die Gleichgewichtsspannung oder die Gleichgewichtsverzerrung zu identifizieren, können sich die Identifikationsergebnisse unterscheiden. Relaxation und Kriechen identifizieren dieselbe Gleichgewichtsrelation, sowohl für das endochrone MAXWELL Element im Bereich von $-\beta < \tau_{ch} < \beta$ als auch im Vorfließbereich von Flüssigkeiten mit Fließspannung, die einen elastischen Vorfließbereich besitzen. Im Falle von $|\tau_{ch}| = \beta$ fließt das endochrone MAXWELL Element uneingeschränkt, solange $|\tau_{ch}| = \beta$ aufrecht erhalten wird. Fließen ist für eine Flüssigkeit mit Fließspannung im Nachfließbereich ebenfalls nicht eingeschränkt. Aufgrund des uneingeschränkten Fließens kommt der Kriechprozess nicht zum Stehen, das heißt es stellt sich keine konstante Verzerrung ein. Jedoch kann der Gleichgewichtszustand für das endochrone MAXWELL Element und für Flüssigkeiten mit Fließspannung, die einen elastischen Vorfließbereich besitzen, mittels Relaxation bestimmt werden. Dieser Sachverhalt motiviert, die Gleichgewichtsrelation auf Basis des logischen ODER Operators aus Tabelle 4.1 mittels Relaxation ODER Kriechen zu bestimmen. (*Folgerung 16*)

Der Gleichgewichtszustand von Flüssigkeiten mit Fließspannung mit starrem Vorfließbereich, wie es beispielsweise beim Reibelement und dem BINGHAM Element [39] der Fall ist, ist unter der Angabe eine konstanten Verzerrung nicht eindeutig definiert. Das liegt an der Tatsache, dass die Spannung im Reibelement τ_f nach Boisly et al. (2014a; Gl. (10)) im Bereich $-\tau_y < \tau_f < \tau_y$ liegen kann. Für $\dot{\gamma}_b = 0$ kann sich die Spannung im BINGHAM Element nach Giesekus (1994; S. 213) und Boisly et al. (2014a; Gl. (15)) zwischen $-\tau_y \leq \tau_f \leq \tau_y$ bewegen. Infolgedessen ist die Spannung für Flüssigkeiten mit Fließspannung und starrem Vorfließbereich für Relaxation, $\gamma_f = \text{konst} \rightarrow \dot{\gamma}_f = 0$, zunächst unbestimmt (Giesekus 1994; S. 213). Bei Kriechen, $\tau = \text{konst}$, ist die Gleichgewichtsrelation für starre Flüssigkeiten mit Fließspannung im Vorfließbereich allerdings eindeutig bestimmt.

Um die Arbeitsweise der Klassifizierung für Materialien mit fest-flüssig Übergang zu veranschaulichen, wird im Folgenden die Flüssigkeit mit Fließspannung nach Abbildung 4.6(a) [40] betrachtet. Sie besitzt viskoplastische Eigenschaften. Die eindimensionalen konstitutiven Beziehungen sind in Boisly et al.



(a) Flüssigkeit mit Fließspannung

(b) Fließkruve der Flüssigkeit mit Fließspannung von (a)

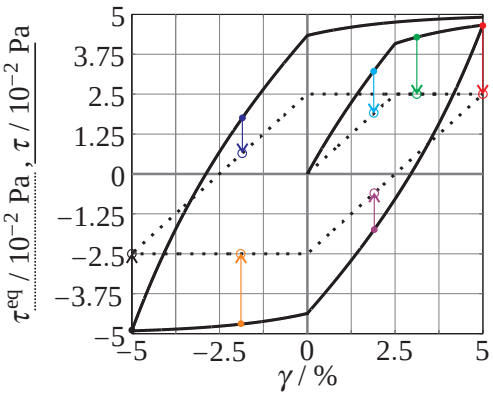
Abbildung 4.6: (a) Beispiel einer Flüssigkeit mit Fließspannung deren (b) Fließkurve wohl definiert ist

(2014a; Anhang B.5) hinterlegt. Die Fließkurve des Modells ist wohl definiert (Puzrin 2012; S. 280) und gleicht der eines BINGHAM Elements. Daran kann man erkennen, dass die Fließkurve die elastischen Eigenschaften des Modells ausblendent (*Folgerung 12*). Die Spannungsantwort $\tau(\gamma)$, für eine zyklische verzerrungsgesteuerte Anregung nach Abbildung 4.1 mit $(\,) = \gamma$, ist in Abbildung 4.7(a) dargestellt. Die Grafik zeigt ebenfalls die dazugehörige Gleichgewichtsspannung $\tau^{eq}(\gamma)$, welche über Relaxationsversuche entsprechend Abbildung 3.3 mit $(\,) = \gamma$ bestimmt werden kann. Die analytischen Lösungen der Spannungsverläufe ergeben sich aus den Lösungen für den viskoplastischen Festkörper nach Boisly et al. (2014a; Anhang B.2, B.3) mit $G_2 = 0$. Die Schubverzerrung $\gamma(\tau)$ für eine zyklische spannungsgesteuerte

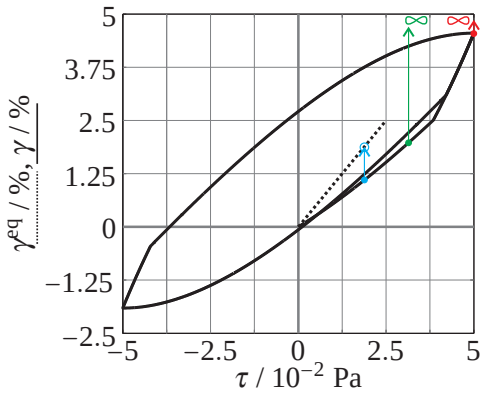
[38] In englisch-sprachiger Literatur als *soft solid* bezeichnet [(Bingham 1922; S. 215), (Scott Blair 1949; S. 51), (Barnes 1999; S. 133, 139)].

[39] (Giesekus 1994; S. 213), (Boisly et al. 2014a; Gl. (14))

[40] (Krawietz 1986; S. 26), (Kaleta et al. 2007; S. 1956), (Puzrin 2012; S. 280)



(a) Gesamtspannung $\tau(\gamma)$ und Gleichgewichtsspannung $\tau^{eq}(\gamma)$ der Flüssigkeit mit Fließspannung aus Abbildung 4.6(a) für eine zyklische verzerrungsgesteuerte Anregung $\gamma(t)$ nach Abbildung 4.1; Farblich hervorgehobene Pfeile beschreiben das Relaxationsverhalten.



(b) Gesamtverzerrung $\gamma(\tau)$ der Flüssigkeit mit Fließspannung aus Abbildung 4.6(a) für eine zyklische spannungsgesteuerte Anregung $\tau(t)$ nach Abbildung 4.1; Eine geschlossene Kurve für die Gleichgewichtsverzerrung $\gamma^{eq}(\tau)$ kann für den Gesamtprozess nicht identifiziert werden; Der blaue Pfeil markiert die Gleichgewichtsverzerrung, die sich nach Belastung aus dem unbeanspruchten Zustand heraus ergibt. Der grüne und rote Pfeil geben das unbegrenzte Fließen im Nachfließbereich an.

Abbildung 4.7: Untersuchung der Existenz der Gleichgewichtsrelation für eine Flüssigkeit mit Fließspannung für $G = 1\text{Pa}$, $\eta = 0.5\text{Pas}$, $G_1 = 1\text{Pa}$ und $\tau_y = 0.025\text{Pa}$. Die zyklischen Belastungsparameter sind $T = 1\text{s}$, (a) $\hat{\gamma} = 0.05$ und (b) $\hat{\tau} = 0.05\text{Pa}$.

Anregung nach Abbildung 4.1 mit $(\ ) = \tau$ ist in Abbildung 4.7(b) gezeigt. Sie ist auf semi-analytischem Wege berechnet und in Boisly et al. (2014a; Anhang B.6) dokumentiert. Die nach Abbildung 3.3 mit $(\ ) = \tau$ über Kriechversuche bestimmte Gleichgewichtsverzerrung $\gamma^{eq}(\tau)$ ist nicht eindeutig, da die plastische Schubverzerrung γ_{pl} aus Abbildung 4.6(a) von der Lastgeschichte abhängt. Selbst wenn die Haltezeiten eines Kriechversuchs im Nachfließbereich unendlich lang gewählt werden würden, käme das Modell nach Abbildung 4.6(a) nicht zum Stehen. Die Gesamtverzerrung würde stetig steigen. Die gepunktete Linie aus Abbildung 4.7(b) stellt die identifizierte Gleichgewichtsverzerrung dar, welche sich nach Versuchsbeginn aus dem unbeanspruchten Zustand heraus ergibt, solange sich die Flüssigkeit mit Fließspannung aus Abbildung 4.6(a) im Vorfließbereich befindet, sodass $\tau = \tau^{eq}$ und $\tau^{ov} = 0$. Wird allerdings die Fließbedingung in Boisly et al. (2014a; Gl. (B.71)) erfüllt, so befindet sich die Flüssigkeit mit Fließspannung nach Abbildung 4.6(a) im Nachfließbereich und fließt. Die plastische Schubverzerrung γ_{pl} entwickelt sich solange, bis die Bedingung für die Entlastung (Boisly et al. 2014a; Gl. (B.69)) erfüllt ist. Daher kann die Gleichgewichtsverzerrung ausgehend vom unbeanspruchten Zustand ausschließlich im ersten Vorfließbereich eindeutig bestimmt werden, exemplarisch dargestell für •⟶∞. Wenn ein Kriechprozess im Nachfließbereich eingeleitet wird, beispielsweise dargestellt in Abbildung 4.7(b) durch den günen Pfeil •⟶∞ und roten Pfeil •⟶∞, so fließt die Flüssigkeit mit Fließspannung uneingeschränkt.Weil das rheologische Modell aus Abbildung 4.6(a) eine Fließkurve besitzt, und die Gleichgewichtsspannung mittels Relaxation ODER die Gleichgewichtsverzerrung mittels Kriechen bestimmbar ist, handelt es sich um ein Material mit fest-flüssige Übergang.

5. Charakteristische Punkte von Materialfunktionen des rCROSS-BINGHAM-HOOKE Elements

Im folgenden Kapitel wird der eindimensionale Zusammenhang eines BINGHAM-HOOKE Elements mit viskosen Eigenschaften eines rCROSS Dämpfers betrachtet. Das Modell sei daher als rCROSS-BINGHAM-HOOKE Element bezeichnet. Das Verhalten des rCROSS Dämpfers ist in Boisly et al. (2015) definiert. Hierbei handelt es sich um eine reduzierte Beschreibung des CROSS Modells. Die viskosen Eigenschaften hängen somit von der Scherrate ab. Diese Abhängigkeit wird mittels drei Materialparametern η_0, η_∞ und K_1 beschrieben. In Abhängigkeit von den Größenverhältnissen zwischen der Nullviskosität, η_0, und der Viskosität im Unendlichen, η_∞, ergeben sich zwei qualitativ verschiedene Verhaltensweisen,

$$\eta_\infty < \eta_0 \quad : \quad \text{scherverdünnendes Verhalten und} \tag{5.1}$$

$$\eta_\infty > \eta_0 \quad : \quad \text{scherverdickendes Verhalten.} \tag{5.2}$$

Aufgrund der Tatsache, dass das zu modellierende Materialverhalten des MRF aus Abbildung 2.5(a) scherverdünnendes Verhalten zeigt, genügt es im Weiteren ausschließlich den Fall $\eta_\infty < \eta_0$ zu betrachten. Dazu werden zunächst die konstitutiven Beziehungen unter Berücksichtigung der Materialgleichungen der Elementarmodelle *Feder*, *Dämpfer* und *Reibelement* (Boisly et al. 2014a) formuliert.

5.1 Konstitutive Gleichungen des rCROSS-BINGHAM-HOOKE Elements

Das rheologische Schaltbild des rCROSS-BINGHAM-HOOKE Elements ist in Abbildung 5.1 dargestellt. Die

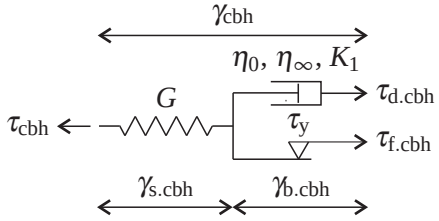


Abbildung 5.1: Rheologisches Schaltbild des rCROSS-BINGHAM-HOOKE Elements

das rCROSS-BINGHAM-HOOKE Element betreffenden Größen sind mit dem Literalindex $(\,)_{cbh}$ versehen. Die konstitutiven Bedingungen ergeben sich im Rahmen der geometrisch linearer Theorie aus den kinematischen und kinetischen Verknüpfungsbedingungen rheologischer Elemente nach Gleichungen (2.1) bis (2.4). Es gilt

$$\tau_{cbh} = G\,\gamma_{s.cbh} \tag{5.3a}$$

$$\tau_{cbh} = \tau_{f.cbh} + \tau_{d.cbh} = \tau_y\,\overline{\text{sign}}\,(\dot{\gamma}_{b.cbh}) + \left(\eta_\infty + \frac{\eta_0 - \eta_\infty}{1 + K_1 \cdot |\dot{\gamma}_{b.cbh}|}\right)\dot{\gamma}_{b.cbh} \tag{5.3b}$$

$$\gamma_{cbh} = \gamma_{s.cbh} + \gamma_{b.cbh}\ . \tag{5.3c}$$

In dieser Arbeit werden unter anderem Modellantworten für sinusförmige verzerrungsgesteuerte Anregungen ermittelt. Weil die Schubverzerrungsrate für eine sinusförmige Prozessführung wechselndes Vorzeichen besitzt, muss die Fließkurve eines Materials mit fest-flüssig Übergang sowohl für positive als auch negative Schubverzerrungsraten gültig sein. Andernfalls ist die korrekte Berechnung der Materialantwort

nicht gewährleistet. Daraus resultiert, dass die Fließkurve eine ungerade Funktion der Schubverzerrungsrate ist (*Folgerung 17*). Daher wird die Spannung des Reibelements im BINGHAM Modell mittels der $\overline{\text{sign}}$ Funktion beschrieben (Boisly et al. 2014a; Gl. (15)). Diese ist gegeben durch

$$\overline{\text{sign}}\,(x) = \begin{cases} -1 & : \quad x < 0 & (5.4a) \\ \bar{\xi} & : \quad x = 0 \quad \text{mit } -1 \le \bar{\xi} \le 1 & (5.4b) \\ 1 & : \quad x > 0 & (5.4c) \end{cases}$$

und liefert $\dot{\gamma}_{\text{b.cbh}} = 0$ für $\tau_{\text{cbh}} = \tau_{\text{f.cbh}}$. Demnach entwickelt sich $\gamma_{\text{b.cbh}}$ nicht, solange $|\tau_{\text{cbh}}|$ kleiner oder gleich der Fließspannung ist. Analog zum Reibelement nach Boisly et al. (2014a; Gl. (10)) ist $\bar{\xi}$ durch Gleichung (5.3b) festgelegt und liegt im Bereich $-1 \le \bar{\xi} \le 1$. Die Fließfunktion [1]

$$F\,(\tau_{\text{cbh}}) = |\tau_{\text{cbh}}| - \tau_{\text{y}} \tag{5.5}$$

wird analog zu Boisly et al. (2014a; Gl. (17)) und Boisly et al. (2017; Gl. (6)) eingeführt. Sie teilt das Materialverhalten in qualitativ verschiedene Gebiete (Ulbricht 1976; S. 28), den Vor- und Nachfließbereich, auf. Es gilt

$$F\,(\tau_{\text{cbh}}) \begin{cases} \le 0 & : \quad \text{Vorfließbereich} & (5.6a) \\ > 0 & : \quad \text{Nachfließbereich .} & (5.6b) \end{cases}$$

Fließen tritt ein, sobald die Fließbedingung

$$F\,(\tau_{\text{cbh}}) > 0 \tag{5.7}$$

erfüllt ist. Im Gegensatz zu Theorien der klassischen Plastizität (Haupt 2002; S. 227) sind hier alle Spannungszustände zulässig, $F\,(\tau_{\text{cbh}}) \lessgtr 0$. Da die nichtlinear viskosen Eigenschaften des rCROSS-BINGHAM-HOOKE Elements die Identifizierung der Spannungscharakteristik qualitativ nicht verändert, liefert

$$\tau_{\text{f.cbh}} \equiv \tau_{\text{cbh}}^{\text{eq}} \tag{5.8}$$

analog zu Boisly et al. (2014a; S. 7) die Gleichgewichtsspannung, welche auf $-\tau_{\text{y}} \le \tau_{\text{f.cbh}} \le \tau_{\text{y}}$ beschränkt ist. Da alle Spannungszustände zulässig sind, ergibt die Differenz

$$\tau_{\text{cbh}} - \tau_{\text{cbh}}^{\text{eq}} = \tau_{\text{d.cbh}} \equiv \tau_{\text{cbh}}^{\text{ov}} \tag{5.9}$$

den Überspannungsanteil. Daher ist die Gesamtspannung des rCROSS-BINGHAM-HOOKE Elements

$$\tau_{\text{cbh}} = \tau_{\text{f.cbh}}^{\text{eq}} + \tau_{\text{d.cbh}}^{\text{ov}} \tag{5.10}$$

weder eine reine Gleichgewichts- noch Überspannung. Aufgrund der Existenz einer Gleichgewichtshysterese sowie dem ratenabhängigen Verhalten, bedingt durch die viskosen Eigenschaften des rCROSS Dämpfers, klassifiziert sich das rCROSS-BINGHAM-HOOKE Element nach HAUPT als viskoplastisches Modell. Nichtlineares Verhalten wird durch Yielding und entweder scherverdünnende oder scherverdickende Eigenschaften impliziert. Zur Beschreibung des Materialverhaltens im Nachfließbereich ist es zweckmäßig die Relaxationszeiten

$$\alpha_0 = \frac{\eta_0}{G} \tag{5.11}$$

$$\alpha_\infty = \frac{\eta_\infty}{G} \tag{5.12}$$

analog zum rCROSS-MAXWELL Element (Boisly et al. 2015; Gl. (63), (64)) einzuführen. Entsprechend der grundlegenden Struktur einer Reihenschaltung werden die konstitutiven Beziehungen im Weiteren so aufbereitet, dass sie mithilfe der inneren Variablen vom Verzerrungstyp $\lambda = \gamma_{\text{b.cbh}}$ beschrieben werden können. Aufgrund der nichtlinear viskosen Eigenschaften des rCROSS Dämpfers ist die Evolutionsgleichung in impliziter Form gegeben,

$$\dot{\gamma}_{\text{b.cbh}} = 0 \qquad : \; F\,(\tau_{\text{cbh}}) \le 0 \tag{5.13}$$

$$\tau_{\text{cbh}} - \text{sign}\,(\tau_{\text{cbh}})\,\tau_{\text{y}} - \left(\eta_\infty + \frac{\eta_0 - \eta_\infty}{1 + K_1 \cdot |\dot{\gamma}_{\text{b.cbh}}|}\right)\dot{\gamma}_{\text{b.cbh}} = 0 \qquad : \; F\,(\tau_{\text{bh}}) > 0\,. \tag{5.14}$$

[1] (Haupt 2002; S. 227, 231), (Houlsby und Puzrin 2006; S. 18), (Lubliner 2008; S. 112), (Sedlacek 2009; S. 53)

Sie ergibt sich unter Berücksichtigung von Gleichung (5.3b) und

$$\operatorname{sign}(\tau_{\text{cbh}}) = \operatorname{sign}(\dot{\gamma}_{\text{b.cbh}}) = \overline{\operatorname{sign}}(\dot{\gamma}_{\text{b.cbh}}) \qquad \text{wenn } F(\tau_{\text{cbh}}) > 0 \tag{5.15}$$

$$\operatorname{sign}(\tau_{\text{cbh}}) = \operatorname{sign}(\gamma_{\text{s.cbh}}) \tag{5.16}$$

in Analogie zu Balke (1974; Gl. (5)) und Boisly et al. (2014a; Gl. (13)). Die Signum Funktion ist standardmäßig definiert als

$$\operatorname{sign}(x) = \begin{cases} -1 & : \quad x < 0 \quad (5.17a) \\ 0 & : \quad x = 0 \quad (5.17b) \\ 1 & : \quad x > 0\,. \quad (5.17c) \end{cases}$$

Die Gleichungen (5.3a), (5.3c) und (5.14) liefern die für den Vor- und Nachfließbereich separat formulierten konstitutiven Beziehungen. Es gilt

$$\text{Vorfließbereich:} \qquad \tau_{\text{cbh}} = G\left(\gamma_{\text{cbh}} - \gamma_{\text{b.cbh}}\big|_{t_i}\right) \tag{5.18}$$

$$\text{Nachfließbereich:} \qquad G\,\gamma_{\text{cbh}} - G\,\gamma_{\text{b.cbh}} - \tau_{\text{y}}\operatorname{sign}(\tau_{\text{cbh}}) - \left(\eta_\infty + \frac{\eta_0 - \eta_\infty}{1 + K_1 \cdot |\dot{\gamma}_{\text{b.cbh}}|}\right)\dot{\gamma}_{\text{b.cbh}} = 0\,. \tag{5.19}$$

Hierbei beschreiben t_i Zeitpunkte des Übergangs vom Nach- in den Vorfließbereich. Gleichung (5.19) liefert die Grundlage zur Bestimmung der inneren Variablen $\gamma_{\text{b.cbh}}$ bei gegebener Gesamtverzerrung. Berücksichtigt man in Gleichung (5.3b) die Entwicklung der Gesamtverzerrung entsprechend

$$\dot{\gamma}_{\text{cbh}} = \frac{\dot{\tau}_{\text{cbh}}}{G} + \dot{\gamma}_{\text{b.cbh}}\,, \tag{5.20}$$

so kann alternativ der Nachfließbereich ohne Verwendung der inneren Variablen beschrieben werden. Man erhält den Ausdruck für den

$$\text{Nachfließbereich:} \qquad \frac{1}{\eta_\infty + \dfrac{\eta_0 - \eta_\infty}{1 + K_1 \cdot \left|\dot{\gamma}_{\text{cbh}} - \dfrac{\dot{\tau}_{\text{cbh}}}{G}\right|}}\, G\left[\tau_{\text{cbh}} - \tau_{\text{y}}\operatorname{sign}(\tau_{\text{cbh}})\right] - (G\,\dot{\gamma}_{\text{cbh}} - \dot{\tau}_{\text{cbh}}) = 0\,. \tag{5.21}$$

Da weder Gleichung (5.19) noch Gleichung (5.21) analytisch gelöst werden konnten, wird im nächsten Abschnitt ein diskretisiertes Verfahren zur numerischen Lösung der Materialgleichungen abgeleitet.

5.2 Numerische Implementierung des rCROSS-BINGHAM-HOOKE Elements

Zur Umsetzung eines diskreten Verfahrens, mit dem Ziel die konstitutiven Beziehungen des rCROSS-BINGHAM-HOOKE Elements numerisch zu implementieren, wird der *viskoplastische Regularisierungs-Algorithmus* von Simo und Hughes (2000; S. 57, 67) zugrunde gelegt. Dieser setzt für das viskose Teilmodell allerdings lineares Verhalten voraus. Dennoch kann die generelle Arbeitsweise des Algorithmus übernommen werden. Dazu wird zunächst das EULER-Rückwärts Verfahren [2] angewendet. Dazu werden Gleichungen (5.18) und (5.19) zum Zeitpunkt t^{k+1} ausgewertet. Die Werte zum $(k+1)$-ten Zeitschritt sind unbekannt, die des k-ten Zeitschritts sind bekannt. Infolgedessen kann $\gamma_{\text{b.cbh}}|_{t_i}$ in Gleichung (5.18) durch $\gamma^k_{\text{b.cbh}}$ ersetzt werden. Die Schubverzerrungsrate $\dot{\gamma}^{k+1}_{\text{b.cbh}}$ wird mittels des *Rückwärtsdifferenzenquotienten* [3]

$$\dot{\gamma}^{k+1}_{\text{b.cbh}} = \frac{\gamma^{k+1}_{\text{b.cbh}} - \gamma^{k}_{\text{b.cbh}}}{\Delta t^k} \tag{5.22}$$

approximiert. Um die Berechnung nicht-äquidistant definierter Eingabedaten zu unterstützen, wird die Zeitschrittweite

$$\Delta t^k = t^{k+1} - t^k \tag{5.23}$$

[2] (Zienkiewicz 1984; S. 518), (Oelschlägel und Matthäus 1988; S. 55 ff.), (Oertel Jr. und Laurien 1995; S. 102), (Schwetlick und Roos 1999; S. 150), (Schäfer 1999; S. 139), (Schanz 2000; S. 61), (Simo und Hughes 2000; S. 33), (Betten 2004; S. 274), (Ostermann 2005; S. 3.10), (Dahmen und Reusken 2008; S. 439, 445)

[3] (Schäfer 1999; S. 139), (Plato 2006; S. 229), (Dahmen und Reusken 2008; S. 445)

angenommen. Infolgedessen erhält man die konstitutiven Gleichungen in zeitdiskretisierter Form, es gilt

$$\text{Vorfließbereich:}\quad \tau_{\text{cbh}}^{k+1} = G\left(\gamma_{\text{cbh}}^{k+1} - \gamma_{\text{b.cbh}}^{k}\right) \tag{5.24}$$

$$\text{Nachfließbereich:}\quad 0 = G\,\gamma_{\text{cbh}}^{k+1} - G\,\gamma_{\text{b.cbh}}^{k+1} - \tau_{\text{y}}\,\text{sign}\left(\tau_{\text{cbh}}^{k+1}\right) - \left(\eta_{\infty} + \frac{\eta_0 - \eta_{\infty}}{1 + K_1\left|\dfrac{\gamma_{\text{b.cbh}}^{k+1} - \gamma_{\text{b.cbh}}^{k}}{t^{k+1} - t^{k}}\right|}\right)\frac{\gamma_{\text{b.cbh}}^{k+1} - \gamma_{\text{b.cbh}}^{k}}{t^{k+1} - t^{k}}\,. \tag{5.25}$$

Zur Adaption des *viskoplastischen Regularisierungs-Algorithmus* von Simo und Hughes (2000; S. 57, 67) ist es zweckdienlich, ausgehend von Gleichung (5.21), die diskretisierte Form für den

Nachfließbereich:

$$0 = \frac{1}{\eta_{\infty} + \dfrac{\eta_0 - \eta_{\infty}}{1 + K_1 \cdot \left|\dfrac{\gamma_{\text{cbh}}^{k+1} - \gamma_{\text{cbh}}^{k}}{t^{k+1} - t^{k}} - \dfrac{\tau_{\text{cbh}}^{k+1} - \tau_{\text{cbh}}^{k}}{(t^{k+1} - t^{k})\,G}\right|}}\,G\left[\tau_{\text{cbh}}^{k+1} - \tau_{\text{y}}\text{sign}\left(\tau_{\text{cbh}}^{k+1}\right)\right] - \left(G\,\frac{\gamma_{\text{cbh}}^{k+1} - \gamma_{\text{cbh}}^{k}}{t^{k+1} - t^{k}} - \frac{\tau_{\text{cbh}}^{k+1} - \tau_{\text{cbh}}^{k}}{t^{k+1} - t^{k}}\right) \tag{5.26}$$

abzuleiten. Wird eine verzerrungsgesteuerte Anregung $\gamma_{\text{cbh}}^{k+1}$ aufgebracht, so ergeben sich $\gamma_{\text{b.cbh}}^{k+1}$ als Unbekannte für Gleichung (5.25) und τ_{cbh}^{k+1} für Gleichung (5.26). Hinsichtlich der numerischen Stabilität hat sich Gleichung (5.26) im Gegensatz zu Gleichung (5.25) als verträglicher herausgestellt. Deswegen werden Gleichungen (5.24) und (5.26) als Grundlage zur Formulierung eines numerischen Algorithmus verwendet. Analog zum viskoplastischen Regularisierungs-Algorithmus von Simo und Hughes (2000; S. 57, 67) wird zunächst eine *elastische trial Spannung* (Simo und Hughes 2000; S. 35, 43)

$$\tau_{\text{cbh}}^{\text{trial}.k+1} = \tau_{\text{cbh}}^{k} + G\Delta\gamma_{\text{cbh}}^{k} \qquad \text{mit} \tag{5.27}$$

$$\Delta\gamma_{\text{cbh}}^{k} = \gamma_{\text{cbh}}^{k+1} - \gamma_{\text{cbh}}^{k} \tag{5.28}$$

eingeführt. Somit können die diskretisierten Gleichungen für den

$$\text{Vorfließbereich:}\quad \tau_{\text{cbh}}^{k+1} = G\left(\gamma_{\text{cbh}}^{k+1} - \gamma_{\text{cbh}}^{k} + \gamma_{\text{cbh}}^{k} - \gamma_{\text{b.cbh}}^{k}\right) = G\Delta\gamma_{\text{cbh}}^{k} + \tau_{\text{cbh}}^{k} = \tau_{\text{cbh}}^{\text{trial}.k+1} \tag{5.29}$$

$$\tau_{\text{cbh}}^{k} = G\left(\gamma_{\text{cbh}}^{k} - \gamma_{\text{b.cbh}}^{k}\right) \tag{5.30}$$

$$\text{Nachfließbereich:}\quad 0 = \tau_{\text{cbh}}^{k+1} + \frac{1}{\dfrac{\eta_{\infty}}{G\Delta t^{k}} + \dfrac{\eta_0 - \eta_{\infty}}{G\Delta t^{k} + K_1\left|G\Delta\gamma_{\text{cbh}}^{k} - \left(\tau_{\text{cbh}}^{k+1} - \tau_{\text{cbh}}^{k}\right)\right|}}\left[\tau_{\text{cbh}}^{k+1} - \tau_{\text{y}}\text{sign}\left(\tau_{\text{cbh}}^{k+1}\right)\right] - \tau_{\text{cbh}}^{\text{trial}.k+1}\,. \tag{5.31}$$

mit der trial Spannung formuliert werden. Wenn anschließend Gleichung (5.31) mit $\text{sign}\left(\tau_{\text{cbh}}^{k+1}\right)$ und $\text{sign}\left(\tau_{\text{cbh}}^{\text{trial}.k+1}\right)$ beschrieben wird, ergibt sich für den

Nachfließbereich:

$$\left(\left|\tau_{\text{cbh}}^{k+1}\right| + \frac{1}{\dfrac{\eta_{\infty}}{G\Delta t^{k}} + \dfrac{\eta_0 - \eta_{\infty}}{G\Delta t^{k} + K_1\left|G\Delta\gamma_{\text{cbh}}^{k} - \left(\tau_{\text{cbh}}^{k+1} - \tau_{\text{cbh}}^{k}\right)\right|}}\left[\left|\tau_{\text{cbh}}^{k+1}\right| - \tau_{\text{y}}\right]\right)\text{sign}\left(\tau_{\text{cbh}}^{k+1}\right) = \left|\tau_{\text{cbh}}^{\text{trial}.k+1}\right|\text{sign}\left(\tau_{\text{cbh}}^{\text{trial}.k+1}\right)\,. \tag{5.32}$$

Analog zu Simo und Hughes (2000; S. 38) leitet sich der Zusammenhang

$$\text{sign}\left(\tau_{\text{cbh}}^{k+1}\right) = \text{sign}\left(\tau_{\text{cbh}}^{\text{trial}.k+1}\right) \tag{5.33}$$

unter Berücksichtigung von

$$\frac{\eta_{\infty}}{G\Delta t^{k}} + \frac{\eta_0 - \eta_{\infty}}{G\Delta t^{k} + K_1\left|G\Delta\gamma_{\text{cbh}}^{k} - \left(\tau_{\text{cbh}}^{k+1} - \tau_{\text{cbh}}^{k}\right)\right|} > 0 \qquad \text{und} \tag{5.34}$$

$$\left|\tau_{\text{cbh}}^{k+1}\right| - \tau_{\text{y}} > 0 \qquad \text{im Nachfließbereich} \tag{5.35}$$

ab. Damit können die konstitutiven Gleichungen im

$$\text{Nachfließbereich: } 0 = \left(\tau_{\text{cbh}}^{k+1} - \tau_{\text{cbh}}^{\text{trial}.k+1}\right)\left(\frac{\eta_\infty}{G\Delta t^k} + \frac{\eta_0 - \eta_\infty}{G\Delta t^k + K_1\left|\tau_{\text{cbh}}^{\text{trial}.k+1} - \tau_{\text{cbh}}^{k+1}\right|}\right) + \tau_{\text{cbh}}^{k+1} - \tau_{\text{y}}\,\text{sign}\left(\tau_{\text{cbh}}^{\text{trial}.k+1}\right) =: g\left(\tau_{\text{cbh}}^{k+1}\right) \tag{5.36}$$

mit der elastischen trial Spannung aus Gleichung (5.27) ausgedrückt werden. Außerdem führt Gleichung (5.36) $g(\ ) = 0$ als nichtlineare Gleichung der Unbekannten τ_{cbh}^{k+1} ein, die im Folgenden mit dem NEWTON Verfahren [4] iterativ gelöst wird. Unter Berücksichtigung von

$$g'\left(\tau_{\text{cbh}}^{k+1}\right) = \frac{d\,g\left(\tau_{\text{cbh}}^{k+1}\right)}{d\,\tau_{\text{cbh}}^{k+1}} = \frac{\eta_\infty}{G\Delta t^k} + \frac{\eta_0 - \eta_\infty}{G\Delta t^k + K_1\left|\tau_{\text{cbh}}^{\text{trial}.k+1} - \tau_{\text{cbh}}^{k+1}\right|}\left(1 - \frac{\tau_{\text{cbh}}^{\text{trial}.k+1} - \tau_{\text{cbh}}^{k+1}}{G\Delta t^k + K_1\left|\tau_{\text{cbh}}^{\text{trial}.k+1} - \tau_{\text{cbh}}^{k+1}\right|}\right) + 1 \tag{5.37}$$

errechnet sich der iterativ zu bestimmende Spannungswert

$$\tau_{\text{cbh}}^{k+1.q+1} = \tau_{\text{cbh}}^{k+1.q} - \frac{g\left(\tau_{\text{cbh}}^{k+1.q}\right)}{g'\left(\tau_{\text{cbh}}^{k+1.q}\right)} \tag{5.38}$$

solange bis ein Abbruchkriterium erfüllt ist. Die Iterationsstufe wird durch den Index q angegeben. Im Rahmen dieser Arbeit ist die Konvergenz entweder hinsichtlich des absoluten Abbruchkriteriums

$$g\left(\tau_{\text{cbh}}^{k+1.q+1}\right) \le A_{\text{abs}} \tag{5.39}$$

oder des relativen Abbruchkriteriums

$$\left|\frac{\tau_{\text{cbh}}^{k+1.q+1} - \tau_{\text{cbh}}^{k+1.q}}{\tau_{\text{cbh}}^{k+1.q+1}}\right| \le A_{\text{rel}} \tag{5.40}$$

gefordert. Der Programmablaufplan des numerisch implementierten Materialmodells ist in Abbildung 5.2 dargestellt.

Analog zum *Return-Mapping Algorithmus* zur numerischen Implementierung von plastischem Materialverhalten (Simo und Hughes 2000; S. 45), kann der Fließbeginn beim Übergang vom Vor- in den Nachfließbereich übergangen werden. Die Kenntnis des exakten Zeitpunktes des Fließbeginns ist nicht erforderlich. Sollte dieser dennoch von Interesse sein, so kann er mit dem *Bisektionsverfahren*[5] bestimmt werden. Die Anwendung des Bisektionsverfahrens ist empfehlenswert, da es einen numerisch robusten Algorithmus liefert (Dahmen und Reusken 2008; S. 180).

Die numerisch ermittelten Modellvorhersagen sind im Rahmen dieser Arbeit mithilfe normierter Intensitäten auf Plausibilität überprüft worden. Um numerisch bedingte Irregularitäten bestmöglich ausschließen beziehungsweise identifizieren zu können, eignet sich die Forderung nach glatten normierten Intensitäten sowie

$$0 \le \frac{I_k}{I_1} < 1\ . \tag{5.41}$$

Es ist jedoch zu beachten, dass diese Bedingungen notwendig aber nicht hinreichend dafür sind, numerische Irregularitäten ausschließen zu können. Als weitere Validierungsmaßnahme wurden daher ebenfalls Modellrechnungen mit $\eta_0 = \eta_\infty$ durchgeführt, sodass das rCROSS-BINGHAM-HOOKE Element formal in das BINGHAM-HOOKE Element (Boisly et al. 2017) übergeht. Der Abgleich mit den semi-analytisch bestimmten Modellvorhersagen des BINGHAM-HOOKE Elements brachten zufriedenstellende Ergebnisse. (*Folgerung 3*)

[4] (Schäfer 1999; S. 165), (Plato 2006; S. 99), (Freund und Hoppe 2007; S. 292, 335), (Dahmen und Reusken 2008; S. 181)

[5] (Pahl und Damrath 2000; S. 248), (Freund und Hoppe 2007; S. 325), (Dahmen und Reusken 2008; S. 180)

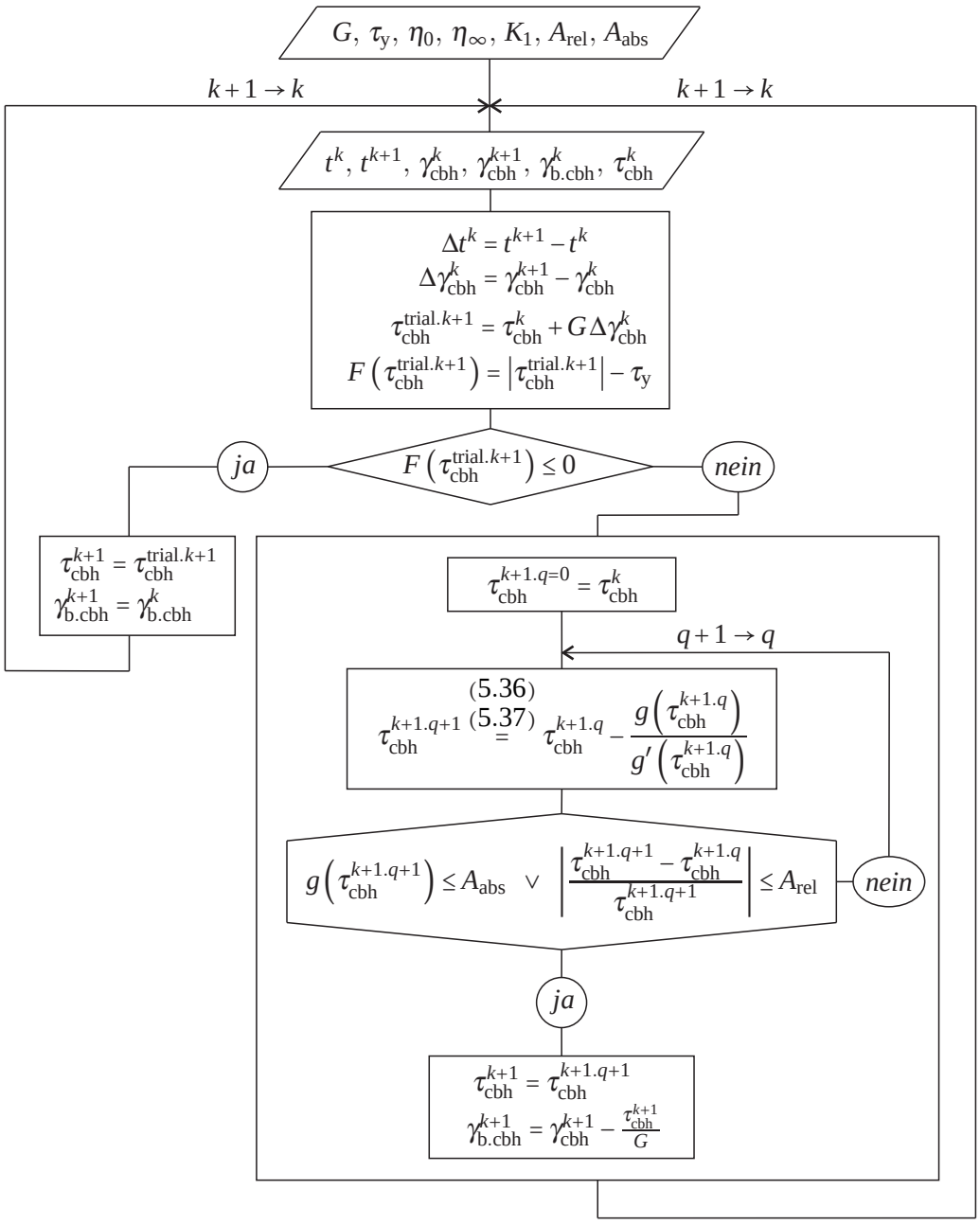
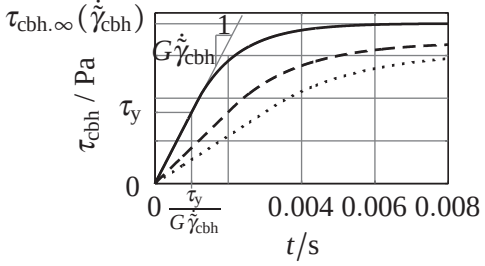


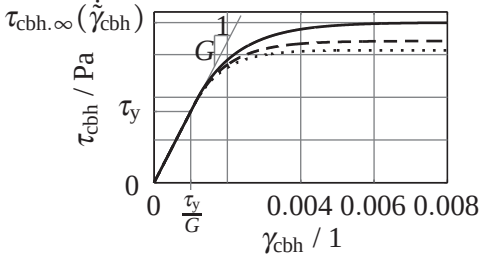
Abbildung 5.2: Programmablaufplan der numerischen Implementierung der konstitutiven Beziehungen des rCROSS-BINGHAM-HOOKE Elements

5.3 Materialantwort des rCROSS-BINGHAM-HOOKE Elements für eine konstante Schubverzerrungsrate

Zur Bestimmung der Fließkurve des rCROSS-BINGHAM-HOOKE Elements wird die Materialantwort zu der verzerrungsgesteuerten Anregung $\gamma_{\mathrm{cbh}}^{i} = \dot{\gamma}_{\mathrm{cbh}}\, t^{i}$ mit konstanter Schubverzerrungsrate $\dot{\gamma}_{\mathrm{cbh}} = \text{konst}$ und $t^{i} = t^{1} \ldots t^{n}$ Zeitschritten unter Berücksichtigung der Anfangsbedingung $\tau_{\mathrm{cbh}}(t = 0) = 0$ bestimmt. Dies geschieht numerisch unter Anwendung des in Abschnitt 5.2 vorgestellten numerischen Berechnungsverfahrens. Die Ergebnisse sind in Abbildung 5.3 präsentiert. Der Vorfließbereich ist für $\dot{\gamma}_{\mathrm{cbh}} > 0$ durch $0 \leq \gamma_{\mathrm{cbh}} \leq \frac{\tau_{\mathrm{y}}}{G}$ gegeben. Die Kurven der Spannung in Abhängigkeit der Schubverzerrung sind in diesem Bereich identisch.



(a) Spannung als Funktion der Zeit



(b) Spannung in Abhängigkeit der Schubverzerrung

Abbildung 5.3: Materialantwort des rCROSS-BINGHAM-HOOKE Elements zur verzerrungsgesteuerten Anregung $\gamma_{\mathrm{cbh}} = \dot{\gamma}_{\mathrm{cbh}}\, t$ mit $\dot{\gamma}_{\mathrm{cbh}} = 1\frac{1}{\mathrm{s}}$ $\dot{\gamma}_{\mathrm{cbh}}$: ——, $\frac{\dot{\gamma}_{\mathrm{cbh}}}{2}$: – – – und $\frac{\dot{\gamma}_{\mathrm{cbh}}}{3}$: ····· für $G = 5 \cdot 10^{4}\,\mathrm{Pa}$, $\tau_{\mathrm{y}} = 50\,\mathrm{Pa}$, $\eta_0 = 500\,\mathrm{Pa\,s}$, $\eta_\infty = 18.75\,\mathrm{Pa\,s}$ und $K_1 = 10\,\mathrm{s}$

Dies lässt sich auf das elastische Vorfließverhalten zurückführen, welches folglich ratenunabhängig ist. Hingegen werden im Nachfließbereich ratenabhängige Materialeigenschaften aktiv. Infolgedessen hängen die Spannungs-Verzerrungs-Kurven von der Schubverzerrungsrate $\dot{\gamma}_{\mathrm{cbh}}$ ab. Die Anfangstangente ist gegeben durch

$$\left.\frac{d\left(\tau_{\mathrm{cbh}}|_{\gamma_{\mathrm{cbh}}=\dot{\gamma}_{\mathrm{cbh}}t}\right)}{dt}\right|_{t=0} = G\,\dot{\gamma}_{\mathrm{cbh}} \tag{5.42}$$

$$\left.\frac{d\left(\tau_{\mathrm{cbh}}|_{\gamma_{\mathrm{cbh}}=\dot{\gamma}_{\mathrm{cbh}}t}\right)}{d\gamma_{\mathrm{cbh}}}\right|_{t=0} = G\,. \tag{5.43}$$

Ebenfalls ist zu erkennen, dass sich der stationäre Zustand nicht instantan einstellt

$$\tau_{\mathrm{cbh.}\infty} \neq \tau_{\mathrm{cbh}}|_{\gamma_{\mathrm{cbh}}=\dot{\gamma}_{\mathrm{cbh}}t}\,. \tag{5.44}$$

Er hängt außerdem nicht von den elastischen Eigenschaften des Vorfließbereiches ab. Daher beeinflussen ausschließlich die viskose Eigenschaften und der durch die Fließspannung bedingte, reibungsbehaftete Effekt die Fließkurve (*Folgerung 12*)

$$\tau_{\mathrm{cbh.}\infty} = \tau_{\mathrm{y}}\,\widetilde{\mathrm{sign}}\left(\dot{\gamma}_{\mathrm{cbh}}\right) + \left(\eta_\infty + \frac{\eta_0 - \eta_\infty}{1 + K_1 \cdot |\dot{\gamma}_{\mathrm{cbh}}|}\right)\dot{\gamma}_{\mathrm{cbh}}\,. \tag{5.45}$$

Die Fließkurve ist für scherverdünnendes Verhalten in Abbildung 5.4 dargestellt. Da die Fließkurve wohl definiert und die Gleichgewichtsrelation verschieden von Null ist, handelt es sich bei dem rCROSS-BINGHAM-HOOKE Element um ein Material mit fest-flüssig Übergang. Aufgrund der Existenz einer Fließspannung stellt es eine Flüssigkeit mit Fließspannung dar. Die Viskosität im Unendlichen η_∞ kann sowohl mittels der differentiellen Viskosität

$$\eta_{\mathrm{cbh.diff}} = 2\tau_{\mathrm{y}}\,\delta(\dot{\gamma}_{\mathrm{cbh}}) + \eta_\infty + \frac{\eta_0 - \eta_\infty}{\left(1 + K_1 \cdot |\dot{\gamma}_{\mathrm{cbh}}|\right)^2} \tag{5.46}$$

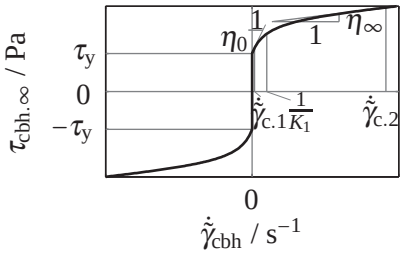


Abbildung 5.4: Fließkurve des scherverdünnenden rCROSS-BINGHAM-HOOKE Elements für $\tau_y = 50\,\mathrm{Pa}$, $\eta_0 = 500\,\mathrm{Pas}$, $\eta_\infty = 18.75\,\mathrm{Pas}$, $K_1 = 10\,\mathrm{s}$ und $\kappa_2 = 0.25$. Der Schubmodul G hat keinen Einfluss auf die Modellvorhersage des stationären Zustands.

als auch mithilfe der dynamischen Viskosität $\eta_{\mathrm{cbh.dyn}}$ nach Gleichung (3.70) bestimmt werden. Es ergibt sich in beiden Fällen

$$\lim_{\dot{\gamma}_{\mathrm{cbh}}\to\infty} \eta_{\mathrm{cbh.diff}} = \eta_\infty \tag{5.47}$$

$$\lim_{\dot{\gamma}_{\mathrm{cbh}}\to\infty} \eta_{\mathrm{cbh.dyn}} = \eta_\infty \ , \tag{5.48}$$

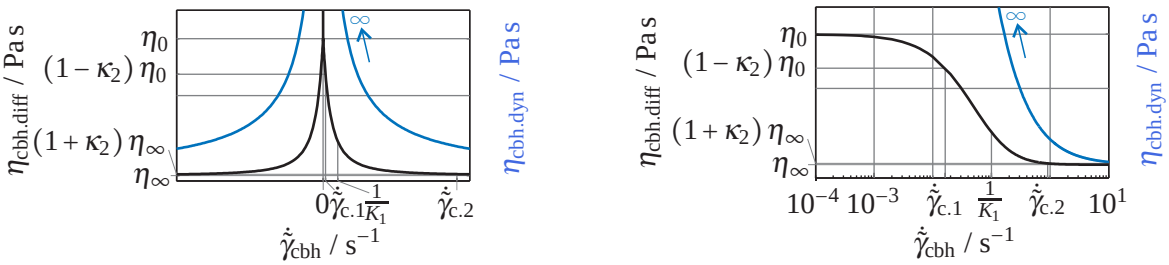
wenngleich in Abbildung 5.5 zu erkennen ist, dass die dynamische Viskosität wesentlich später als die differentielle Viskosität konvergiert. Die Nullviskosität

$$\lim_{\substack{\dot{\gamma}_{\mathrm{cbh}}\to 0 \\ \dot{\gamma}_{\mathrm{cbh}}>0}} \eta_{\mathrm{cbh.diff}} = \eta_0 \tag{5.49}$$

kann mittels des rechtsseitigen Grenzwertes an Null, dem Limes für $\dot{\gamma}_{\mathrm{cbh}} \to 0$ unter der Bedingung $\dot{\gamma}_{\mathrm{cbh}} > 0$, bestimmt werden. Im Gegensatz dazu tendiert die dynamische Viskosität für diese Betrachtung gegen Unendlich

$$\lim_{\substack{\dot{\gamma}_{\mathrm{cbh}}\to 0 \\ \dot{\gamma}_{\mathrm{cbh}}>0}} \eta_{\mathrm{cbh.dyn}} = \infty \ . \tag{5.50}$$

Daher eignet sich die dynamische Viskosität, vom theoretischen Standpunkt aus betrachtet, nicht zur Bestimmung der Nullviskosität (*Folgerung 12*). Je geringer der Betrag der Verzerrungsrate ist, desto mehr unterscheiden sich dynamische und differentielle Viskosität. Das Defizit der dynamischen Viskosität hin-



(a) Lineare Skalierung (b) Semilogarithmische Skalierung

Abbildung 5.5: Differentielle und dynamische Viskosität des scherverdünnenden rCROSS-BINGHAM-HOOKE Elements für $\tau_y = 50\,\mathrm{Pa}$, $\eta_0 = 500\,\mathrm{Pas}$, $\eta_\infty = 18.75\,\mathrm{Pas}$, $K_1 = 10\,\mathrm{s}$ und $\kappa_2 = 0.25$

sichtlich der Anwendung auf Flüssigkeiten mit Fließspannung ist jedoch für den scherverdickenden Fall noch eindrucksvoller motiviert. Wie in Abbildung 3.11 aus Abschnitt 3.7 bereits gezeigt wurde, stimmen für das scherverdickende rCROSS-BINGHAM-HOOKE Element das qualitative Verhalten der dynamischen und differentiellen Viskosität nicht überein. Aufgrund der Scherverdickung ist die differentielle Viskosität monoton steigend. Die dynamische Viskosität kann dieses Verhalten nicht wiedergeben. Sie besitzt monoton fallendes Verhalten, das definitionsbedingt rein mathematischer Natur und auf Gleichung (5.50) zurückzuführen ist.
Neben $\frac{1}{K_1}$ können die charakteristischen Schubverzerrungsraten $\dot{\gamma}_{c.1}$ und $\dot{\gamma}_{c.2}$ völlig analog zum rCROSS

Dämpfer (Boisly et al. 2015; Absch. 4) eingeführt werden, sodass die vier Bereiche $\dot{\tilde{\gamma}}_{\mathrm{cbh}} \leq \dot{\tilde{\gamma}}_{\mathrm{c.1}}$, $\dot{\tilde{\gamma}}_{\mathrm{c.1}} \leq \dot{\tilde{\gamma}}_{\mathrm{cbh}} \leq \frac{1}{K_1}$, $\frac{1}{K_1} \leq \dot{\tilde{\gamma}}_{\mathrm{cbh}} \leq \dot{\tilde{\gamma}}_{\mathrm{c.2}}$ und $\dot{\tilde{\gamma}}_{\mathrm{cbh}} \geq \dot{\tilde{\gamma}}_{\mathrm{c.2}}$ der Fließ- und Viskositätskurven aus Abbildungen 5.4 und 5.5 eindeutig definiert sind. Im ersten Bereich ist die differentielle Viskosität annähernd unabhängig von der Schubverzerrungsrate. Sie besitzt das NEWTONsches Plateau $\eta_{\mathrm{cbh.diff}} = \eta_0$. Somit kann $\dot{\tilde{\gamma}}_{\mathrm{c.1}}$ als kritische Schubverzerrungsrate (Hess, Kröger und Fischer 2006; S. 396)

$$\dot{\gamma}_{\mathrm{cr}} = \dot{\tilde{\gamma}}_{\mathrm{c.1}} \tag{5.51}$$

interpretiert werden, welche die Grenze des praktisch linearen Bereichs beschreibt. Dieser Sachverhalt liefert die Berechnungsgrundlage (Boisly et al. 2015; Gl. (29))

$$\frac{\left|\eta_\infty + \frac{\eta_0 - \eta_\infty}{\left(1 + K_1 \cdot |\dot{\tilde{\gamma}}_{\mathrm{c.1}}|\right)^2} - \eta_0\right|}{\eta_0} \leq \kappa_2 \tag{5.52}$$

zur Bestimmung von $\dot{\tilde{\gamma}}_{\mathrm{c.1}}$. Für scherverdünnendes Verhalten gilt $\eta_\infty + \frac{\eta_0 - \eta_\infty}{\left(1 + K_1 \cdot |\dot{\tilde{\gamma}}_{\mathrm{c.1}}|\right)^2} < \eta_0$, sodass (Boisly et al. 2015; Gl. (30))

$$\eta_\infty < \eta_0 : \qquad |\dot{\tilde{\gamma}}_{\mathrm{c.1}}| \leq \frac{1}{K_1}\left(\sqrt{\frac{\eta_0 - \eta_\infty}{(1-\kappa_2)\cdot\eta_0 - \eta_\infty}} - 1\right) . \tag{5.53}$$

Der Parameter κ_2 definiert die prozentuale Abweichung zwischen $\eta_{\mathrm{cbh.diff}}\left(\dot{\tilde{\gamma}}_{\mathrm{c.1}}\right)$ und η_0. Die Grenze zwischen dem dritten und vierten Bereich der Fließ- und Viskositätskurve, $\dot{\tilde{\gamma}}_{\mathrm{c.2}}$, wird analog ermittelt. Für die differentielle Viskosität gilt dann (Boisly et al. 2015; Gl. (33))

$$\frac{\left|\eta_\infty + \frac{\eta_0 - \eta_\infty}{\left(1 + K_1 \cdot |\dot{\tilde{\gamma}}_{\mathrm{c.2}}|\right)^2} - \eta_\infty\right|}{\eta_\infty} \leq \kappa_2 . \tag{5.54}$$

Unter Berücksichtigung von scherverdünnendem Verhalten findet man $\frac{\eta_0 - \eta_\infty}{\left(1 + K_1 \cdot |\dot{\tilde{\gamma}}_{\mathrm{c.1}}|\right)^2} > 0$ und folglich (Boisly et al. 2015; Gl. (34))

$$\eta_\infty < \eta_0 : \qquad |\dot{\tilde{\gamma}}_{\mathrm{c.2}}| \geq \frac{1}{K_1}\left(\sqrt{\frac{\eta_0 - \eta_\infty}{\kappa_2\,\eta_\infty}} - 1\right) . \tag{5.55}$$

Gleichungen (5.53) und (5.55) kann entnommen werden, dass K_1 den Übergang der beiden NEWTONschen Plateaus [6] beschreibt, sobald η_0 und η_∞ fix sind. Abschließend sei darauf hingewiesen, dass κ_2 nicht restriktionsfrei gewählt werden kann. Es muss ausreichend klein gewählt werden, sodass (Boisly et al. 2015; Gl. (35))

$$\dot{\tilde{\gamma}}_{\mathrm{c.1}} < \frac{1}{K_1} < \dot{\tilde{\gamma}}_{\mathrm{c.2}} . \tag{5.56}$$

Letztere Bedinung ist für endliche Werte von $\frac{1}{K_1}$ stets realisierbar da (Boisly et al. 2015; Gl. (36), (37))

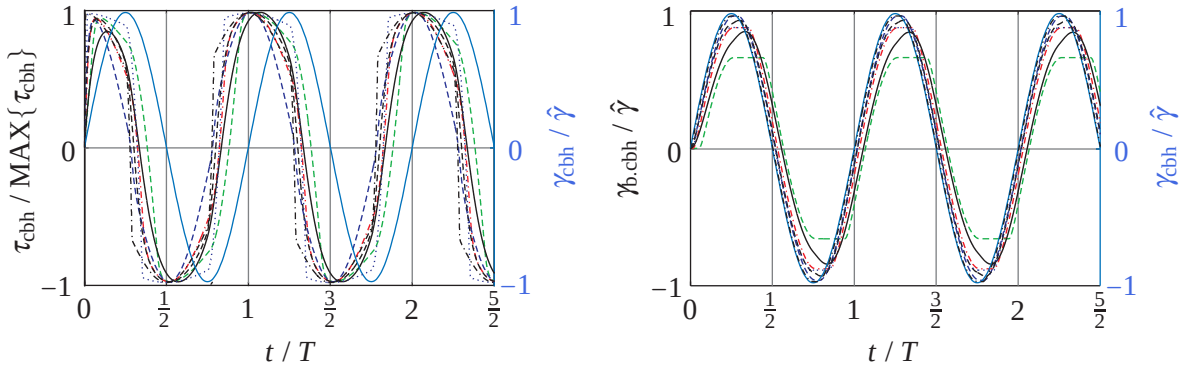
$$\lim_{\kappa_2 \to 0} \dot{\tilde{\gamma}}_{\mathrm{c.1}} = 0 \tag{5.57}$$

$$\lim_{\kappa_2 \to 0} \dot{\tilde{\gamma}}_{\mathrm{c.2}} = \infty . \tag{5.58}$$

[6] (de Souza Mendes und Dutra 2004; S. 297), (Claracq et al. 2004; S. 45)

5.4 Verhalten des rCROSS-BINGHAM-HOOKE Elements unter verzerrungsgeregelter sinusförmiger Anregung mit physikalisch großer Amplitude

Die Spannungsantwort für eine verzerrungsgesteuerte sinusförmige Anregung $\gamma_{\text{cbh}} = \hat{\gamma}\sin(\omega t)$ besitzt aufgrund der nichtlinearen Eigenschaften des rCROSS-BINGHAM-HOOKE Elements eine große Vielfalt. Diese ist in Abbildung 5.6(a) angedeutet. Einige der Spannungsverläufe visualisieren die Materialantwort innerhalb des MODE ω/1, MODE ω/2, MODE $\hat{\gamma}$/2, MODE $\hat{\gamma}$/3 oder MODE $\hat{\gamma}$/4. Diese Modi definieren Schnittebenen der dreidimensional dargestellten Speicher- und Verlustmoduli. Sie werden in den Abschnitten 5.4.1 und 5.4.2 eingeführt. Die entsprechenden Verläufe der inneren Variablen sind der Abbildung



(a) Spannungsantwort

(b) Verlauf der inneren Variablen $\gamma_{\text{b.cbh}}$

Abbildung 5.6: Materialantwort des scherverdünnenden rCROSS-BINGHAM-HOOKE Elements zu verzerrungsgeregelten sinusförmigen Anregungen für $G = 5\cdot10^4$Pa, $\eta_0 = 500$Pas, $\eta_\infty = 18.75$Pas, $K_1 = 10^4$s und $\tau_y = 5\cdot10^{-5}$Pa; [$\hat{\gamma} = 10^{-8}$, MODE ω/1: $\omega = 1\,\frac{\text{rad}}{\text{s}}$]: ⋯⋯; [MODE $\hat{\gamma}$/3 & ω/1: $\hat{\gamma} = \hat{\gamma}_{\text{cbh.2}} = 7\cdot10^{-8}$, $\omega = 1\,\frac{\text{rad}}{\text{s}}$]: -·-·-; [MODE $\hat{\gamma}$/2: $\hat{\gamma} = \hat{\gamma}_{\text{cbh.1}} = 3.1\cdot10^{-9}$, $\omega = 10\,\frac{\text{rad}}{\text{s}}$]: – – –; [$\hat{\gamma} = 10^{-8}$, $\omega = 10\,\frac{\text{rad}}{\text{s}}$]: -·-·-; [MODE $\hat{\gamma}$/3: $\hat{\gamma} = \hat{\gamma}_{\text{cbh.2}} = 7\cdot10^{-8}$, $\omega = 10\,\frac{\text{rad}}{\text{s}}$]: ——; [MODE $\hat{\gamma}$/4 & ω/2: $\hat{\gamma} = 2\cdot10^{-6}$, $\omega = \frac{1}{\alpha_0} = 100\,\frac{\text{rad}}{\text{s}}$]: ——; [$\hat{\gamma} = 10^{-5}$, MODE ω/2: $\omega = \frac{1}{\alpha_0} = 100\,\frac{\text{rad}}{\text{s}}$]: – – –

5.6(b) zu entnehmen. Die Spannungsantworten sind mittels des in Abschnitt 5.2 aufbereiteten Algorithmus numerisch bestimmt. Es wurde eine konstante Zeitschrittweite $\Delta t^k = \Delta t$ vorgegeben, die einen möglichst kleinen numerischen Gesamtfehler, der sich aus dem Diskretisierungs- und Rundungsfehler zusammensetzt, liefert. Eine adaptive Schrittweitensteuerung [7] wurde nicht angewendet. Der Diskretisierungsfehler wird maßgeblich von der Wahl der Diskretisierungsmethode beeinflusst und nimmt mit steigender Zeitschrittweite zu. Der Rundungsfehler ergibt sich aus der numerischen Genauigkeit [8] und fällt mit steigender Zeitschrittweite ab. Somit zeigen die beiden Fehlertypen in Abhängigkeit der Zeitschrittweite Δt inverses Verhalten. Es existiert daher eine optimale Zeitschrittweite, der ein minimaler Gesamtfehler zugeordnet werden kann [9]. Untersuchungen unter den im Rahmen dieser Arbeit betrachteten Bedingungen haben gezeigt, dass $\Delta t = \frac{T}{10^5}$ eine gute Wahl ist, um entweder das relative Abbruchkriterium $A_{\text{rel}} = 10^{-1}$ oder das absolute Abbruchkriterium $A_{\text{abs}} = 10^{-2}$ zu erfüllen. Die untere Grenze der Zeitschrittweite, welche die Rekonstruktion der Spannungsantwort über den gesamten Frequenzbereich sicherstellt, kann mittels des Abtasttheorems (NYQUIST-SHANNON *Theorem*) [10] ermittelt werden. In Abhängigkeit von der zu untersuchenden Zahl Höherharmonischer k ergibt sich

$$\Delta t < \frac{T}{2k} \,. \tag{5.59}$$

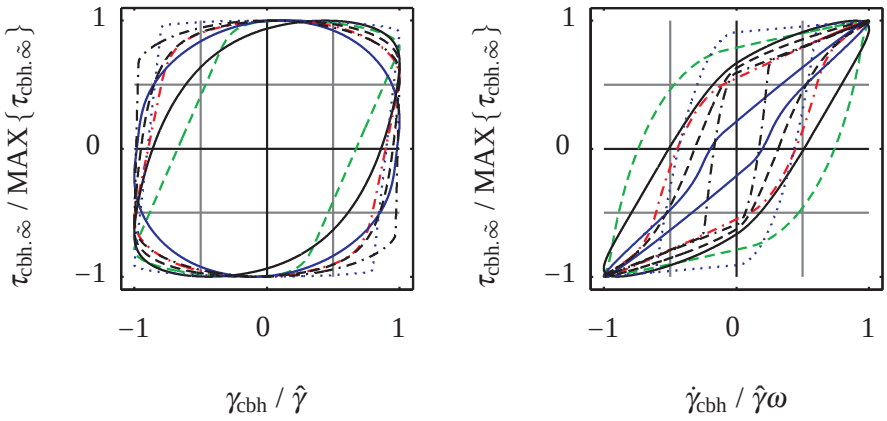
[7] (Stoer und Bulisch 2005; S. 133), (Plato 2006; S. 166)

[8] (Schwetlick und Roos 1999; S. 121), (Stoer und Bulisch 2005; S. 128)

[9] (Schwetlick und Roos 1999; S. 134), (Plato 2006; S. 157)

[10] (Paul 1987; S. 19), (Mildenberger 1989; S. 83), (Best 1991; S. 73), (Nelson und Dealy 1993; S. 206), (Wolf 1998; S. 255), (Hoffmann 1998; S. 33), (Stearns und Hush 1999; S. 39, 70), (Werner 2000; S. 226), (Scheithauer 2004; S. 267), (Girod et al. 2005; S. 259), (Hoffmann 2005; S. 38)

In dieser Arbeit werden für das scherverdünnende rCROSS-BINGHAM-HOOKE Element Höherharmonische bis einschließlich der neunten Ordnung, $k = 9$, betrachtet. Die Darstellung der Spannungsantwort in Form von LISSAJOUS Diagrammen ist in Abbildung 5.7 entsprechend dem rheologischen Fingerabdruck nach EWOLDT [11] gegeben. Die Anordnung des gesamten Spektrums an LISSAJOUS Diagrammen ist im



(a) (b)

Abbildung 5.7: (a) Erstes LISSAJOUS Diagramm und (b) zweites LISSAJOUS Diagramm des scherverdünnenden rCROSS-BINGHAM-HOOKE Elements zu verzerrungsgesteuerten sinusförmigen Anregungen für $G = 5\cdot10^4$Pa, $\eta_0 = 500$Pas, $\eta_\infty = 18.75$Pas, $K_1 = 10^4$s und $\tau_y = 5\cdot10^{-5}$Pa; [$\hat{\gamma} = 10^{-8}$, MODE ω/1: $\omega = 1\,\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}$]: ·····; [MODE $\hat{\gamma}$/3 & ω/1: $\hat{\gamma} = \hat{\gamma}_{\mathrm{cbh.2}} = 7\cdot10^{-8}$, $\omega = 1\,\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}$]: - · - · -; [MODE $\hat{\gamma}$/2: $\hat{\gamma} = \hat{\gamma}_{\mathrm{cbh.1}} = 3.1\cdot10^{-9}$, $\omega = 10\,\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}$]: – – –; [$\hat{\gamma} = 10^{-8}$, $\omega = 10\,\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}$]: - · - · -; [MODE $\hat{\gamma}$/3: $\hat{\gamma} = \hat{\gamma}_{\mathrm{cbh.2}} = 7\cdot10^{-8}$, $\omega = 10\,\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}$]: ——; [MODE $\hat{\gamma}$/4 & ω/2: $\hat{\gamma} = 2\cdot10^{-6}$, $\omega = \frac{1}{\alpha_0} = 100\,\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}$]: ——; [$\hat{\gamma} = 10^{-5}$, MODE ω/2: $\omega = \frac{1}{\alpha_0} = 100\,\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}$]: – – –

ersten und zweiten PIPKIN Diagramm (Abbildungen 5.8 und 5.9) in Abhängigkeit der Lastparameter $(\hat{\gamma}, \omega)$ zu erkennen. Die LISSAJOUS Diagramme, die denen eines BINGHAM-HOOKE Elements aus Boisly et al. (2017; Abb. A.17b, A.17c) ähneln, sind in der gelben Box zusammengefasst. Diejenigen mit Ähnlichkeiten zum rCROSS-MAXWELL Element (Boisly et al. 2015; Abb. 20, 21) sind grau hinterlegt. LISSAJOUS Diagramme ähnlich zu denen des rCROSS Dämpfers sind blau hervorgehoben. Der rCROSS Dämpfer sowie dessen charakteristische Zustände, MODE 2 – – –, MODE 3 - · - · - und MODE 4 ——, sind in Boisly et al. (2015; Abb. 7) definiert. Des Weiteren treten LISSAJOUS Diagramme auf, die denen der HOOKEschen Feder, des NEWTONschen Dämpfers, des MAXWELL, Reib- (Maxey et al. 2008; Abb. 1), PRANDTL (Boisly et al. 2014b; Abb. 7) und BINGHAM Elements (Maxey et al. 2008; Abb. 1) entsprechen. Daran ist zu erkennen, dass das Spektrum aller LISSAJOUS Diagramme, welches zweckmäßig in einem PIPKIN Diagramm angeordnet wird, für ein Material beziehungsweise Materialmodell charakteristisch ist (*Folgerung 14*).

Zur Berechnung des Speicher- und Verlustmoduls des scherverdünnenden rCROSS-BINGHAM-HOOKE Elements werden die Spannungsantworten nach der Vorschrift entsprechend den Gleichungen (3.121) und (3.122) numerisch integriert. Die numerische Integration erfolgt mit NEWTON-*Codes* vom Grad $n = 5$ (Freund und Hoppe 2007; S. 166) [12]

$$\Delta x = \frac{x_2 - x_1}{5} = \text{konst} \tag{5.60}$$

$$\int_{x_1}^{x_2} y(x)\,dx \approx \frac{x_2 - x_1}{288}\Big\{19\big[y(x_1) + y(x_1 + 5\Delta x)\big] + 75\big[y(x_1 + \Delta x) + y(x_1 + 4\Delta x)\big] + 50\big[y(x_1 + 2\Delta x) + y(x_1 + 3\Delta x)\big]\Big\} \tag{5.61}$$

solange, bis die Gleichungen (3.151) und (3.152) mit $\kappa_1 \le 0.05$ erfüllt sind. NEWTON-Codes kommen im Rahmen dieser Arbeit für die numerische Integration zur Anwendung, da sie für Datenreihen mit konstan-

[11] (Ewoldt 2006; S. 34), (Ewoldt et al. 2007a; S. 634), (Ewoldt 2009; S. 59), (Ewoldt et al. 2010; S. 191, 209)

[12] NEWTON-Codes bis zum Grad $n = 4$ werden bei (Zurmühl 1965; S. 239), Oelschlägel und Matthäus (1988; S. 48), Dahmen und Reusken (2008; S. 353) und Plato (2006; S. 117) diskutiert.

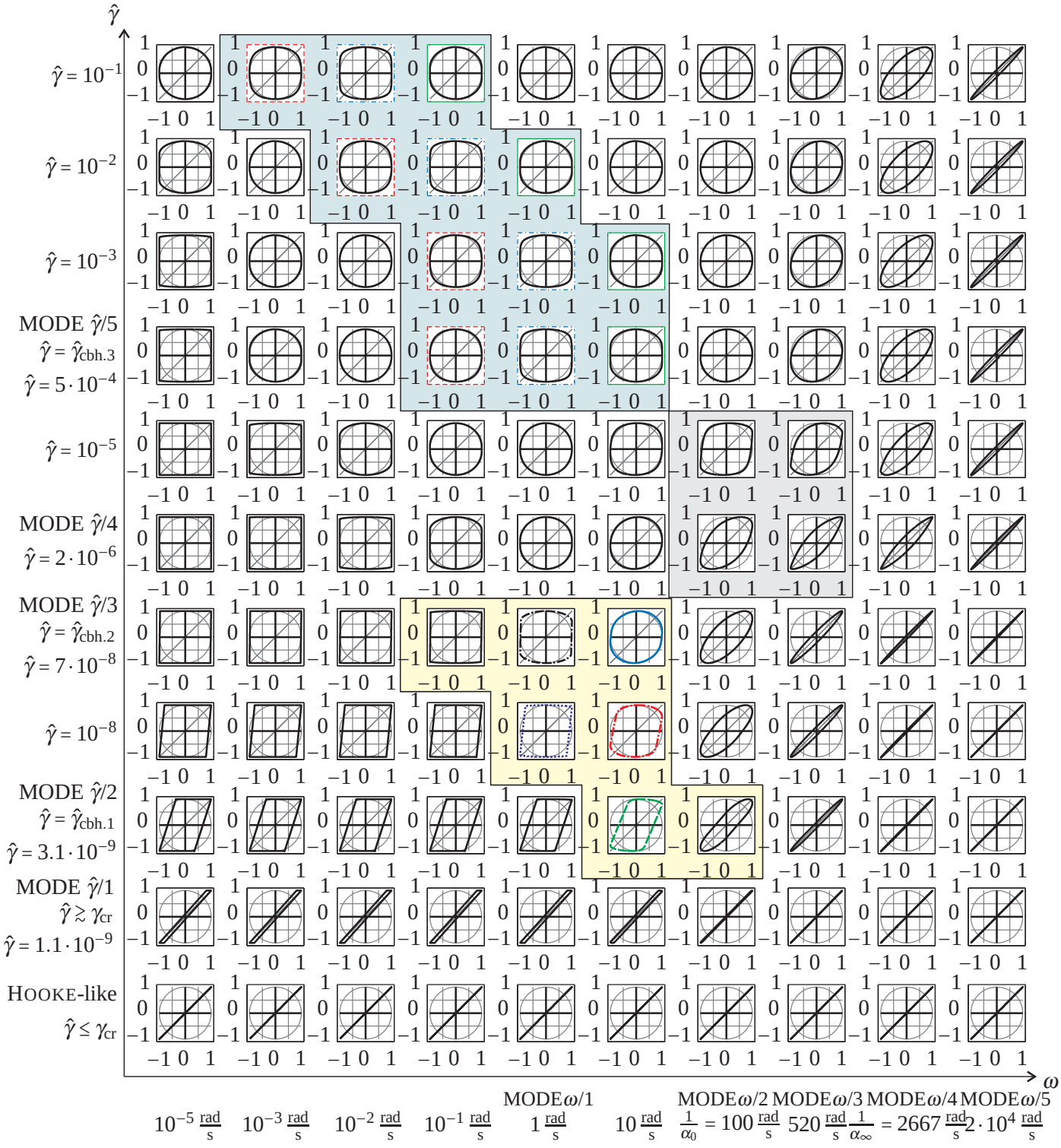


Abbildung 5.8: Erstes PIPKIN Diagramm, $\tau_{cbh.\infty}/\mathrm{MAX}\{\tau_{cbh.\infty}\}$ aufgetragen über $\gamma_{cbh}/\hat{\gamma}$, für das scherverdünnende rCROSS-BINGHAM-HOOKE Element mit $G = 5 \cdot 10^4$Pa, $\eta_0 = 500$Pas, $\eta_\infty = 18.75$Pas, $K_1 = 10^4$s und $\tau_y = 5 \cdot 10^{-5}$Pa; gelbe Box: BINGHAM-HOOKE Verhalten; graue Box: Verhalten eines scherverdünnenden rCROSS-MAXWELL Elements; blaue Box: Verhalten des scherverdünnenden rCROSS Dämpfers in MODE 2 – – –, MODE 3 - · - · - und MODE 4 ——

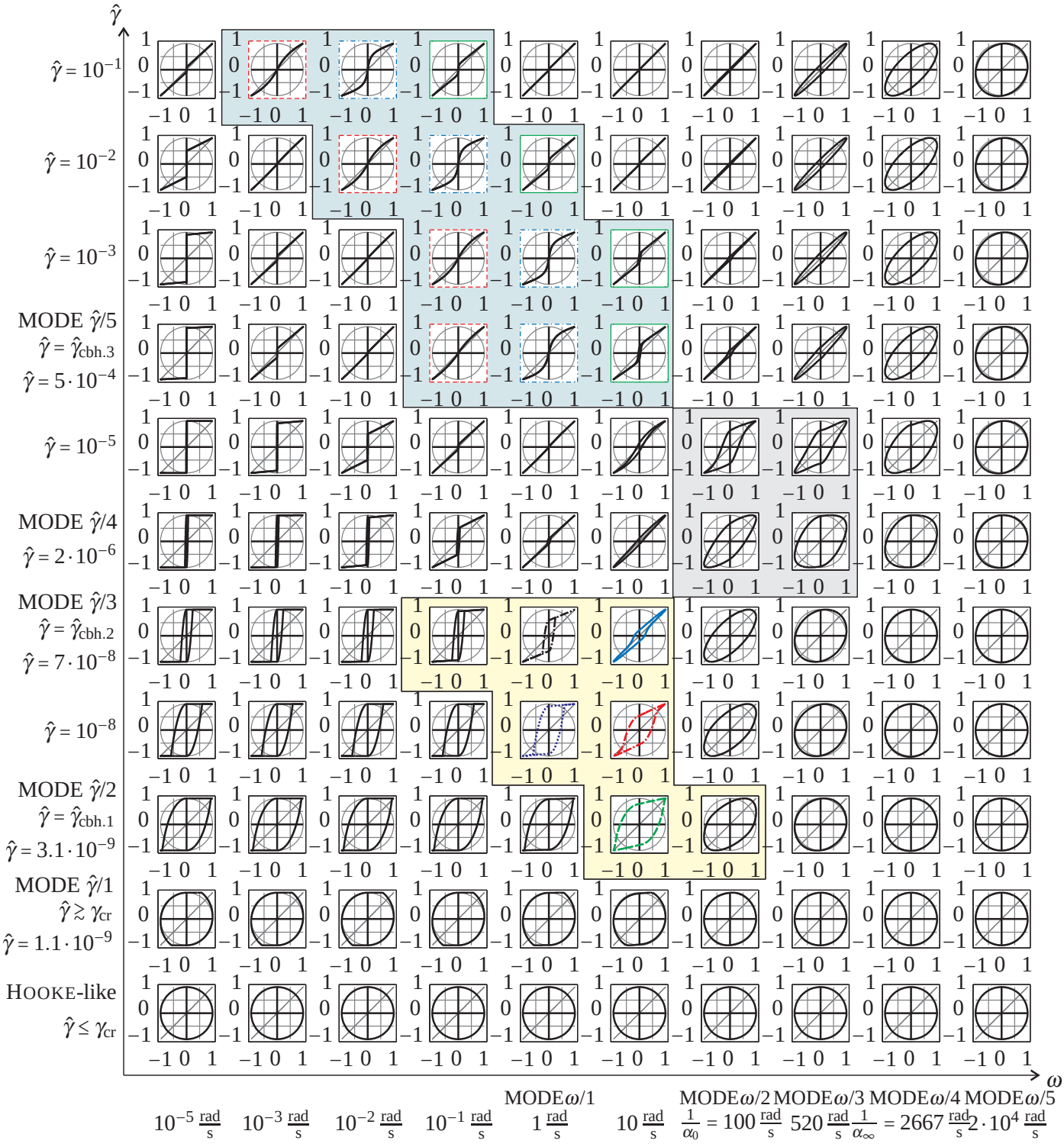
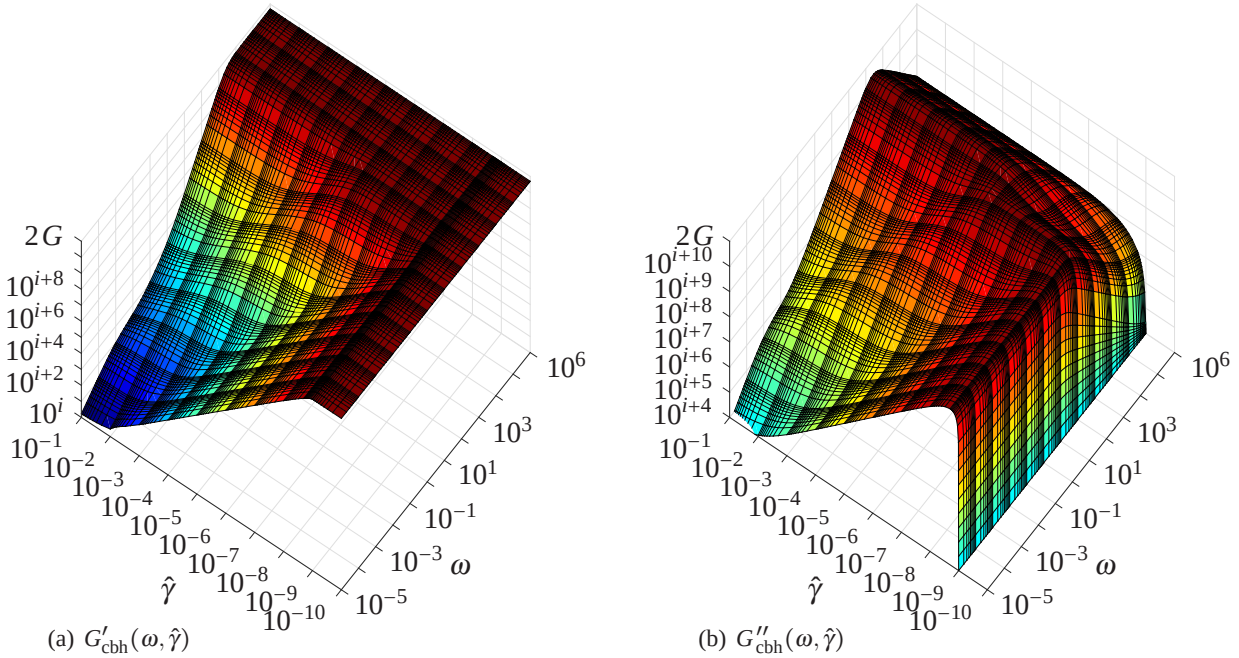


Abbildung 5.9: Zweites PIPKIN Diagramm, $\tau_{cbh.\infty}/\text{MAX}\{\tau_{cbh.\infty}\}$ aufgetragen über $\dot{\gamma}_{cbh}/\hat{\gamma}\omega$, für das scherverdünnende rCROSS-BINGHAM-HOOKE Element mit $G = 5 \cdot 10^4$Pa, $\eta_0 = 500$Pas, $\eta_\infty = 18.75$Pas, $K_1 = 10^4$s und $\tau_y = 5 \cdot 10^{-5}$Pa; gelbe Box: BINGHAM-HOOKE Verhalten; graue Box: Verhalten eines scherverdünnenden rCROSS-MAXWELL Elements; blaue Box: Verhalten des scherverdünnenden rCROSS Dämpfers in MODE 2 – – –, MODE 3 -·-·- und MODE 4 ——

ter Zeitschrittweite $\Delta x^k = x^{k+1} - x^k = \text{konst} = \Delta x$ anwendbar sind und genauere Ergebnisse als die Trapezregel liefern. Als Resultat erhält man Speicher- und Verlustmoduli des scherverdünnenden rCROSS-BINGHAM-HOOKE Elements, die sowohl von der Kreisfrequenz als auch von der Schubverzerrungsamplitude abhängen. Die grafische Darstellung als 3D Diagramme ist in Abbildung 5.10 zu finden. Sie gibt einen ersten



(a) $G'_{\text{cbh}}(\omega, \hat{\gamma})$ (b) $G''_{\text{cbh}}(\omega, \hat{\gamma})$

Abbildung 5.10: Speicher- und Verlustmodul des scherverdünnenden rCROSS-BINGHAM-HOOKE Elements in Abhängigkeit der Kreisfrequenz und der Schubverzerrungsamplitude für $G = 5 \cdot 10^4$Pa, $\eta_0 = 500$Pas, $\eta_\infty = 18.75$Pas, $K_1 = 10^4$s und $\tau_y = 5 \cdot 10^{-5}$Pa

Eindruck zu der Abhängigkeit des Speicher- und Verlustmoduls von den Lastparametern $(\hat{\gamma}, \omega)$ wieder. Der Vorfließbereich ist als derjenige Bereich erkennbar, für den der Verlustmodul Null ist. Dreidimensional dargestellte Diagramme sind jedoch weder dazu geeignet, charakteristische Punkte hervorzuheben, noch die diffizilen Flächen höherharmonischer Materialfunktionen zu visualisieren. Daher werden Speicher- und Verlustmodul im Folgenden für ausgewählte Schnittebenen in zweidimensionaler Form präsentiert. Dies ermöglicht außerdem den Abgleich zu experimentell ermittelten Daten. Die 2D Diagramme sind somit die Grundlage für eine physikalisch begründete Parameteridentifikation unter Berücksichtigung charakteristischer Punkte. Eine Schnittebene des 3D Diagramms für $\omega = \text{konst}$ definiert einen MODE $\omega/\ldots$. Für $\hat{\gamma} = \text{konst}$ resultiert eine Schnittebene, die als MODE $\hat{\gamma}/\ldots$ bezeichnet werden soll. Auf diese Art und Weise können im Folgenden für das scherverdünnende rCROSS-BINGHAM-HOOKE Element fünf charakteristische Erscheinungsformen sowohl in Abhängigkeit der Schubverzerrungsamplitude, MODE $\omega/1$ bis $\omega/5$, als auch in Abhängigkeit von der Kreisfrequenz, MODE $\hat{\gamma}/1$ bis $\hat{\gamma}/5$, identifiziert werden.

5.4.1 FOURIER Transformierte in Abhängigkeit der Schubverzerrungsamplitude für konstante Kreisfrequenzen

Da keine analytischen Lösungen für die nichtlinear konstitutiven Beziehungen ermittelt werden konnten, werden Speicher- und Verlustmoduli numerisch ermittelt. Somit besteht keine Möglichkeit, analytische Ausdrücke charakteristischer Punkte als Resultat einer Kurvendiskussion abzuleiten. Da aber charakteristische Punkte der *Grenzfälle* des rCROSS-BINGHAM-HOOKE Elements bekannt sind, können deren charakteristische Punkte in entsprechenden Lastfällen und für ausgewählte Bereiche auf das rCROSS-BINGHAM-HOOKE Element übertragen werden. Die lokalen Charakteristiken ausgewählter Bereiche werden durch den Abgleich der lokalen Spannungsantwort mit den Spannungsantworten der mechanischen Grenzfälle identifiziert. Mechanische Grenzfälle des rCROSS-BINGHAM-HOOKE Elements sind

- der rCROSS Dämpfer (Boisly et al. 2015; Absch. 5),

- das PRANDTL Element (Boisly et al. 2014b),
- das rCROSS-MAXWELL Element (Boisly et al. 2015; Absch. 7) und
- das BINGHAM-HOOKE Element (Boisly et al. 2017).

Der Abgleich der Spannungsantwort geschieht in geeigneter Weise unter Verwendung von LISSAJOUS Diagrammen. Die ausgewählten Bereiche werden in den folgenden Abbildungen oberhalb der Graphen zu Speicher- und Verlustmodul durch das jeweilige rheologische Grenzmodell dargestellt und abgegrenzt. In diesem Sinn können für alle Modi $\omega/\ldots$ das Anfangsplateau des Speichermoduls

$$G'_{\mathrm{cbh}}\left(\hat{\gamma} < \gamma_{\mathrm{cr}}\right)\big|_{\omega/\ldots} = G'_{\mathrm{s}} = G\,, \tag{5.62}$$

entsprechend dem BINGHAM-HOOKE Element (Boisly et al. 2017; Gl. (19)) und PRANDTL Element (Boisly et al. 2014b; Gl. (33)) identifiziert werden. Die kritische Schubverzerrungsamplitude

$$\gamma_{\mathrm{cr}} = \frac{\tau_{\mathrm{y}}}{G} \tag{5.63}$$

kann unter der Annahme von $\tau_{\mathrm{cbh}}(t = 0) = 0$ ebenfalls mittels des BINGHAM-HOOKE Elements (Boisly et al. 2017; Gl. (A.4)) und des PRANDTL Elements (Boisly et al. 2014b; Gl. (24)) abgeleitet werden.

Die erste Schnittebene konstanter Kreisfrequenz definiert die Bezeichnung MODE $\omega/1$. Das Verhalten ist in üblicher zweidimensionaler Form in Abbildung 5.12 dargestellt. Da $|\dot{\gamma}_{\mathrm{b.cbh}}|$ für „kleine“ Verzerrungsamplituden vernachlässigbar ist, verhält sich das scherverdünnende rCROSS-BINGHAM-HOOKE Element zunächst wie eine HOOKEsche Feder und anschließend wie ein PRANDTL Element (*Folgerung 5*). Das absolute Maximum des Verlustmoduls (Boisly et al. 2014b; Gl. (39)) und der Höherharmonischen $b_{\mathrm{cbh}.k,\mathrm{ungerade}}$ (Boisly et al. 2014b; Gl. (50)) sowie die Nullstelle der Höherharmonischen $a_{\mathrm{cbh}.k,\mathrm{ungerade}}$ (Boisly et al. 2014b; Gl. (45))

$$\mathrm{MAX}\{G''_{\mathrm{cbh}}(\hat{\gamma})\}\big|_{\omega/1} = G''_{\mathrm{cbh}}\left(\hat{\gamma} = 2\,\gamma_{\mathrm{cr}}\right) \tag{5.64}$$

$$G''_{\mathrm{cbh}}\left(\hat{\gamma} = 2\,\gamma_{\mathrm{cr}}\right)\big|_{\omega/1} = G''_{\mathrm{p}}\left(\hat{\gamma} = 2\,\gamma_{\mathrm{cr}}\right) = \frac{G}{\pi} \tag{5.65}$$

$$\mathrm{MAX}\left\{b_{\mathrm{cbh}.k,\mathrm{ungerade}}(\hat{\gamma})\right\}_{\omega/1} = b_{\mathrm{cbh}.k,\mathrm{ungerade}}\left(\hat{\gamma} = 2\,\gamma_{\mathrm{cr}}\right)\big|_{\omega/1} \qquad k = 2n+1,\, n \in \mathbb{N}^{+} \tag{5.66}$$

$$= b_{\mathrm{p}.k,\mathrm{ungerade}}\left(\hat{\gamma} = 2\,\gamma_{\mathrm{cr}}\right) \tag{5.67}$$

$$= \frac{2G\left(k + (-1)^{\frac{k+1}{2}}\right)}{\pi(k+1)(k-1)k} \tag{5.68}$$

$$a_{\mathrm{cbh}.k,\mathrm{ungerade}}\left(\hat{\gamma} = 2\,\gamma_{\mathrm{cr}}\right)\big|_{\omega/1} = a_{\mathrm{p}.k,\mathrm{ungerade}}\left(\hat{\gamma} = 2\,\gamma_{\mathrm{cr}}\right) = 0 \qquad k = 2n+1,\, n \in \mathbb{N}^{+} \tag{5.69}$$

ergeben sich in Analogie zum PRANDTL Element (Boisly et al. 2014b; Gl. (39), (45), (50)) und definieren *charakteristische Punkte* (*Folgerung 13*). Hierbei bedeutet $(\,)|_{\omega/1}$ die Auswertung des Ausdrucks $(\,)$ mit der für MODE $\omega/1$ konstant gehaltenen Kreisfrequenz. In den grafischen Darstellungen ist zu erkennen, dass ratenabhängige Effekte mit steigender Verzerrungsamplitude mehr Gewicht erhalten. Sie sind folglich nicht vernachlässigbar. Abbildung 5.12(a) kann entnommen werden, dass sich das scherverdünnende rCROSS-BINGHAM-HOOKE Element zunächst wie ein BINGHAM-HOOKE Element mit $\eta = \eta_0$ verhält, bevor es das mechanische Verhalten eines rCROSS Dämpfers annimmt. Folgerichtig können die charakteristischen Punkte

$$\mathfrak{F}\left\{G''_{\mathrm{cbh}}\left(\hat{\gamma} \approx \frac{\dot{\hat{\gamma}}_{\mathrm{c}.1}}{\omega}\right)\right\}_{\omega/1} = G''_{\mathrm{d}} = \eta_0\,\omega \tag{5.70}$$

$$\mathfrak{F}\left\{\lim_{\hat{\gamma}\to\infty} G''_{\mathrm{cbh}}\right\}_{\omega/1} = G''_{\mathrm{d}} = \eta_\infty\,\omega \tag{5.71}$$

motiviert werden. Der Operator $\mathfrak{F}\{(\,)\}_{\omega/1}$ ist hier so zu verstehen, dass er für MODE $\omega/1$ vom Ausdruck $(\,)$ die mathematische Beschreibungsweise des funktionellen Zusammenhangs extrahiert. Normierte Intensitäten sind in Abbildung 5.12(c) dargestellt. Sie zeigen ein absolutes Maximum analog zum PRANDTL

Element und ein relatives Maximum entsprechend dem rCROSS Dämpfer. Wenn nichtlineares Materialverhalten in guter Näherung vernachlässigt werden kann, so verschwinden normierte Höherharmonische (Kirsch et al. 2001; S. 554). Dies ist zum einen der Fall, wenn das BINGHAM-HOOKE ähnliche Verhalten in das rCROSS ähnliche Verhalten mit NEWTONschem Charakter $\eta = \eta_0$ übergeht. Zum anderen sind normierte Höherharmonische vernachlässigbar gering, wenn die Verzerrungsamplitude derart groß ist, dass das rCROSS ähnliche Verhalten NEWTONschen Charakter mit $\eta = \eta_\infty$ annimmt. Daraus können in Analogie zum rCROSS Dämpfer nach Boisly et al. (2015; Abb. 2) die charakteristischen Schubverzerrungsamplituden $\frac{\hat{\dot{\gamma}}_{c.1}}{\omega}$, $\frac{1}{K_1\omega}$, $\frac{\hat{\dot{\gamma}}_{c.2}}{\omega}$ und $\frac{\dot{\gamma}_{c.3}}{\omega}$ mit

$$\dot{\gamma}_{c.3} = h\,\hat{\dot{\gamma}}_{c.2} \tag{5.72}$$

motiviert werden. Mittels des Parameters h kann sichergestellt werden, dass die Schubverzerrungsrate $\dot{\gamma}_{cbh} = \dot{\gamma}_{c.3}\cos(\omega t)$ für $\kappa_3 \cdot 100\%$ der Periodendauer T größer als $\dot{\gamma}_{c.2}$ ist. Die entsprechende Bedingung

$$h(\kappa_3) = \frac{1}{\cos\left(\frac{\kappa_3\pi}{2}\right)} \qquad 0 \le \kappa_3 < 1 \tag{5.73}$$

kann in Abbildung 5.11 durch Auswerten einer Viertelperiode abgeleitet werden.

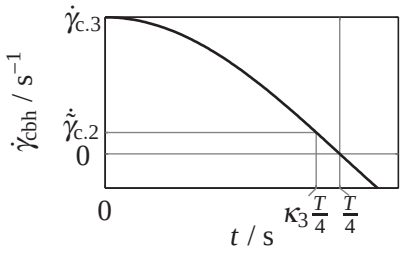


Abbildung 5.11: Ansatz zur Berechnung des Parameters $h(\kappa_3)$ für sinusförmig verlaufende Verzerrungsraten

Die Darstellung der Harmonischen in der zweiten Schnittebene, MODE $\omega/2$, ist in Abbildung 5.13 zu erkennen. Das Materialverhalten wird von dem eines rCROSS-MAXWELL Elements dominiert, für das nach Boisly et al. (2015; Gl. (80)-(83)) die charakteristischen Punkte

$$G'_{m.0} = \frac{G\eta_0^2\omega^2}{\eta_0^2\omega^2 + G^2} \tag{5.74}$$

$$G''_{m.0} = \frac{G^2\eta_0\omega}{\eta_0^2\omega^2 + G^2} \tag{5.75}$$

$$G'_{m.\infty} = \frac{G\eta_\infty^2\omega^2}{\eta_\infty^2\omega^2 + G^2} \tag{5.76}$$

$$G''_{m.\infty} = \frac{G^2\eta_\infty\omega}{\eta_\infty^2\omega^2 + G^2} \tag{5.77}$$

existieren. Für den scherverdünnenden Fall tritt MODE $\omega/2$ für $\omega = \frac{1}{\alpha_0}$ auf. Die charakteristischen Punkte kann man daher in Analogie zu Boisly et al. (2015; Abb. 14, Gl. (80)-(83)) motivieren. Als Konsequenz ergibt sich der Schnittpunkt zwischen Speicher- und Verlustmodul zu

$$G'_{cbh}(\hat{\gamma})\big|_{\omega/2} = G''_{cbh}(\hat{\gamma})\big|_{\omega/2} = G'_{m.0} = G''_{m.0} = \frac{G}{2}\,. \tag{5.78}$$

Im Gegensatz dazu wird in der Literatur [13] auch postuliert, dass der Schnittpunkt $G'(\hat{\gamma}) = G''(\hat{\gamma})$ den Fließbeginn und die Fließverzerrung definiert. Dies trifft, wie an Gleichung (5.78) zu erkennen ist, für das scherverdünnende rCROSS-BINGHAM-HOOKE Element nicht zu. Stattdessen ist die Fließverzerrung identisch

[13] (Pham et al. 2006; S. 627), (Pham et al. 2008; S. 659, Tab. 2), (Le Grand und Petekidis 2008; S. 583, 585), (Carrier und Petekidis 2009; S. 255), (Renou et al. 2010; S. 1227), (Koumakis und Petekidis 2011; S. 2459, 2461), (Laurati et al. 2011; S. 682), (Lim und Ahn 2013; S. 648), (Koos et al. 2014; S. 951)

der kritischen Schubverzerrung. Die Fließverzerrung fällt folglich mit dem Ansteigen des Verlustmoduls beziehungsweise mit dem Abfall des Speichermoduls zusammen. (*Folgerung 15*) Ein weiterer charakteristischer Punkt ist der Plateauwert des Verlustmoduls im Unendlichen

$$\mathfrak{F}\left\{\lim_{\hat{\gamma}\to\infty} G''_{\mathrm{cbh}}\right\}_{\omega/2} = G''_{\mathrm{d}} = \eta_\infty\,\omega\ , \tag{5.79}$$

der sich für $\hat{\gamma} > \frac{\dot{\gamma}_{\mathrm{c},3}}{\omega}$ einstellt. Die normierten Intensitäten sind maximal, wenn sich das scherverdünnende rCROSS-BINGHAM-HOOKE Element analog zum rCROSS-MAXWELL Element verhält. Sie verschwinden für ausreichend große Verzerrungsamplituden, wenn das scherverdünnende rCROSS-BINGHAM-HOOKE Element annähernd NEWTONsches Verhalten mit $\eta = \eta_\infty$ zeigt.
Die harmonischen Materialfunktionen für MODE $\omega/3$ sind in Abbildung 5.14 dargestellt. Er ist durch das Verhalten eines rCROSS-MAXWELL Elements nach Boisly et al. (2015; Abb. 16) motiviert. Die Definition für MODE $\omega/3$

$$G''_{\mathrm{cbh}}(\hat{\gamma} \gg \gamma_{\mathrm{cr}})\big|_{\omega/3} = \lim_{\hat{\gamma}\to\infty} G''_{\mathrm{cbh}}\Big|_{\omega/3} = G''_{\mathrm{m}.0} = G''_{\mathrm{m}.\infty} \tag{5.80}$$

beinhaltet, dass das erste Plateau des Verlustmoduls $G''_{\mathrm{m}.0}$ mit dem zweiten Plateau $G''_{\mathrm{m}.\infty}$ identisch ist. Weitere charakteristische Punkte sind das Endplateau des Speichermoduls, $G'_{\mathrm{m}.\infty}$, im MAXWELL ähnlichen Bereich sowie das Maximum des Verlustmoduls

$$\lim_{\hat{\gamma}\to\infty} G'_{\mathrm{cbh}}\Big|_{\omega/3} = G'_{\mathrm{m}.\infty} \tag{5.81}$$

$$\mathrm{MAX}\left\{G''_{\mathrm{cbh}}(\hat{\gamma})\right\}_{\omega/3} \approx \frac{G}{2} \tag{5.82}$$

nahe dem Schnittpunkt zwischen Speicher- und Verlustmodul. Die normierten Intensitäten sind genau dann vernachlässigbar, wenn das Verhalten des scherverdünnenden rCROSS-BINGHAM-HOOKE Elements abschnittsweise annähernd durch die linearen Modelle der HOOKEschen Feder oder dem MAXWELL Element mit $\eta = \eta_0$ oder $\eta = \eta_\infty$ beschrieben werden kann.
Die Schnittebene MODE $\omega/4$ tritt für scherverdünnendes Verhalten bei $\omega = \frac{1}{\alpha_\infty}$ auf. Die entsprechenden harmonischen Materialfunktionen sind in Abbildung 5.15 dargestellt. Es sind die charakteristischen Punkte

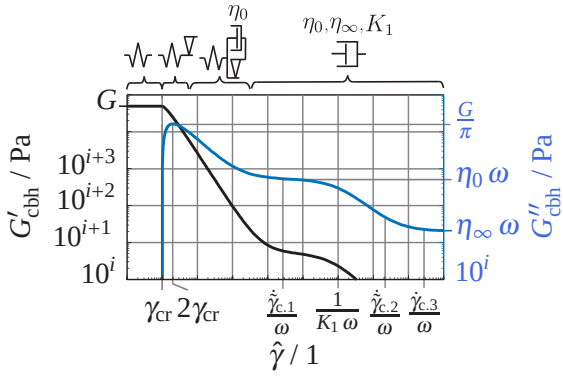
$$\lim_{\hat{\gamma}\to\infty} G'_{\mathrm{cbh}}\Big|_{\omega/4} = \lim_{\hat{\gamma}\to\infty} G''_{\mathrm{cbh}}\Big|_{\omega/4} = G'_{\mathrm{m}.\infty} = G''_{\mathrm{m}.\infty} = \frac{G}{2} \tag{5.83}$$

$$G'_{\mathrm{cbh}}(\hat{\gamma} < \gamma_{\mathrm{cr}})\big|_{\omega/4} = G'_{\mathrm{cbh}}(\hat{\gamma} < \gamma_{\mathrm{cr}})\big|_{\omega/1} = G \tag{5.84}$$

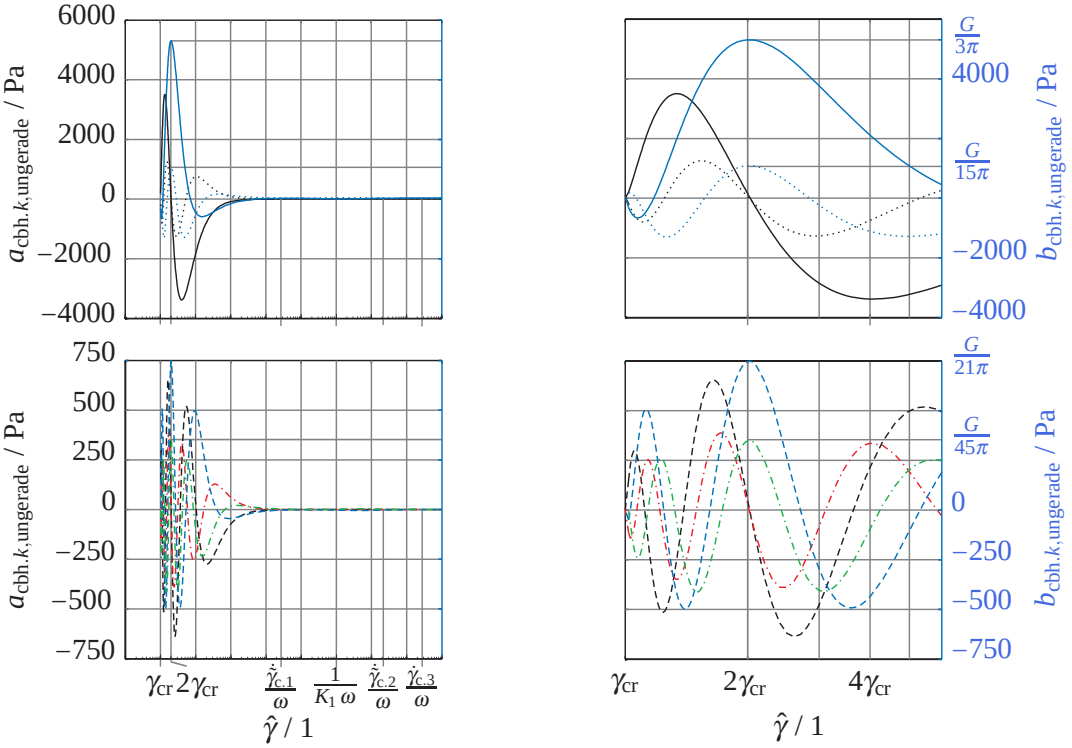
zu erkennen. Da die normierten Intensitäten geringer als 5 % sind, können sie vernachlässigt werden. Dies ist damit zu erklären, dass das Verhalten des scherverdünnenden rCROSS-BINGHAM-HOOKE Elements über den gesamten Amplitudenbereich durch lineare Materialmodelle, der HOOKEschen Feder und dem MAXWELL Element mit $\eta = \eta_\infty$, abbildbar ist.
Für $\omega \gg \frac{1}{\alpha_\infty}$ ergibt sich für das scherverdünnende rCROSS-BINGHAM-HOOKE Element MODE $\omega/5$. Anhand der Materialfunktionen, die in Abbildung 5.16 dargestellt sind, ist zu erkennen, dass es sich in guter Näherung über den gesamten Amplitudenbereich wie eine HOOKEsche Feder verhält. Demnach gilt

$$G'_{\mathrm{cbh}}(\hat{\gamma})\big|_{\omega/5} = G \tag{5.85}$$

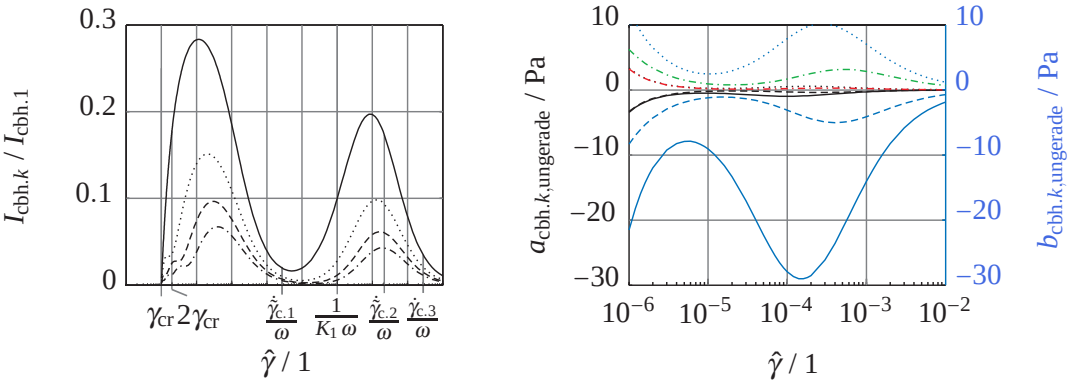
und normierte Intensitäten sind nahezu Null.



(a) Speicher- und Verlustmodul

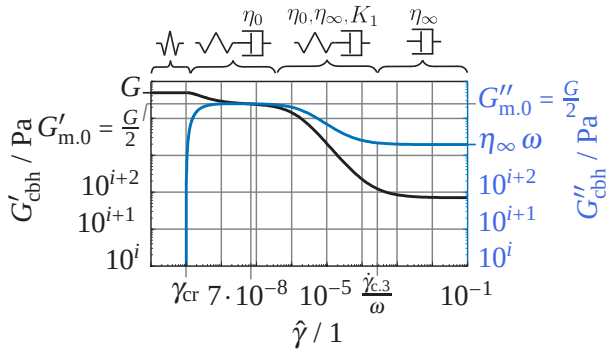


(b) Ungerade Höherharmonische

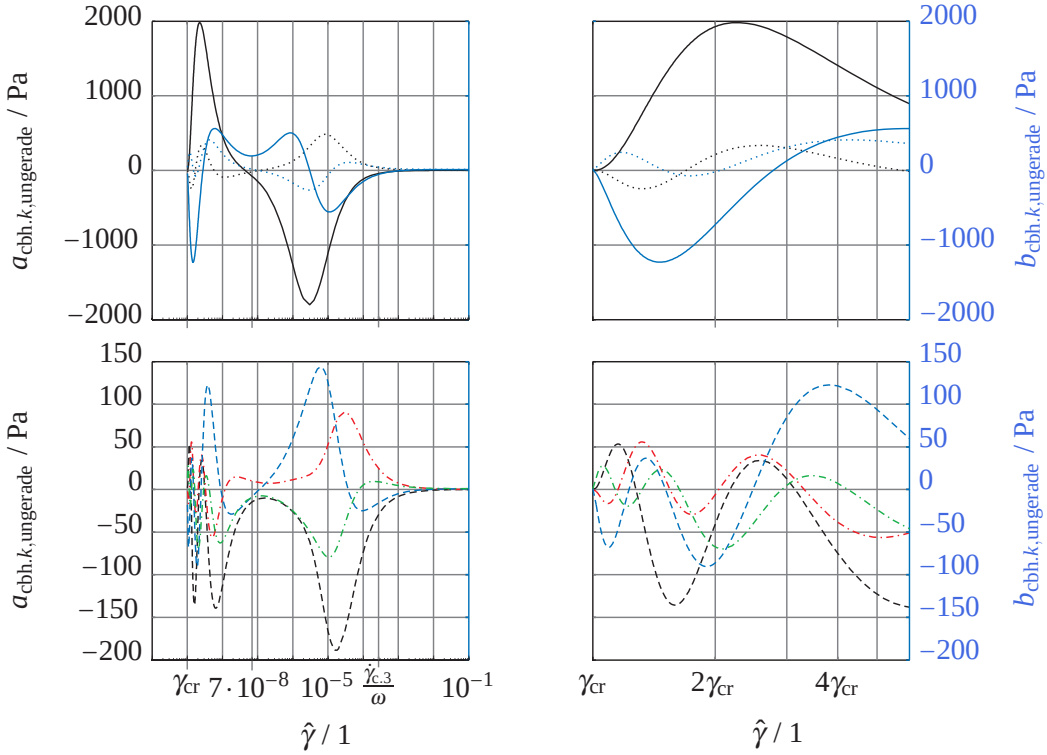


(c) Normierte Intensitäten und vergrößerte Ansichten von Höherharmonischen

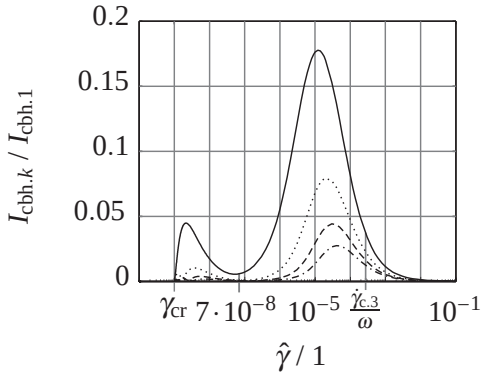
Abbildung 5.12: MODE ω/1: Materialfunktionen des scherverdünnenden rCross-Bingham-Hooke Elements in Abhängigkeit der Schubverzerrungsamplitude für $\omega = 1\,\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}$, $G = 5 \cdot 10^4$Pa, $\eta_0 = 500$Pas, $\eta_\infty = 18.75$Pas, $K_1 = 10^4$ s, $\tau_y = 5 \cdot 10^{-5}$Pa, $\kappa_2 = 0.05$ und $\kappa_3 = 0.95$; in (b) und (c) mit $k = 3$: —— & — —, $k = 5$: ····· & ·····, $k = 7$: – – – & – – –, $k = 9$: -·-·-, $a_{\mathrm{bh}.9}$: -·-·- und $b_{\mathrm{bh}.9}$: -·-·-



(a) Speicher- und Verlustmodul

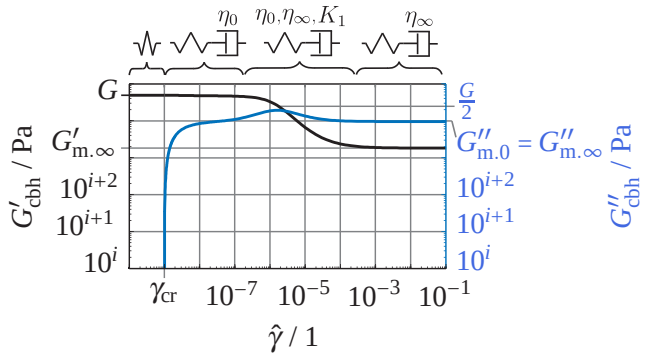


(b) Ungerade Höherharmonische

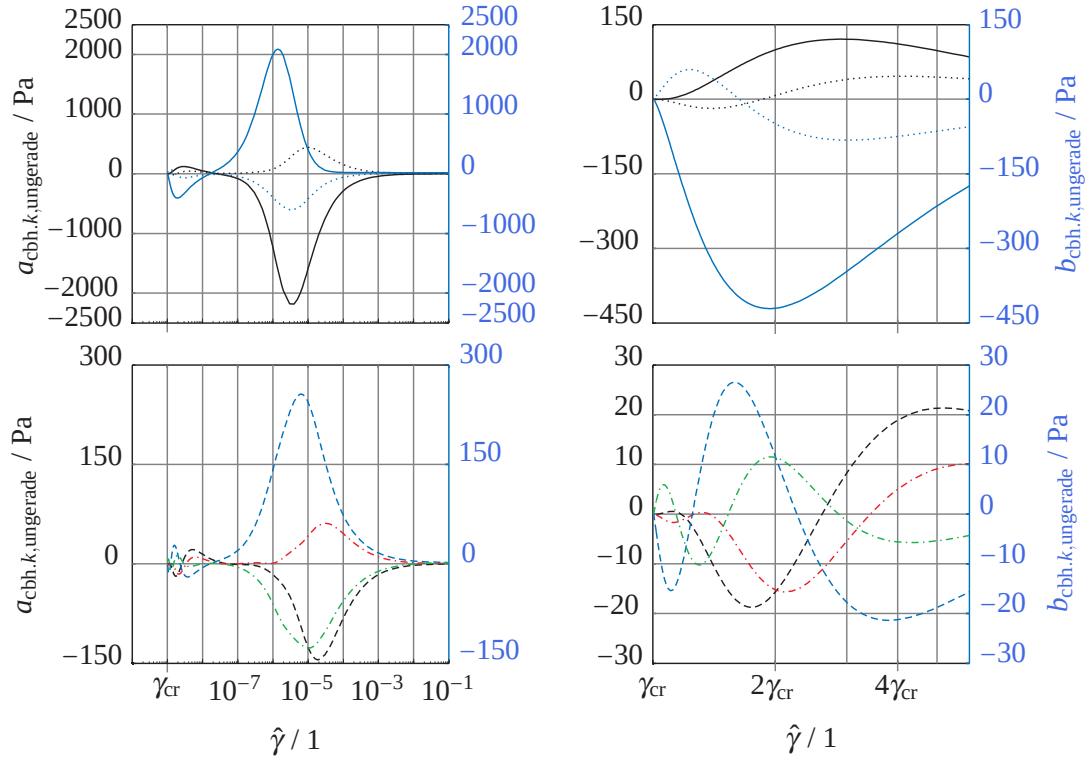


(c) Normierte Intensitäten

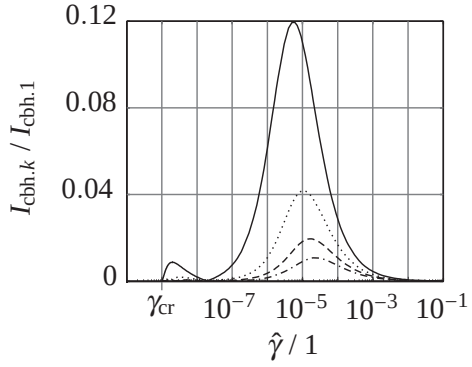
Abbildung 5.13: MODE $\omega/2$: Materialfunktionen des scherverdünnenden rCROSS-BINGHAM-HOOKE Elements in Abhängigkeit der Schubverzerrungsamplitude für $\omega = \frac{1}{\alpha_0} = 100\,\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}$, $G = 5\cdot10^4$Pa, $\eta_0 = 500$Pas, $\eta_\infty = 18.75$Pas, $K_1 = 10^4$s, $\tau_{\mathrm{y}} = 5\cdot10^{-5}$Pa, $\kappa_2 = 0.05$ und $\kappa_3 = 0.95$; in (b) und (c) mit $k = 3$: —— & ——, $k = 5$: ····· & ·····, $k = 7$: – – – & – – –, $k = 9$: -·-·-, $a_{\mathrm{bh}.9}$: -·-·- und $b_{\mathrm{bh}.9}$: -·-·-



(a) Speicher- und Verlustmodul

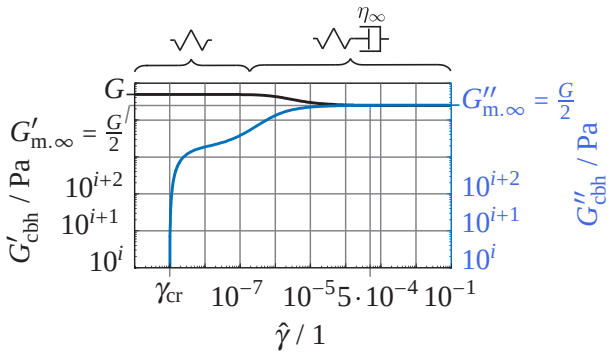


(b) Ungerade Höherharmonische

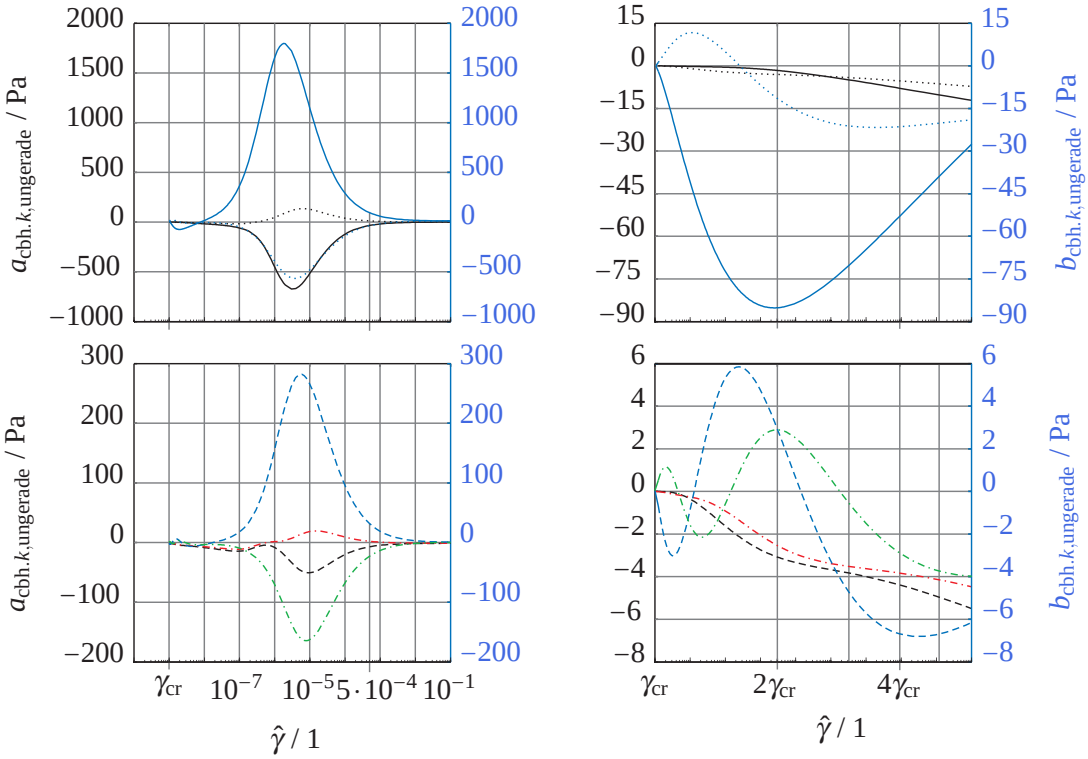


(c) Normierte Intensitäten

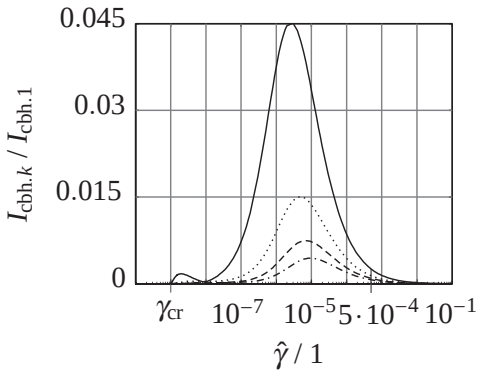
Abbildung 5.14: MODE ω/3: Materialfunktionen des scherverdünnenden rCross-Bingham-Hooke Elements in Abhängigkeit der Schubverzerrungsamplitude für $\omega = 520\,\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}$, $G = 5 \cdot 10^4$Pa, $\eta_0 = 500$Pas, $\eta_\infty = 18.75$Pas, $K_1 = 10^4$s und $\tau_y = 5 \cdot 10^{-5}$Pa; in (b) und (c) mit $k = 3$: —— & ——, $k = 5$: ····· & ·····, $k = 7$: – – – & – – –, $k = 9$: - · - · -, $a_{\mathrm{bh}.9}$: - · - · - und $b_{\mathrm{bh}.9}$: - · - · -



(a) Speicher- und Verlustmodul

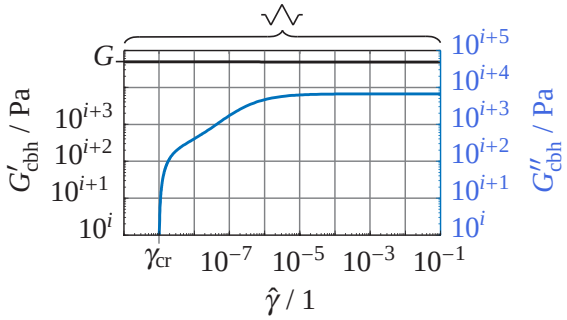


(b) Ungerade Höherharmonische

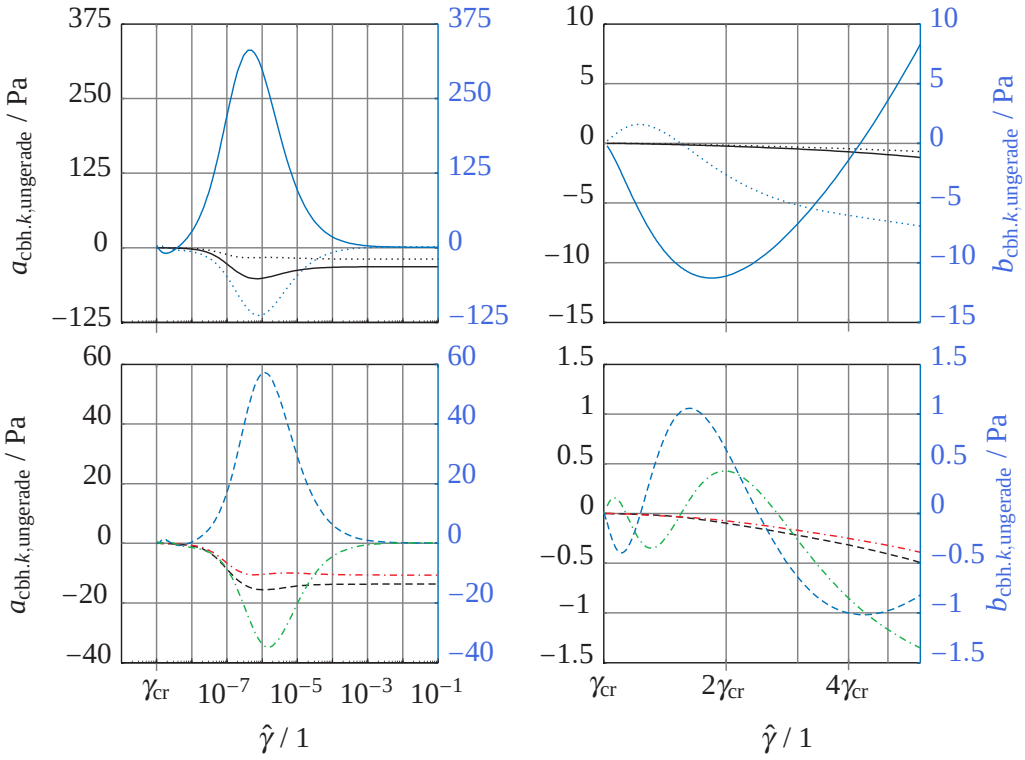


(c) Normierte Intensitäten

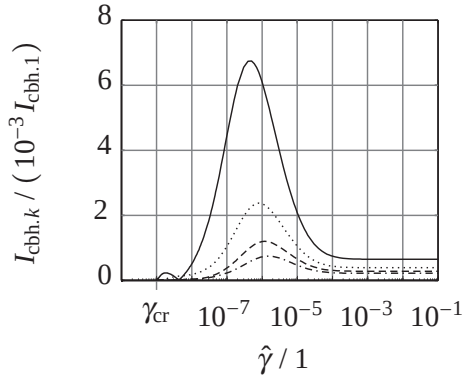
Abbildung 5.15: MODE ω/4: Materialfunktionen des scherverdünnenden rCROSS-BINGHAM-HOOKE Elements in Abhängigkeit der Schubverzerrungsamplitude für $\omega = \frac{1}{\alpha_\infty} = 2667\,\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}$, $G = 5\cdot10^4$Pa, $\eta_0 = 500$Pas, $\eta_\infty = 18.75$Pas, $K_1 = 10^4$s und $\tau_y = 5\cdot10^{-5}$Pa; in (b) und (c) mit $k = 3$: —— & ——, $k = 5$: ····· & ·····, $k = 7$: – – – & – – –, $k = 9$: -·-·-, $a_{\mathrm{bh}.9}$: -·-·- und $b_{\mathrm{bh}.9}$: -·-·-



(a) Speicher- und Verlustmodul



(b) Ungerade Höherharmonische



(c) Normierte Intensitäten

Abbildung 5.16: MODE ω/5: Materialfunktionen des scherverdünnenden rCROSS-BINGHAM-HOOKE Elements in Abhängigkeit der Schubverzerrungsamplitude für $\omega = 2 \cdot 10^4 \frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}$, $G = 5 \cdot 10^4$Pa, $\eta_0 = 500$Pas, $\eta_\infty = 18.75$Pas, $K_1 = 10^4$s und $\tau_{\mathrm{y}} = 5 \cdot 10^{-5}$Pa; in (b) und (c) mit $k = 3$: —— & ——, $k = 5$: ····· & ·····, $k = 7$: – – – & – – –, $k = 9$: -·-·-, $a_{\mathrm{bh}.9}$: -·-·- und $b_{\mathrm{bh}.9}$: -·-·-

5.4.2 FOURIER Transformierte in Abhängigkeit der Kreisfrequenz für konstante Schubverzerrungsamplitude

Die Auswertung der harmonischen Materialfunktionen in Abhängigkeit der Kreisfrequenz für eine festgehaltene Schubverzerrungsamplitude erfolgt auf Grundlage der Modellvorhersagen des BINGHAM-HOOKE Elements (Boisly et al. 2017; Absch. 3.2) und des rCROSS-MAXWELL Elements (Boisly et al. 2015; Absch. 7.1). In dazu analoger Weise können fünf charakteristische Schnittebenen konstanter Amplitude des in Abbildung 5.10 dreidimensional dargestellten Speicher- und Verlustmoduls abgeleitet werden. Die erste charakteristische Schnittebene ergibt sich für eine Verzerrungsamplitude $\hat{\gamma}$ unwesentlich größer als die kritische Schubverzerrung γ_{cr}. Um die weiteren vier Schnittebenen festzulegen, werden die drei charakteristischen Schubverzerrungsamplituden $\hat{\gamma}_{\mathrm{cbh.1}}$, $\hat{\gamma}_{\mathrm{cbh.2}}$ und $\hat{\gamma}_{\mathrm{cbh.3}}$ eingeführt. Die fünf charakteristischen Schnittebenen, MODE $\hat{\gamma}/1$ bis MODE $\hat{\gamma}/5$, sind somit wie folgt definiert

$$\text{MODE } \hat{\gamma}/1 \quad : \qquad \hat{\gamma} \gtrsim \gamma_{\mathrm{cr}} \tag{5.86}$$

$$\text{MODE } \hat{\gamma}/2 \quad : \qquad \hat{\gamma} = \hat{\gamma}_{\mathrm{cbh.1}} \tag{5.87}$$

$$\text{MODE } \hat{\gamma}/3 \quad : \qquad \hat{\gamma} = \hat{\gamma}_{\mathrm{cbh.2}} \tag{5.88}$$

$$\text{MODE } \hat{\gamma}/4 \quad : \qquad \hat{\gamma}_{\mathrm{cbh.2}} < \hat{\gamma} < \hat{\gamma}_{\mathrm{cbh.3}} \tag{5.89}$$

$$\text{MODE } \hat{\gamma}/5 \quad : \qquad \hat{\gamma} = \hat{\gamma}_{\mathrm{cbh.3}} \ . \tag{5.90}$$

Die Kriterien, nach denen man konkrete Zahlenwerte für $\hat{\gamma}_{\mathrm{cbh.1}}$, $\hat{\gamma}_{\mathrm{cbh.2}}$ und $\hat{\gamma}_{\mathrm{cbh.3}}$ findet, sind im Folgenden erklärt. Die erste charakteristische Schubverzerrungsamplitude, $\hat{\gamma}_{\mathrm{bh.1}}$, ergibt sich aus der Bedingung, dass Speicher- und Verlustmodul im Bereich „kleiner“ Kreisfrequenzen identisch sind. Da sich, wie in Abbildung 5.18(a) zu erkennen ist, das rCROSS-BINGHAM-HOOKE Element in diesem Bereich ähnlich dem eines PRANDTL Elements verhält, folgt

$$\hat{\gamma}_{\mathrm{cbh.1}} : \qquad \lim_{\omega \to 0} G'_{\mathrm{p}}\left(\hat{\gamma}_{\mathrm{cbh.1}}\right) \stackrel{!}{=} \lim_{\omega \to 0} G''_{\mathrm{p}}\left(\hat{\gamma}_{\mathrm{cbh.1}}\right) \ . \tag{5.91}$$

Die zweite charakteristische Schubverzerrungsamplitude, $\hat{\gamma}_{\mathrm{bh.2}}$, ist die kleinst mögliche Schubverzerrungsamplitude, für die Speicher- und Verlustmodul bei der Kreisfrequenz $\omega = \frac{1}{\alpha_0}$ identisch sind

$$\hat{\gamma}_{\mathrm{cbh.2}} = \mathrm{MIN}\left\{ \hat{\gamma}\big|_{G'_{\mathrm{cbh}}\left(\omega=\frac{1}{\alpha_0}\right) \stackrel{!}{\approx} G''_{\mathrm{cbh}}\left(\omega=\frac{1}{\alpha_0}\right)} \right\} \ . \tag{5.92}$$

Da Gleichung (5.92) analytisch nicht näher konkretisiert werden kann, wird $\hat{\gamma}_{\mathrm{cbh.2}}$ numerisch bestimmt. Dazu werden $i = 1 \ldots n$ diskrete Amplituden $\hat{\gamma}_i$ ausgewertet, analog zum Vorgehen beim BINGHAM-HOOKE Element (Boisly et al. 2017). Aufgrund der Analogien zum rCROSS-MAXWELL Elements, besitzt das rCROSS-BINGHAM-HOOKE Element die zweite charakteristische Relaxationszeit $\frac{1}{\alpha_\infty}$. Infolgedessen ergibt sich die dritte charakteristische Schubverzerrungsamplitude, $\hat{\gamma}_{\mathrm{cbh.3}}$. Sie ist die kleinst mögliche Schubverzerrungsamplitude, für die Speicher- und Verlustmodul bei der Kreisfrequenz $\omega = \frac{1}{\alpha_\infty}$ identisch sind

$$\hat{\gamma}_{\mathrm{cbh.3}} = \mathrm{MIN}\left\{ \hat{\gamma}\big|_{G'_{\mathrm{cbh}}\left(\omega=\frac{1}{\alpha_\infty}\right) \stackrel{!}{\approx} G''_{\mathrm{cbh}}\left(\omega=\frac{1}{\alpha_\infty}\right)} \right\} \ . \tag{5.93}$$

Auf Grundlage der eingeführten charakteristischen Schubverzerrungsamplituden werden im Folgenden die fünf charakteristischen Schnittebenen des Speicher- und Verlustmoduls, MODE $\hat{\gamma}/1$ bis $\hat{\gamma}/5$, eindeutig abgegrenzt. Unabhängig davon zeigen jedoch alle Modi $\hat{\gamma}/\ldots$ gleichermaßen, dass sich das rCROSS-BINGHAM-HOOKE Element für Frequenzen oberhalb der größten Relaxationszeit ähnlich dem einer HOOKEschen Feder verhält. Sie besitzen den charakteristischen Punkt

$$\lim_{\omega \to \infty} G'_{\mathrm{cbh}}\Big|_{\hat{\gamma}/\ldots} = G'_{\mathrm{s}} = G \ . \tag{5.94}$$

Die erste Schnittebene, MODE $\hat{\gamma}/1$, ist für eine Schubverzerrungsamplitude unwesentlich größer der kritischen Schubverzerrung $\{\hat{\gamma}/1\} \gtrsim \gamma_{\mathrm{cr}}$ definiert. Somit ist die Schubverzerrungsrate $|\dot{\gamma}_{\mathrm{b.cbh}}|$ vernachlässigbar. Infolgedessen wird das Materialverhalten nicht von den nichtlinear viskosen Eigenschaften des rCROSS

Dämpfers beeinflusst. Das rCROSS-BINGHAM-HOOKE Element verhält sich bei „kleineren“ Kreisfrequenzen ähnlich dem eines PRANDTL Elements und anschließend wie eine HOOKEsche Feder. Daraus ergeben sich die charakteristischen Punkte

$$G'_{\mathrm{cbh}}(\omega)\big|_{\hat{\gamma}/1} \approx G'_{\mathrm{p}}(\hat{\gamma} \gtrsim \gamma_{\mathrm{cr}}) \approx G'_{\mathrm{s}} = G \tag{5.95}$$

$$\mathfrak{F}\left\{\lim_{\omega\to 0} G''_{\mathrm{cbh}}\right\}_{\hat{\gamma}/1} \approx G''_{\mathrm{p}} = \frac{4\tau_{\mathrm{y}}}{\hat{\gamma}\pi}\left(1-\frac{\tau_{\mathrm{y}}}{G\hat{\gamma}}\right) \tag{5.96}$$

analog zu Boisly et al. (2014b; Gl. (33), (37)). (*Folgerung 5*) Das Symbol $(\,)|_{\hat{\gamma}/1}$ ist hierbei so zu verstehen, dass $(\,)$ für die Schubverzerrungsamplitude des MODE $\hat{\gamma}/1$ ausgewertet wird. Für das scherverdünnende rCROSS-BINGHAM-HOOKE Element reduzieren sich die normierten Intensitäten aufgrund des HOOKEschen Verhaltens für $\omega > \frac{1}{\alpha_0}$ auf Null.
MODE $\hat{\gamma}/2$ liegt vor, wenn Speicher- und Verlustmodul für „kleinere“ Frequenzen annähernd identisch sind

$$G'_{\mathrm{p}}\left(\omega < \frac{1}{\alpha_0}\right)\Big|_{\hat{\gamma}/2} = G''_{\mathrm{p}}\left(\omega < \frac{1}{\alpha_0}\right)\Big|_{\hat{\gamma}/2} . \tag{5.97}$$

Dieser Fall tritt für $\hat{\gamma} = \hat{\gamma}_{\mathrm{cbh.1}}$ ein. Der Verlauf der harmonischen Materialfunktionen ist in Abbildung 5.18 dargestellt. Das rCROSS-BINGHAM-HOOKE Element verhält sich unterhalb der kleinsten Relaxationszeit ähnlich dem eines PRANDTL Elements. Dies motiviert die charakteristischen Punkte

$$\begin{aligned}\mathfrak{F}\left\{G'_{\mathrm{cbh}}\left(\omega \ll \frac{1}{\alpha_0}\right)\right\}_{\hat{\gamma}/2} = G'_{\mathrm{p}} &= G\left\{\frac{1}{2}+\frac{1}{2\pi}\sin\left[2\arcsin\left(1-\frac{2\tau_{\mathrm{y}}}{G\hat{\gamma}}\right)\right]\right.\\ &\left.-\frac{1}{\pi}\cdot\arcsin\left[1-\frac{2\tau_{\mathrm{y}}}{G\hat{\gamma}}\right]+\frac{4}{\pi}\sqrt{\frac{\tau_{\mathrm{y}}}{G\hat{\gamma}}}\left(\frac{2\tau_{\mathrm{y}}}{G\hat{\gamma}}-1\right)\sqrt{1-\frac{\tau_{\mathrm{y}}}{G\hat{\gamma}}}\right\}\end{aligned} \tag{5.98}$$

$$\mathfrak{F}\left\{G''_{\mathrm{cbh}}\left(\omega \ll \frac{1}{\alpha_0}\right)\right\}_{\hat{\gamma}/2} = \mathfrak{F}\left\{G''_{\mathrm{cbh}}\left(\omega \ll \frac{1}{\alpha_0}\right)\right\}_{\hat{\gamma}/1} \overset{(5.96)}{=} G''_{\mathrm{p}} = \frac{4\tau_{\mathrm{y}}}{\hat{\gamma}\pi}\left(1-\frac{\tau_{\mathrm{y}}}{G\hat{\gamma}}\right) \tag{5.99}$$

analog zu Boisly et al. (2014b; Gl. (32), (37)). Die nichtlinear viskosen Eigenschaften des rCROSS Dämpfers sind nach wie vor von untergeordneter Bedeutung. Die Schubverzerrungsamplitude ist allerdings ausreichend groß, sodass viskose Eigenschaften an Einfluss gewinnen. Im Gegensatz zu MODE $\hat{\gamma}/1$ verhält sich das rCROSS-BINGHAM-HOOKE Element unmittelbar vor der kleinsten Relaxationszeit wie ein BINGHAM-HOOKE Element. Im Anschluss dessen geht es in den HOOKEschen Bereich über. Folglich sind die normierten Intensitäten aufgrund des linearen Verhaltens praktisch Null (Kirsch et al. 2001; S. 554).
Wird die Schubverzerrungsamplitude auf $\hat{\gamma} = \hat{\gamma}_{\mathrm{cbh.2}}$ erhöht, beeinflussen auch die nichtlinear viskosen Eigenschaften des rCROSS Dämpfers die harmonischen Materialfunktionen. Diese sind in Abbildung 5.19 für den scherverdünnenden Fall dargestellt und beschreiben MODE $\hat{\gamma}/3$. Wie zu erkennen ist, tritt der Schnittpunkt zwischen Speicher- und Verlustmodul

$$G'_{\mathrm{cbh}}\left(\omega = \frac{1}{\alpha_0}\right) = G''_{\mathrm{cbh}}\left(\omega = \frac{1}{\alpha_0}\right) = \mathrm{MAX}\{G''_{\mathrm{cbh}}(\omega)\} \tag{5.100}$$

analog zum scherverdünnenden rCROSS-MAXWELL Element bei der Relaxationszeit $\omega = \frac{1}{\alpha_0}$ auf. Er fällt mit dem Maximum des Verlustmoduls zusammen. Analog zu Boisly et al. (2015; Abb. 10 (a)) gilt folglich

$$G'_{\mathrm{cbh}} = G''_{\mathrm{cbh}} = \frac{G}{2} . \tag{5.101}$$

Des Weiteren ist das Verhalten im Anfangsbereich, das heißt für Kreisfrequenzen, die viel kleiner als die geringste Relaxationszeit sind, in guter Näherung mit dem des Reibelements vergleichbar. Daher ist der Verlustmodul des rCROSS-BINGHAM-HOOKE Elements nahezu identisch dem eines Reibelements [14]. Er liefert den charakteristischen Punkt

$$\mathfrak{F}\left\{G''_{\mathrm{cbh}}\left(\omega \ll \frac{1}{\alpha_0}\right)\right\}_{\hat{\gamma}/3} = G''_{\mathrm{f}} = \frac{4\tau_{\mathrm{y}}}{\hat{\gamma}\pi} . \tag{5.102}$$

[14] (Ewoldt 2009; S. 170), (Ewoldt et al. 2010; S. 199)

Folglich gilt ebenfalls

$$\lim_{\omega\to 0}\frac{I_{\mathrm{cbh}.k}}{I_{\mathrm{cbh}.1}}\bigg|_{\hat{\gamma}/3}=\frac{I_{\mathrm{f}.k}}{I_{\mathrm{f}.1}}=\frac{1}{k}\,. \tag{5.103}$$

Außerdem existiert für das scherverdünnende rCROSS-BINGHAM-HOOKE Element unmittelbar um $\omega\lesssim\frac{\dot{\hat{\gamma}}_{\mathrm{c}.1}}{\hat{\gamma}}$ ein NEWTONscher Bereich, sodass die Nullviskosität η_0 mittels des Anstiegs des Verlustmoduls zwischen Plateau und Maximum

$$\frac{d\,G''_{\mathrm{cbh}}(\omega)}{d\,\omega}\bigg|_{\hat{\gamma}/3}\approx\eta_0 \qquad \text{für} \quad \omega\bigg|_{\frac{d\,G''_{\mathrm{cbh}}(\omega)}{d\,\omega}=0}\ll\omega\ll\frac{1}{\alpha_0} \tag{5.104}$$

bestimmt werden kann. Da normierte Intensitäten für lineare Materialmodelle Null sind (Kirsch et al. 2001; S. 554), treten sie für $\omega>\frac{\dot{\hat{\gamma}}_{\mathrm{c}.1}}{\hat{\gamma}}$ praktisch nicht auf.

Innerhalb MODE $\hat{\gamma}/4$ verschiebt sich das Maximum des Verlustmoduls von $\omega=\frac{1}{\alpha_0}$ zu $\omega=\frac{1}{\alpha_\infty}$. Dies erfolgt analog zum rCROSS-MAXWELL Element nach Boisly et al. (2015; Abb. 11). Auch hier ist für das scherverdünnende rCROSS-BINGHAM-HOOKE Element in der Umgebung von $\omega\gtreqless\frac{\dot{\hat{\gamma}}_{\mathrm{c}.1}}{\hat{\gamma}}$ ein NEWTONscher Bereich zu verzeichnen, sodass die Nullviskosität mittels

$$\frac{d\,G''_{\mathrm{cbh}}(\omega\gtreqless\frac{\dot{\hat{\gamma}}_{\mathrm{c}.1}}{\hat{\gamma}})}{d\,\omega}\bigg|_{\hat{\gamma}/4}\approx\eta_0 \tag{5.105}$$

abgeschätzt werden kann. Das Maximum sowie das Anfangsplateau des Verlustmoduls

$$G'_{\mathrm{cbh}}=G''_{\mathrm{cbh}}=\frac{G}{2} \tag{5.106}$$

$$\mathfrak{F}\left\{G''_{\mathrm{cbh}}\left(\omega\ll\frac{1}{\alpha_0}\right)\right\}_{\hat{\gamma}/4}=G''_{\mathrm{f}}=\frac{4\tau_{\mathrm{y}}}{\hat{\gamma}\pi} \tag{5.107}$$

liefern weitere charakteristische Punkte. Entsprechend dem Anfangsverhalten, das dem Verhalten des Reibelements ähnlich ist, ergeben sich die Plateauwerte der normierten Intensitäten

$$\lim_{\omega\to 0}\frac{I_{\mathrm{cbh}.k}}{I_{\mathrm{cbh}.1}}\bigg|_{\hat{\gamma}/4}=\frac{I_{\mathrm{f}.k}}{I_{\mathrm{f}.1}}=\frac{1}{k}\,. \tag{5.108}$$

Die Minima normierter Intensitäten sind auf NEWTONsches und HOOKEsches Verhalten zurückzuführen. Die relativen Maxima werden durch nichtlineares Verhalten analog zum rCROSS-MAXWELL Element hervorgerufen.

MODE $\hat{\gamma}/5$ tritt für die Anregung mit einer Schubverzerrungsamplitude $\hat{\gamma}=\hat{\gamma}_{\mathrm{cbh}.3}$ auf. Die entsprechenden Modellvorhersagen des scherverdünnenden rCROSS-BINGHAM-HOOKE Elements sind in Abbildung 5.21 gezeigt. Das Maximum des Verlustmoduls, welches mit dem Schnittpunkt zwischen Speicher- und Verlustmodul

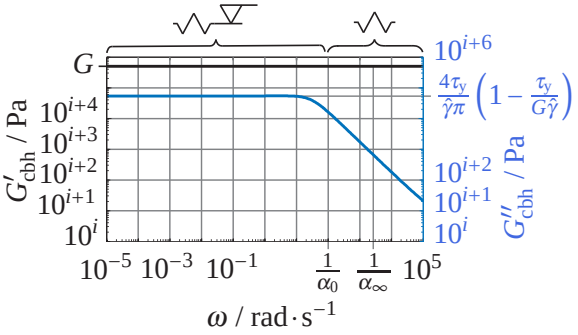
$$G'_{\mathrm{cbh}}\left(\omega=\frac{1}{\alpha_\infty}\right)=G''_{\mathrm{cbh}}\left(\omega=\frac{1}{\alpha_\infty}\right)=\mathrm{MAX}\{G''_{\mathrm{cbh}}(\omega)\}=\frac{G}{2} \tag{5.109}$$

zusammenfällt, befindet sich analog zum rCROSS-MAXWELL Element (Boisly et al. 2015; Abb. 12) bei $\omega=\frac{1}{\alpha_\infty}$. Da der Verlustmodul bis $\omega<\frac{1}{\alpha_0}$ über den Speichermodul dominiert, existieren die charakteristischen Kreisfrequenzen $\frac{\dot{\hat{\gamma}}_{\mathrm{c}.1}}{\hat{\gamma}}$, $\frac{1}{K_1\hat{\gamma}}$, $\frac{\dot{\hat{\gamma}}_{\mathrm{c}.2}}{\hat{\gamma}}$ und $\frac{\dot{\gamma}_{\mathrm{c}.3}}{\hat{\gamma}}$. Demnach können die Viskositäten

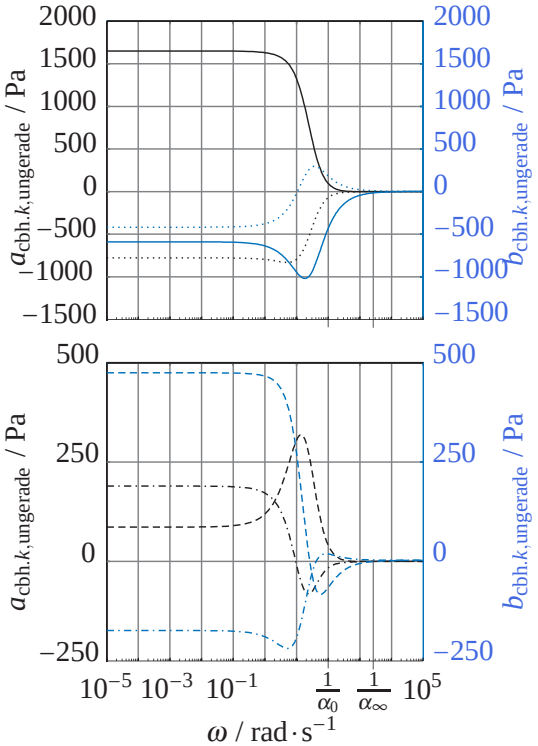
$$\eta_0=\frac{d\,G''_{\mathrm{cbh}}(\omega=\frac{\dot{\hat{\gamma}}_{\mathrm{c}.1}}{\hat{\gamma}})}{d\,\omega}\bigg|_{\hat{\gamma}/5} \tag{5.110}$$

$$\eta_\infty=\frac{d\,G''_{\mathrm{cbh}}(\omega=\frac{\dot{\gamma}_{\mathrm{c}.3}}{\hat{\gamma}})}{d\,\omega}\bigg|_{\hat{\gamma}/5} \tag{5.111}$$

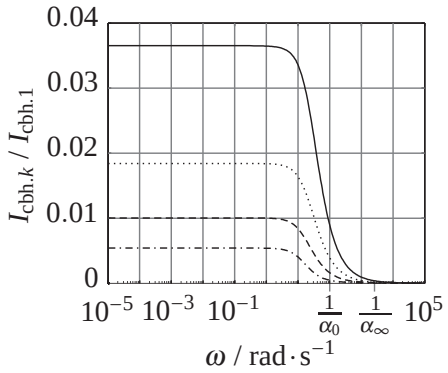
in dem Bereich, wo sich das rCROSS-BINGHAM-HOOKE Element annähernd wie ein rCROSS Dämpfer verhält, als Tangente an den Verlustmodul identifiziert werden.



(a) Speicher- und Verlustmodul

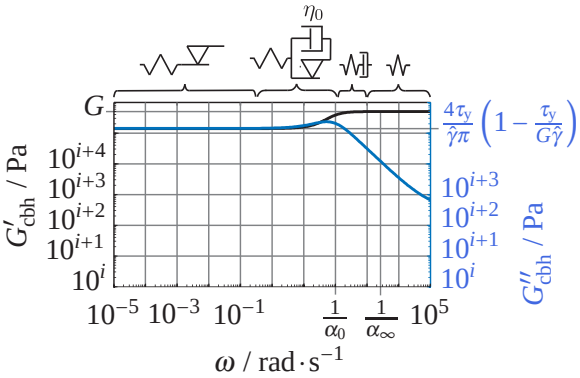


(b) Ungerade Höherharmonische

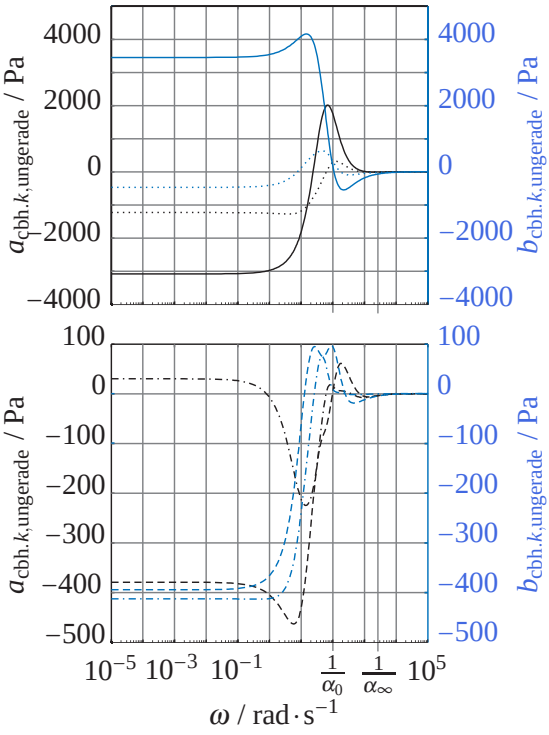


(c) Normierte Intensitäten

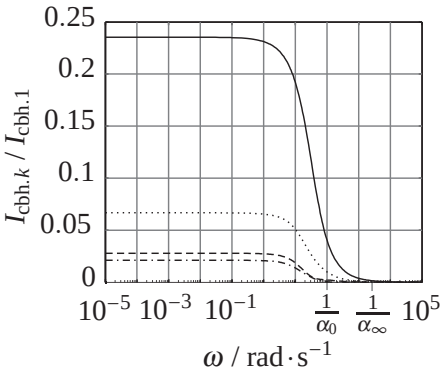
Abbildung 5.17: MODE $\hat\gamma$/1: Materialfunktionen des scherverdünnenden rCross-Bingham-Hooke Elements in Abhängigkeit der Kreisfrequenz für $\hat\gamma = 1.1\cdot\gamma_{cr} = 1.1\cdot10^{-9}$, $G = 5\cdot10^4$Pa, $\eta_0 = 500$Pas, $\eta_\infty = 18.75$Pas, $K_1 = 10^4$s und $\tau_y = 5\cdot10^{-5}$Pa; in (b) und (c) mit $k = 3$: —— & ——, $k = 5$: ····· & ·····, $k = 7$: – – – & – – –, $k = 9$: - · - · - und - · - · -



(a) Speicher- und Verlustmodul

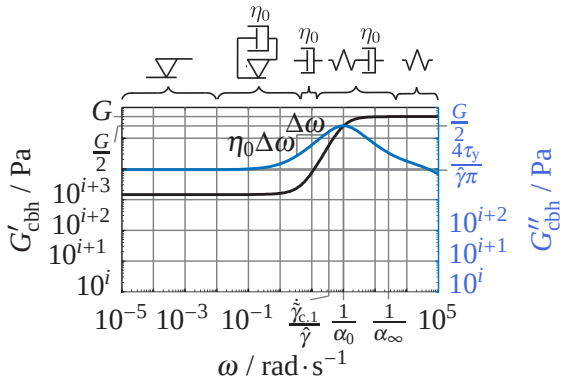


(b) Ungerade Höherharmonische

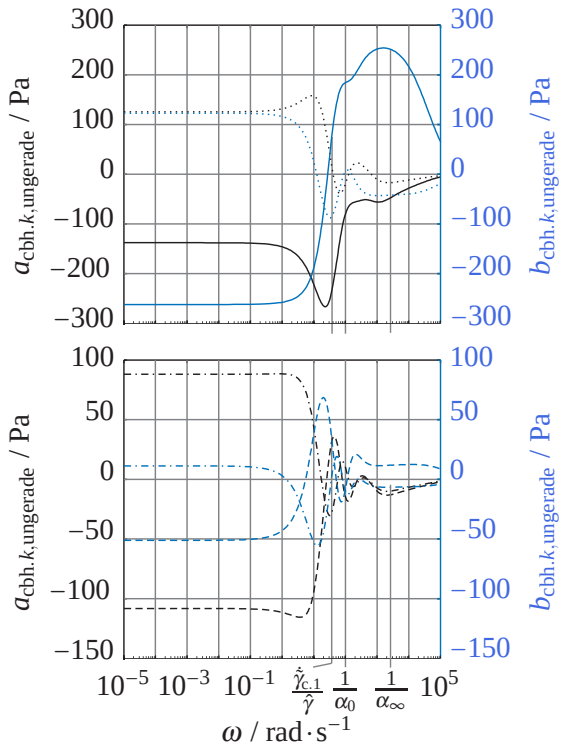


(c) Normierte Intensitäten

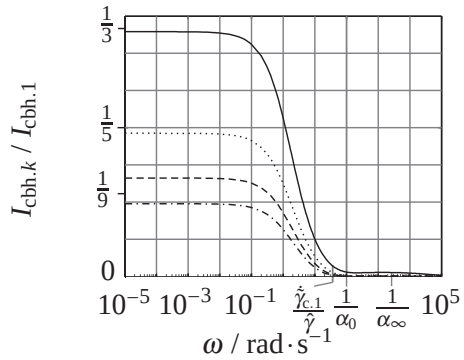
Abbildung 5.18: MODE $\hat\gamma$/2: Materialfunktionen des scherverdünnenden rCross-Bingham-Hooke Elements in Abhängigkeit der Kreisfrequenz für $\hat\gamma = \hat\gamma_{cbh.1} = 3.1\cdot10^{-9}$, $G = 5\cdot10^4$Pa, $\eta_0 = 18.75$Pas, $\eta_\infty = 500$Pas, $K_1 = 10^4$s und $\tau_y = 5\cdot10^{-5}$Pa; in (b) und (c) mit $k = 3$: —— & ——, $k = 5$: ····· & ·····, $k = 7$: – – – & – – –, $k = 9$: - · - · - und - · - · -



(a) Speicher- und Verlustmodul

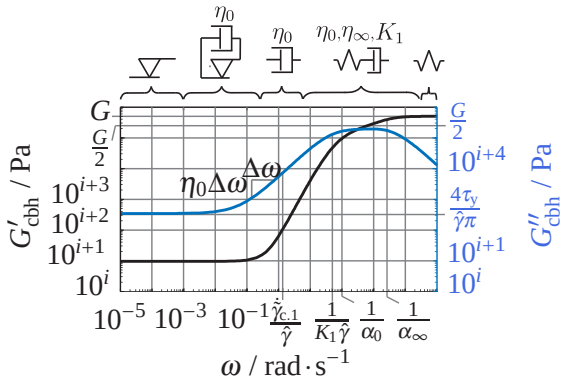


(b) Ungerade Höherharmonische

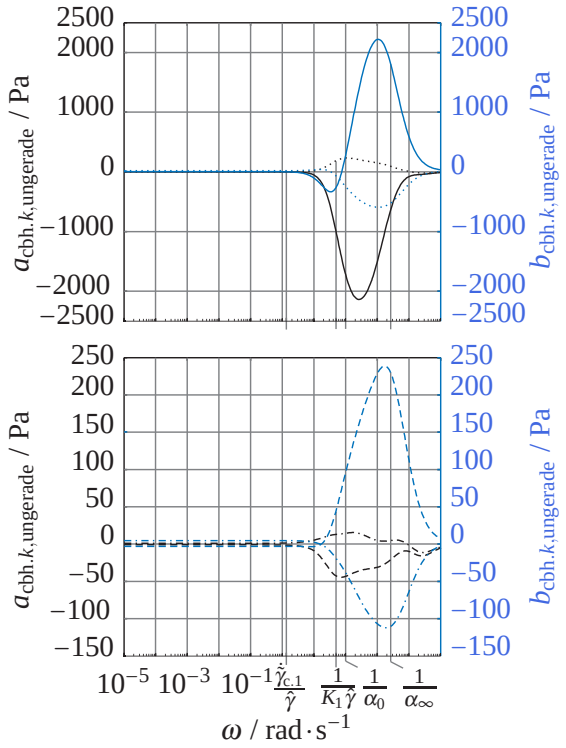


(c) Normierte Intensitäten

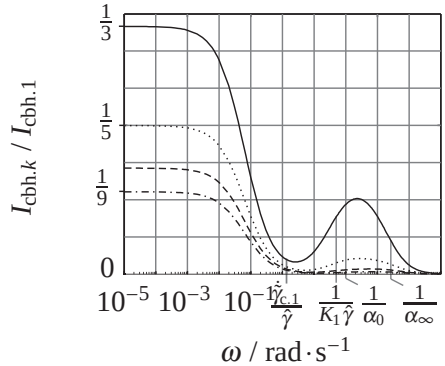
Abbildung 5.19: MODE $\hat\gamma$/3: Materialfunktionen des scherverdünnenden rCROSS-BINGHAM-HOOKE Elements in Abhängigkeit der Kreisfrequenz für $\hat\gamma = \hat\gamma_{\mathrm{cbh}.2} = 7\cdot10^{-8}$, $G = 5\cdot10^4$Pa, $\eta_0 = 500$Pas, $\eta_\infty = 18.75$Pas, $K_1 = 10^4$ s, $\tau_y = 5\cdot10^{-5}$Pa und $\kappa_2 = 0.05$; in (b) und (c) mit $k = 3$: —— & —— , $k = 5$: ····· & ····· , $k = 7$: – – – & – – – , $k = 9$: - · - · - und - · - · -



(a) Speicher- und Verlustmodul

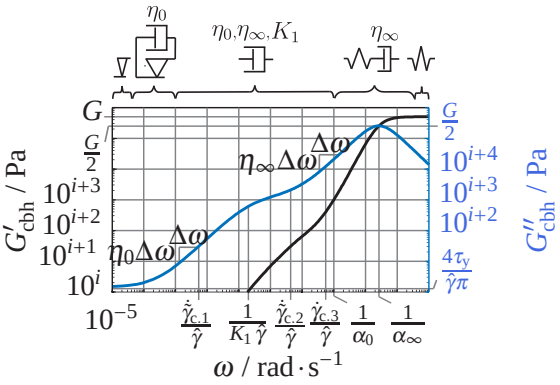


(b) Ungerade Höherharmonische

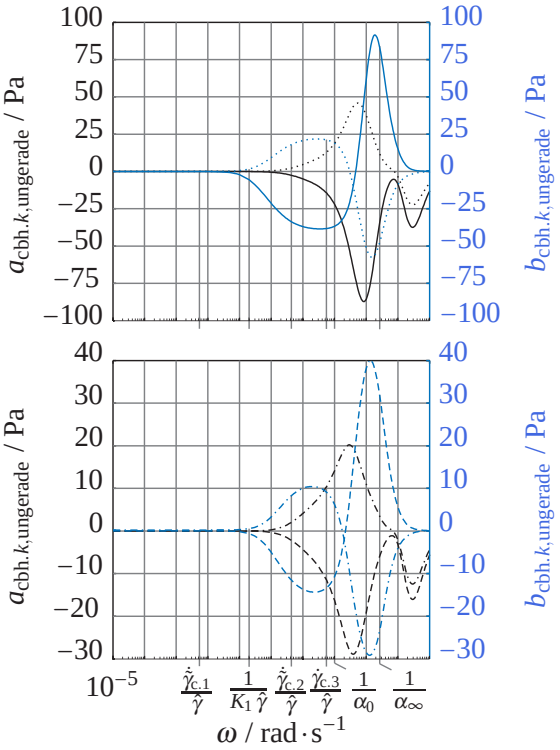


(c) Normierte Intensitäten

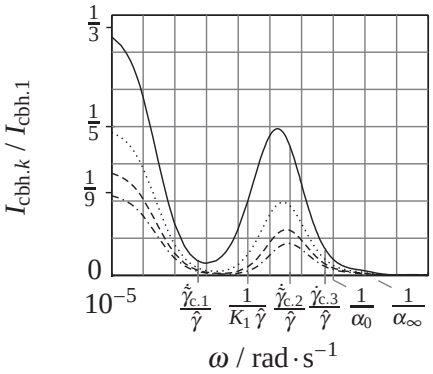
Abbildung 5.20: MODE $\hat\gamma$/4: Materialfunktionen des scherverdünnenden rCROSS-BINGHAM-HOOKE Elements in Abhängigkeit der Kreisfrequenz für $\hat\gamma = 2\cdot10^{-6}$, $G = 5\cdot10^4$Pa, $\eta_0 = 500$Pas, $\eta_\infty = 18.75$Pas, $K_1 = 10^4$ s, $\tau_y = 5\cdot10^{-5}$Pa und $\kappa_2 = 0.05$; in (b) und (c) mit $k = 3$: —— & —— , $k = 5$: ····· & ····· , $k = 7$: – – – & – – – , $k = 9$: - · - · - und - · - · -



(a) Speicher- und Verlustmodul



(b) Ungerade Höherharmonische



(c) Normierte Intensitäten

Abbildung 5.21: MODE $\hat\gamma$/5: Materialfunktionen des scherverdünnenden rCROSS-BINGHAM-HOOKE Elements in Abhängigkeit der Kreisfrequenz für $\hat\gamma = \hat\gamma_{\mathrm{cbh}.3} = 5\cdot10^{-4}$, $G = 5\cdot10^4$Pa, $\eta_0 = 500$Pas, $\eta_\infty = 18.75$Pas, $K_1 = 10^4$s, $\tau_y = 5\cdot10^{-5}$Pa, $\kappa_2 = 0.05$ und $\kappa_3 = 0.95$; in (b) und (c) mit $k = 3$: —— & ——, $k = 5$: ····· & ·····, $k = 7$: – – – & – – –, $k = 9$: - · - · - und - · - · -

6. Charakteristische Punkte von Materialfunktionen des endochronen MAXWELL Elements

In diesem Abschnitt wird ein endochrones Materialmodell zur Beschreibung ratenunabhängiger Hysteresen untersucht. Grundlegende Ideen zur endochronen Theorie können den Arbeiten von Ilyushin (1954; Gl. (3.3)), Pipkin und Rivlin (1965; Gl. (2.6), (2.7)) und VALANIS [1] entnommen werden. Anwendung finden endochrone Materialmodelle zur Modellierung des Materialverhaltens von Metallen [2], Beton (Valanis und Read 1986), geologischen Materialien (Valanis 1988), gefülltem PTFE [3], Polypropylen [4] und RTM6 sowie RIM935 (Kästner et al. 2010). Ein dreidimensional verallgemeinertes Materialmodell für geometrisch lineare Theorie ist bei Kästner (2010; S. 70) und Kästner et al. (2012; S. 48) präsentiert. Endochrone Materialmodelle für große Deformationen findet man bei Khan und Huang (1995; S. 263), Haupt (2002; S. 448 ff.), Netzker et al. (2010) und Netzker et al. (2013).
Valanis (1971c; S. 518) sowie Valanis und Wu (1975; Gl. (1)) beschreiben ratenabhängige und ratenunabhängige Effekte basierend auf einem sogenannten *materiellen Zeitmaßstab* $du = \frac{dx}{f(x)}$ und einem sogenannten *intrinsischen Zeitmaßstab* $dx = \sqrt{d\varepsilon_{ij} P_{ijkl} d\varepsilon_{kl} + g^2 dt^2}$. Daher bezeichnet Valanis (1981; S. 250) die Theorie als *endochron* [5]. Die Funktion $f(x)$, der positiv definite symmetrische Tensor $P_{ijkl}\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l$ und der Paramter g beschreiben Materialeigenschaften. Im Fall von $g = 0$ erhält man ratenunabhängiges Materialverhalten [6], das zur Modellierung plastischen Fließens genutzt werden kann. Der endochrone Modellierungsansatz wird bei Valanis (1971c; S. 517) und Valanis (1972; S. 113) damit begründet, dass das Phänomen Fließen gewöhnlich ein kontinuierlicher Prozess ist, bei dem der Fließbeginn schwer zu identifizieren ist. Im Gegensatz zu klassischen Plastizitätstheorien (Haupt 2002; Absch. 5.6, 5.7), welche auf einer Fließfunktion und einer Fließbedingung fußen, sind im Rahmen einer endochronen Theorie zur Beschreibung plastischer Eigenschaften weder Fließfunktion noch Fließbedingung erforderlich.
Ilyushin (1954) sowie Pipkin und Rivlin (1965) formulieren mittels der kinematischen Bogenlänge $du = \sqrt{d\varepsilon_{ij} d\varepsilon_{ij}}$, welche der Verzerrungsgeschichte $\varepsilon_{ij}(t)$ zugeordnet ist, ratenunabhängiges Materialverhalten. Diese Beschreibung stellt einen Spezialfall der Theorie nach VALANIS dar [7]. Er ergibt sich für $P_{ijkl} = \delta_{ij}\delta_{kl}$, $f(x) = 1$ sowie $g = 0$ (Valanis 1981; S. 251) und dem KRONECKER Symbol

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & : \quad i = j \qquad (6.1a) \\ 0 & : \quad i \neq j\,. \qquad (6.1b) \end{cases}$$

Der Spezialfall geht im Eindimensionalen in Gleichung (3.56) über. Er wird im Folgenden zur Beschreibung der konstitutiven Beziehungen des endochronen MAXWELL Elements verwendet. Die Umsetzung erfolgte in Zusammenarbeit mit Kammer (2015) im Rahmen einer studentischen Belegarbeit.

[1] (Valanis 1970), (Valanis 1971c), (Valanis 1971e), (Valanis 1971d), (Valanis 1972), (Valanis 1974), (Valanis und Wu 1975), (Valanis 1975), (Valanis 1976), (Valanis 1971b), (Valanis 1971a), (Valanis 1980), (Valanis und Lee 1982), (Valanis 1983), (Valanis und Fan 1983), (Valanis 1984), (Valanis und Fan 1984), (Valanis und Lee 1984), (Valanis und Read 1986), (Valanis 1988), (Valanis 1990)

[2] (Valanis 1971e), (Valanis 1971d), (Valanis 1974), (Valanis und Wu 1975)

[3] (Kletschkowski et al. 2002a), (Kletschkowski et al. 2004), (Kletschkowski et al. 2005)

[4] (Kästner et al. 2008), (Kästner et al. 2009), (Kästner 2010; S. 58 ff.), (Kästner et al. 2010), (Kästner et al. 2012)

[5] *endos* steht für innere, und *chronos* bedeutet Zeit

[6] (Valanis 1971c; S. 519), (Valanis und Wu 1975; Gl. (21)), (Kammer 2015; S. 5)

[7] Es sei an dieser Stelle allerdings erwähnt, dass dies nicht im Sinne von Valanis (1981; S. 249 ff.) ist. Nach Auffassung von VALANIS sind die Arbeiten von ILYUSHIN, RIVLIN und PIPKIN keine endochrone Theorien. Er begründet dies damit, dass die kinematische Bogenlänge *u* für alle Materialien gleich definiert wurde und keinerlei Einfluss vom Material unterliegt. Hingegen bei VALANIS hängt die Bogenlänge von Materialfunktionen ab und wird als innerer, dem Material inne wohnender, Zeitmaßstab interpretiert.

6.1 Korrespondenzprinzip zum Ableiten endochroner Materialgesetze

Im nächsten Abschnitt werden die konstitutiven Beziehungen des endochronen MAXWELL Elements abgeleitet. Diese erhält man, indem das *Korrespondenzprinzip* [8] auf das ratenabhängige viskoelastische MAXWELL Element angewendet wird. Das Korrespondenzprinzip besagt, dass jedes ratenabhängige Funktional der Viskoelastizität in ein ratenunabhängiges Funktional übergeht, wenn der physikalische Zeitmaßstab t durch die Bogenlänge u ersetzt wird [9]. Die generelle Form der konstitutiven Beziehungen bleibt dabei erhalten (Valanis 1971c; S. 525). Des Weiteren wird die Lastgeschichte $\gamma(t)$, welche naturgemäß von der physikalischen Zeit abhängt, mittels der *Bogenlänge* [10, 11] u beschrieben. Letztlich erhält man für die Lastgeschichte die nach Gleichung (3.61) eingeführte Darstellung $\gamma(t) = [\gamma(u);\, u(t)]$.
Weil die konstitutiven Beziehungen des endochronen MAXWELL Elements im nächsten Abschnitt mittels der strengen Anwendung des Korrespondenzprinzips abgeleitet werden, ergibt sich im Vergleich zu HAUPT und KÄSTNER eine modifizierte Beschreibung. Anstelle des in Gleichungen (6.9) und (6.10) wirkenden Faktors $\frac{G}{\beta}$, tritt bei Haupt (2002; Gl. (11.39)), Kästner (2010; Gl. (4.32)) und Kästner et al. (2012; Gl. (6)) lediglich der Faktor β auf. Um jedoch im weiteren Verlauf der Arbeit den Charakter von β als pseudo Fließspannung motivieren zu können, ist die strenge Anwendung des oben beschriebenen Korrespondenzprinzips erforderlich. Somit, und infolge des Analogieprinzipes, kann für β die Korrespondenz zur Fließspannung des PRANDTL Elements aufgezeigt werden. Dieser Sachverhalt wird durch die Herleitung in Krawietz (1986; Gl. (2.69)) unterstützt, bei der die Evolutionsgleichung für q direkt auf Basis der konstitutiven Beziehungen des PRANDTL Elements motiviert ist. (*Folgerung 18*)

6.2 Konstitutive Gleichungen des endochronen MAXWELL Elements

Das rheologische Schaltbild des endochronen MAXWELL Elements [12] ist in Abbildung 6.1 dargestellt. Die das endochrone MAXWELL Element betreffenden Größen sind mit dem Literalindex $(\,)_{\mathrm{ch}}$ versehen. Der

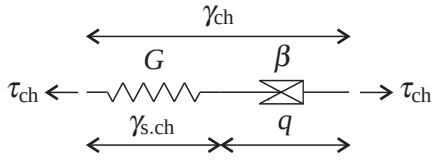


Abbildung 6.1: Rheologisches Schaltbild des endochronen MAXWELL Elements

Schubmodul beträgt G. Der Materialparameter β wird als *pseudo Fließspannung* bezeichnet, da er für das endochrone MAXWELL Element einen zur Fließspannung τ_{y} des PRANDTL Elements (Boisly et al. 2014b) analogen Stellenwert besitzt. Die endochronen Materialgleichungen des MAXWELL Elements [13] werden mittels des Korrespondenzprinzips, ausgehend von der Beschreibung mittels einer innerer Variable vom Verzerrungstyp q und der zugeordneten Evolutionsgleichung (6.2b) nach Haupt (2002; Gl. (5.90), (5.91)), abgeleitet. Somit erhält man [14]

$$\tau_{\mathrm{ch}}(u) = G\,[\gamma_{\mathrm{ch}}(u) - q(u)] \tag{6.2a}$$

$$q'(u) = \frac{G}{\beta}\,[\gamma_{\mathrm{ch}}(u) - q(u)]\ . \tag{6.2b}$$

[8] (Haupt 2002; S. 438, 445, 450), (Kästner 2010; S. 17), (Kästner et al. 2012; S. 46)

[9] englisches Originalzitat: „For every rate-dependent functional in viscoelasticity there is a rate-independent functional, which is obtained when time is replaced by the (kinematic or generalised) arclength. Accordingly, there is a material model of plasticity to correspond to each material model of viscoelasticity“. (Haupt 2002; S. 438)

[10] (Haupt 1977; S. 146, 152), (Krawietz 1986; S. 25), (Valanis 1988; S. 6), (Keck 1998; S. 39)

[11] Die Bogenlänge kann über die parametrisch beschriebene Länge eines Kreisbogens motiviert werden.

[12] (Valanis 1971a; Abb. 4), (Krawietz 1986; Abb. 4.6, 2.15), (Keck 1998; Abb. 4.5), (Kletschkowski et al. 2002a; Abb. 4) , (Kletschkowski et al. 2004; Abb. 4), (Kletschkowski et al. 2004; Abb. 3), (Kästner 2010; Abb. 4.7), (Kästner et al. 2012; Abb. 11)

[13] (Giesekus 1994; S. 243), (Macosko 1994; S. 116), (Menges et al. 2002; S. 158), (Haupt 2002; S. 203, 322), (Kardelky 2004; S. 35, 192), (Gross et al. 2004; S. 308), (Silber und Steinwender 2005; S. 156)

[14] (Valanis 1971a; S. 3-5), (Keck 1998; S. 39), (Haupt 2002; Gl. (11.38), (11.39)), (Kästner et al. 2008; Gl. (1)), (Kästner et al. 2009; Gl. (1), (2)), (Kästner 2010; S. 58), (Kästner et al. 2012; Gl. (4), (6)), (Kammer 2015; Gl. (4.27), (4.28))

Der Ableitungsoperator $f'(\,)$ bezieht sich auf die Ableitung von f nach der unabhängigen Variable $(\,)$

$$f'(\,) = \frac{df}{d(\,)} \,. \tag{6.3}$$

In den Abschnitten 6.3 und 6.4 wird die von der Bogenlänge abhängige verzerrungsgesteuerte Anregung $\gamma_{\mathrm{ch}}(u)$ aus der von der physikalischen Zeit abhängigenen Belastung $\gamma_{\mathrm{ch}}(t)$ und der kinematischen Bogenlänge $u(t) = f_u(t)$ nach Gleichung (3.60) berechnet. Für den Fall, dass die inverse Funktion f_u^{-1} analytisch bestimmt werden kann, ergibt sich

$$t = f_u^{-1}(u) \qquad \forall\, u \tag{6.4}$$

$$\gamma_{\mathrm{ch}}(u) = \gamma_{\mathrm{ch}}[t = f_u^{-1}(u)] \qquad \forall\, u \,. \tag{6.5}$$

Andernfalls wird $\gamma_{\mathrm{ch}}(u)$ als stückweise definierte Funktion oder nach Gleichung (3.61) als parameterabhängige Kurve mit der Zeit t als Kurvenparameter

$$\gamma_{\mathrm{ch}}(u) = [\gamma_{\mathrm{ch}}(t);\, u(t)] \tag{6.6}$$

interpretiert. Die zeitliche Ableitung der inneren Variable [15]

$$\dot{q}(t) = q'(u)\,\dot{u}(t) = q'(u)\,|\dot{\gamma}_{\mathrm{ch}}(t)| \tag{6.7}$$

ergibt sich über die Kettenregel

$$\dot{(\,)} = (\,)'\dot{u} \tag{6.8}$$

und Gleichung (3.58). Eliminiert man die innere Variable aus Gleichungen (6.2a) und (6.2b), erhält man die konstitutive Beziehung in *differentieller Darstellung* [16]

$$G\gamma'_{\mathrm{ch}}(u) = \frac{G}{\beta}\tau_{\mathrm{ch}}(u) + \tau'_{\mathrm{ch}}(u) \,. \tag{6.9}$$

Diese kann unter Berücksichtigung von Gleichung (6.8) in

$$G\dot{\gamma}_{\mathrm{ch}} = \frac{G}{\beta}\tau_{\mathrm{ch}}\,|\dot{\gamma}_{\mathrm{ch}}| + \dot{\tau}_{\mathrm{ch}} \tag{6.10}$$

überführt werden. Indem das Korrespondenzprinzip auf die integrale Darstellung der konstitutiven Beziehungen des MAXWELL Elements [17] angewendet wird, erhält man die *integrale Darstellung* der konstitutiven Beziehungen des endochronen MAXWELL Elements [18]

$$\tau_{\mathrm{ch}}(u) = \int_0^u G e^{-\frac{G}{\beta}(u-\bar{u})}\,\gamma'_{\mathrm{ch}}(\bar{u})\,d\bar{u} = G\,\gamma_{\mathrm{ch}}(u) - \int_0^u \frac{G^2}{\beta} e^{-\frac{G}{\beta}(u-\bar{u})}\,\gamma_{\mathrm{ch}}(\bar{u})\,d\bar{u} \tag{6.11}$$

$$= \int_0^u G e^{-\frac{G}{\beta}(u-\bar{u})}\,\mathrm{sign}\left[\gamma'_{\mathrm{ch}}(\bar{u})\right] d\bar{u} = \int_0^u G e^{-\frac{G}{\beta}(u-\bar{u})}\,\mathrm{sign}(\dot{\gamma}_{\mathrm{ch}})|_{t=f_u^{-1}(u=\bar{u})}\,d\bar{u} \,, \tag{6.12}$$

bei der γ'_{ch} als $\gamma'_{\mathrm{ch}}(u=\bar{u})$ zu interpretieren ist. Alternativ ergibt sich die integrale Darstellung ebenfalls aus der Lösung von entweder Gleichung (6.2) (Haupt 2002; S. 445) oder aber Gleichung (6.9) (Kammer 2015; S. 445) für $\tau_{\mathrm{ch}}(u=0) = 0$ und $\gamma_{\mathrm{ch}}(u=0) = 0$. Somit ist die Spannung ein ratenunabhängiges Funktional der Verzerrungsgeschichte (Haupt 2002; S. 437). Die erste Darstellungsform in Gleichung (6.12) ist entsprechend Gleichung (3.56) durch

$$\gamma'_{\mathrm{ch}}(u) = \frac{d\gamma_{\mathrm{ch}}}{du} = \frac{1}{\mathrm{sign}(d\gamma_{\mathrm{ch}})} = \mathrm{sign}(d\gamma_{\mathrm{ch}}) = \mathrm{sign}(\gamma'_{\mathrm{ch}}) \tag{6.13}$$

[15] (Haupt 2002; S. 445), (Kästner 2010; Gl. (4.33)), (Kammer 2015; S. 10)

[16] (Valanis 1970; S. 16), (Valanis 1971c; S. 526), (Valanis 1971e; S. 18), (Valanis 1971d; S. 548), (Valanis 1972; S. 129), (Valanis und Wu 1975; S. 68), (Valanis 1971a; S. 3-5), (Valanis und Lee 1982; Gl. (25)), (Kammer 2015; Gl. (4.31))

[17] (Ebert 1980; S. 72), (Tschoegl 1989; S. 41), (Gerlach 2003; S. 30, 36), (Gross et al. 2004; S. 320), (Silber und Steinwender 2005; S. 187)

[18] (Valanis 1970; S. 13), (Valanis 1971c; S. 524), (Valanis 1972; S. 125, 128), (Valanis 1971d; Gl. (1.1), (2.10), (2.11)), (Valanis 1971a; S. 2-2), (Valanis und Lee 1982; Gl. (24)), (Haupt 2002; Gl. (11.14), (11.40)), (Kammer 2015; Gl. (3.17), (4.32))

mit $d\gamma_{\mathrm{ch}} = 0, \forall du = 0$ und $d\gamma_{\mathrm{ch}} \neq 0, \forall du > 0$ motiviert. Dies kann beispielsweise für Relaxationsverhalten überprüft werden. Den Fall $du < 0$ kann man ausschließen, da $u(t)$ monoton ist. Die zweite Darstellungsform in Gleichung (6.12) ergibt sich unter Berücksichtigung von

$$\gamma'_{\mathrm{ch}}(u) = \frac{d\gamma_{\mathrm{ch}}}{du} = \frac{\frac{d\gamma_{\mathrm{ch}}(t)}{dt}dt}{\frac{du(t)}{dt}dt} = \frac{\dot{\gamma}_{\mathrm{ch}}}{\dot{u}}\frac{dt}{dt} = \left.\frac{\dot{\gamma}_{\mathrm{ch}}(t)}{\dot{u}(t)}\right|_{t=f_u^{-1}(u)} = \left.\frac{\dot{\gamma}_{\mathrm{ch}}(t)}{|\dot{\gamma}_{\mathrm{ch}}(t)|}\right|_{t=f_u^{-1}(u)} = \mathrm{sign}(\dot{\gamma}_{\mathrm{ch}})|_{t=f_u^{-1}(u)} \tag{6.14}$$

sowie Gleichungen (6.6) und (3.58). Somit kann $\gamma'_{\mathrm{ch}}(u)$ mittels der gegebenen Schubverzerrung $\gamma_{\mathrm{ch}}(t)$ und der Bogenlänge $u(t)$, die sich nach Gleichung (3.60) direkt aus $\gamma_{\mathrm{ch}}(t)$ berechnet, ausgedrückt werden. Die von der Zeit abhängige Spannungsantwort

$$\tau_{\mathrm{ch}}(t) = \tau_{\mathrm{ch}}[u(t)] \tag{6.15}$$

ist somit über die von der Bogenlänge abhängige Spannungsantwort $\tau_{\mathrm{ch}}(u)$ und der Bogenlänge $u(t)$ beschrieben.

Das endochrone MAXWELL Element ist im Sinne der Materialklassifizierung von HAUPT ein plastisches Materialmodell. Dies resultiert aus der Existenz einer Gleichgewichtshysterese und der Ratenunabhängigkeit. Letztere ist dadurch bedingt, dass die Spannung τ_{ch} lediglich von der Verzerrungsgeschichte in Abhängigkeit der Bogenlänge $\gamma_{\mathrm{ch}}(u)$ abhängt, nicht aber davon, mit welcher Geschwindigkeit die Bogenlängen $u(t)$ durchfahren werden. Weil die Spannung des endochronen MAXWELL Elements nicht relaxiert, kann nach Kästner (2010; S. 62) indirekt auf ratenunabhängige Eigenschaften geschlossen werden. Entsprechend Abschnitt A.5 ist die Spannung eine Gleichgewichtsspannung

$$\tau_{\mathrm{ch}} \equiv \tau_{\mathrm{ch}}^{\mathrm{eq}} \,. \tag{6.16}$$

Obwohl das endochrone MAXWELL Element ein plastisches Materialmodell ist, werden in dieser Arbeit weder $\gamma_{\mathrm{s.ch}}$ als elastische Schubverzerrung noch q als plastische Schubverzerrung bezeichnet. Diese scharfe Aufteilung der Gesamtverzerrung in elastische und plastische Verzerrungsanteile ist für klassische Plastizitätsmodelle (Haupt 2002; Absch. 5.6, 5.7) gerechtfertigt, weil diese auf einer Fließfunktion und einer Fließbedingung fußen, die das Materialverhalten in einen Vor- und Nachfließbereich aufteilen [19]. Infolgedessen entwickelt sich die plastische Verzerrung im Vorfließbereich nicht, sie bleibt konstant. Dieses Verhalten kann qualitativ anhand des PRANDTL Elements in Boisly et al. (2014b; Abb. 3(b)) nachvollzogen werden. Ein derartiges Verhalten kann jedoch nicht für das endochrone MAXWELL Element festgestellt werden. Es existiert keine Trennung in einen elastischen und plastischen Bereich. Nach Gleichung (6.7) ist jede Änderung der Gesamtverzerrung auch mit einer Evolution der inneren Variablen verbunden,

$$\text{wenn } \dot{\gamma}_{\mathrm{ch}} \neq 0 \text{ dann } \dot{q} \neq 0 \,, \tag{6.17}$$

infolgedessen sich auch $\gamma_{\mathrm{s.ch}}$ entwickelt. Der für klassische Plastizitätsmodelle geltende Sachverhalt, dass sich die plastische Verzerrung bei einer elastischen Entlastung nicht verändert, gilt somit nicht für q.

6.3 Materialantwort des endochronen MAXWELL Elements für eine konstante Schubverzerrungsrate

Um die Fließkurve des endochronen MAXWELL Elements zu bestimmen, wird im Folgenden dessen Materialverhalten für eine konstante Schubverzerrungsrate

$$\gamma_{\mathrm{ch}}(t) = \dot{\tilde{\gamma}}_{\mathrm{ch}}\, t \tag{6.18}$$

ermittelt. Zunächst ergibt sich die kinematische Bogenlänge

$$u = f_u(t) = |\dot{\tilde{\gamma}}_{\mathrm{ch}}|\, t \tag{6.19}$$

[19] Ein Vergleich zwischen endochroner Theorie und der traditionellen Interpretation von plastischen Verzerrungen ist bei Valanis (1970; S. 16), Valanis (1971c; S. 526) und Valanis (1972; S. 129) ausgearbeitet.

nach Gleichung (3.60). Weil die Inverse dieser Funktion

$$t = f_u^{-1}(u) = \frac{u}{|\dot{\hat{\gamma}}_{\mathrm{ch}}|} \qquad \forall\, u \tag{6.20}$$

existiert, kann die verzerrungsgeregelte Anregung mit konstanter Rate unter Verwendung der kinematischen Bogenlänge analytisch beschrieben werden

$$\gamma_{\mathrm{ch}}(u) = \operatorname{sign}\left(|\dot{\hat{\gamma}}_{\mathrm{ch}}|\right) u\,. \tag{6.21}$$

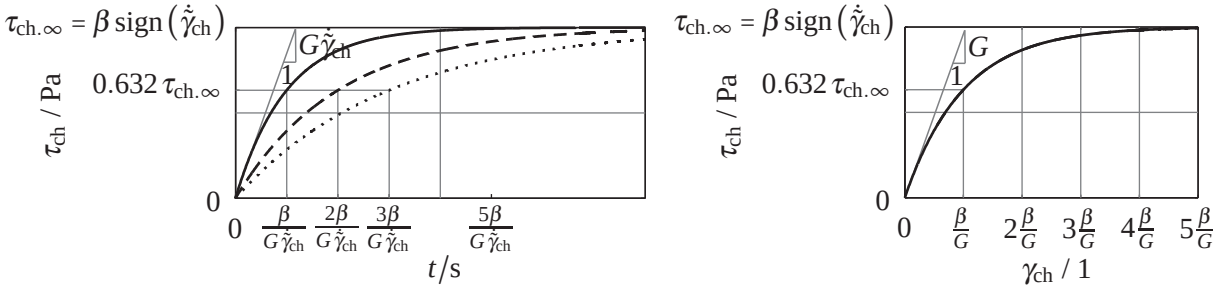
Die Spannungsantwort als Funktion der kinematischen Bogenlänge

$$\tau_{\mathrm{ch}}(u) = \beta \operatorname{sign}[\gamma'_{\mathrm{ch}}(u)] \left(1 - e^{-\frac{G}{\beta}u}\right) = \beta \operatorname{sign}\left(|\dot{\hat{\gamma}}_{\mathrm{ch}}|\right) \left(1 - e^{-\frac{G}{\beta}u}\right) \tag{6.22}$$

wird mit der ersten Darstellungsform von Gleichung (6.11) unter Beachtung von Gleichung (6.21) berechnet. Mit Gleichung (6.19) ergibt sich die Beschreibung unter Verwendung der physikalischen Zeit t

$$\tau_{\mathrm{ch}}(t) = \beta \operatorname{sign}\left(|\dot{\hat{\gamma}}_{\mathrm{ch}}|\right) \left(1 - e^{-\frac{G}{\beta}|\dot{\hat{\gamma}}_{\mathrm{ch}}|t}\right)\,. \tag{6.23}$$

Diese ist in Abbildung 6.2(a) für drei verschiedene Raten dargestellt. Die Spannungen in Abhängigkeit der Schubverzerrung sind in Abbildung 6.2(b) gezeigt.



(a) Spannungsantwort als Funktion der Zeit

(b) Spannung in Abhängigkeit der Schubverzerrung

Abbildung 6.2: Spannungsantwort eines endochronen MAXWELL Elements für konstante Schubverzerrungsraten $\dot{\gamma}_{\mathrm{ch}} = \dot{\hat{\gamma}}_{\mathrm{ch}}$: ——, $\dot{\gamma}_{\mathrm{ch}} = \frac{\dot{\hat{\gamma}}_{\mathrm{ch}}}{2}$: – – – und $\dot{\gamma}_{\mathrm{ch}} = \frac{\dot{\hat{\gamma}}_{\mathrm{ch}}}{3}$: ·····

Die jeweiligen Anstiege im Koordinatenursprung ergeben sich zu

$$\left.\frac{d\left(\tau_{\mathrm{ch}}|_{\gamma_{\mathrm{ch}}=\dot{\hat{\gamma}}_{\mathrm{ch}}t}\right)}{dt}\right|_{t=0} = G\,\dot{\hat{\gamma}}_{\mathrm{ch}} \tag{6.24}$$

$$\left.\frac{d\left(\tau_{\mathrm{ch}}|_{\gamma_{\mathrm{ch}}=\dot{\hat{\gamma}}_{\mathrm{ch}}t}\right)}{d\gamma_{\mathrm{ch}}}\right|_{\gamma_{\mathrm{ch}}=0} = G\,. \tag{6.25}$$

Der letzte Ausdruck ist unter Berücksichtigung von

$$\left.\frac{d\tau_{\mathrm{ch}}}{d\gamma_{\mathrm{ch}}}\right|_{\gamma_{\mathrm{ch}}=0} = \left.\frac{\frac{d\tau_{\mathrm{ch}}(u)}{du}\,du}{\frac{d\gamma_{\mathrm{ch}}(u)}{du}\,du}\right|_{u=0} = \left.\frac{\tau'_{\mathrm{ch}}(u)}{\gamma'_{\mathrm{ch}}(u)}\frac{du}{du}\right|_{u=0} = \left.\frac{\tau'_{\mathrm{ch}}(u)}{\gamma'_{\mathrm{ch}}(u)}\right|_{u=0} \tag{6.26}$$

berechnet. Vergleicht man Abbildungen 6.2(a) und 6.2(b) mit denen des MAXWELL Elements und PRANDTL Elements, so werden Analogien deutlich. Diese beruhen auf den Tatsachen, dass das endochrone MAXWELL Element zum einen wie das PRANDTL Element ein zweiparametriges ratenunabhängiges Modell ist, und zum anderen auf Basis des MAXWELL Elements in die endochrone Materialformulierung überführt wurde. Daher hat die Spannungsantwort als Funktion der Zeit nach Abbildung 6.2(a) die zum PRANDTL Element analoge Eigenschaft

$$\tau_{\mathrm{ch}}|_{\dot{\gamma}_{\mathrm{ch}}=\dot{\hat{\gamma}}_{\mathrm{ch}}t}(t) = \tau_{\mathrm{ch}}|_{\dot{\gamma}_{\mathrm{ch}}=\frac{\dot{\hat{\gamma}}_{\mathrm{ch}}}{2}t}(2t) = \tau_{\mathrm{ch}}|_{\dot{\gamma}_{\mathrm{ch}}=\frac{\dot{\hat{\gamma}}_{\mathrm{ch}}}{3}t}(3t)\,. \tag{6.27}$$

Analog zum MAXWELL Element besitzt die Spannungsantwort die Eigenschaften

$$\tau_{\mathrm{ch}}\big|_{\gamma_{\mathrm{ch}}=\dot{\tilde{\gamma}}_{\mathrm{ch}}t}\left(t=\frac{\beta}{G\,\dot{\tilde{\gamma}}_{\mathrm{ch}}}\right)=\tau_{\mathrm{ch}}\big|_{\gamma_{\mathrm{ch}}=\dot{\tilde{\gamma}}_{\mathrm{ch}}t}\left(\gamma_{\mathrm{ch}}=\frac{\beta}{G}\right)\approx 0.632\,\tau_{\mathrm{ch}.\infty} \tag{6.28a}$$

$$\tau_{\mathrm{ch}}\big|_{\gamma_{\mathrm{ch}}=\dot{\tilde{\gamma}}_{\mathrm{ch}}t}\left(t=2\frac{\beta}{G\,\dot{\tilde{\gamma}}_{\mathrm{ch}}}\right)=\tau_{\mathrm{ch}}\big|_{\gamma_{\mathrm{ch}}=\dot{\tilde{\gamma}}_{\mathrm{ch}}t}\left(\gamma_{\mathrm{ch}}=2\frac{\beta}{G}\right)\approx 0.865\,\tau_{\mathrm{ch}.\infty} \tag{6.28b}$$

$$\tau_{\mathrm{ch}}\big|_{\gamma_{\mathrm{ch}}=\dot{\tilde{\gamma}}_{\mathrm{ch}}t}\left(t=3\frac{\beta}{G\,\dot{\tilde{\gamma}}_{\mathrm{ch}}}\right)=\tau_{\mathrm{ch}}\big|_{\gamma_{\mathrm{ch}}=\dot{\tilde{\gamma}}_{\mathrm{ch}}t}\left(\gamma_{\mathrm{ch}}=3\frac{\beta}{G}\right)\approx 0.950\,\tau_{\mathrm{ch}.\infty} \tag{6.28c}$$

$$\tau_{\mathrm{ch}}\big|_{\gamma_{\mathrm{ch}}=\dot{\tilde{\gamma}}_{\mathrm{ch}}t}\left(t=4\frac{\beta}{G\,\dot{\tilde{\gamma}}_{\mathrm{ch}}}\right)=\tau_{\mathrm{ch}}\big|_{\gamma_{\mathrm{ch}}=\dot{\tilde{\gamma}}_{\mathrm{ch}}t}\left(\gamma_{\mathrm{ch}}=4\frac{\beta}{G}\right)\approx 0.982\,\tau_{\mathrm{ch}.\infty} \tag{6.28d}$$

$$\tau_{\mathrm{ch}}\big|_{\gamma_{\mathrm{ch}}=\dot{\tilde{\gamma}}_{\mathrm{ch}}t}\left(t=5\frac{\beta}{G\,\dot{\tilde{\gamma}}_{\mathrm{ch}}}\right)=\tau_{\mathrm{ch}}\big|_{\gamma_{\mathrm{ch}}=\dot{\tilde{\gamma}}_{\mathrm{ch}}t}\left(\gamma_{\mathrm{ch}}=5\frac{\beta}{G}\right)\approx 0.993\,\tau_{\mathrm{ch}.\infty}\ . \tag{6.28e}$$

Weil die Spannungsantwort als Funktion der Schubverzerrung in Abbildung 6.2(b) unabhängig von den Verzerrungsraten ist, wird die ratenunabhängige Eigenschaft des endochronen MAXWELL Elements offensichtich. Analog zur kritischen Schubverzerrung des PRANDTL Elements nach Boisly et al. (2014b; Gl. (24)) kann

$$\gamma_{\mathrm{cr}}=\frac{\beta}{G} \tag{6.29}$$

als charakteristische Schubverzerrung des endochronen MAXWELL Elements eingeführt werden. Sie ist ebenfalls qualitativ vergleichbar mit der Relaxationszeit eines MAXWELL Elements. Aufgrund des exponentiellen Verhaltens ist außerdem zu erkennen, dass sich die stationäre Spannungsantwort nicht instantan einstellt

$$\tau_{\mathrm{ch}.\infty}\neq\tau_{\mathrm{ch}}\big|_{\gamma_{\mathrm{ch}}=\dot{\tilde{\gamma}}_{\mathrm{bh}}t}\ . \tag{6.30}$$

Da sich aber ein stationärer Wert in guter Näherung nach $t=3\frac{\beta}{G\,\dot{\tilde{\gamma}}_{\mathrm{ch}}}$ beziehungsweise $\gamma_{\mathrm{ch}}=3\frac{\beta}{G}$ ergibt, existieren die Fließkurve (Abbildung 6.3)

$$\tau_{\mathrm{ch}.\infty}\left(\dot{\tilde{\gamma}}_{\mathrm{ch}}\right)=\beta\,\mathrm{sign}\left(\dot{\tilde{\gamma}}_{\mathrm{ch}}\right) \tag{6.31}$$

und folglich auch die differentielle Viskosität (Abbildung 6.4)

$$\eta_{\mathrm{ch.diff}}\left(\dot{\tilde{\gamma}}_{\mathrm{ch}}\right)=2\beta\,\delta\left(\dot{\tilde{\gamma}}_{\mathrm{ch}}\right)\ . \tag{6.32}$$

Die Fließkurve kann alternativ über die Bedingung $\dot{\tau}_{\mathrm{ch}}=0$ mit Gleichung (6.10), deren letzter Summand somit entfällt $G\dot{\gamma}_{\mathrm{ch}}=\frac{G}{\beta}\tau_{\mathrm{ch}}|\dot{\gamma}_{\mathrm{ch}}|+\cancel{\dot{\tau}_{\mathrm{ch}}}$, direkt berechnet werden und man erhält $\tau_{\mathrm{ch}}=\beta\,\frac{\dot{\gamma}_{\mathrm{ch}}}{|\dot{\gamma}_{\mathrm{ch}}|}=\beta\,\mathrm{sign}(\dot{\gamma}_{\mathrm{ch}})$. Das

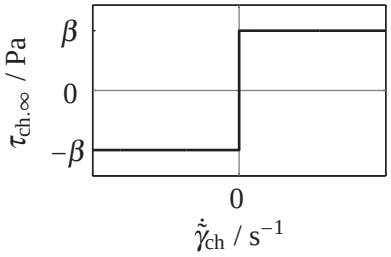


Abbildung 6.3: Fließkurve des endochronen MAXWELL Elements

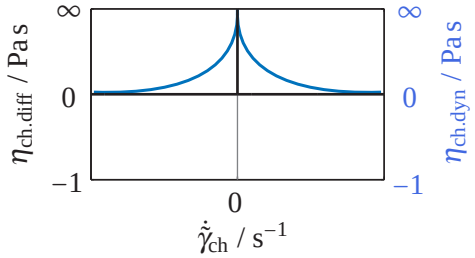


Abbildung 6.4: Differentielle und dynamische Viskosität des endochronen MAXWELL Elements

Defizit der dynamischen Viskosität, für Flüssigkeiten mit Fließspannung gegen $\pm\infty$ zu streben, wenn die Verzerrungsrate gegen Null tendiert [20], ist auch für Flüssigkeiten mit pseudo Fließspannung gegenwärtig. Würde man die Viskosität nach Gleichung (3.70) als dynamische Viskosität definieren, so würden dem endochronen MAXWELL Element viskose Eigenschaften zugeordnet werden, obwohl es ratenunabhängige

[20] (Boisly et al. 2014a; Abb. 5), (Boisly et al. 2014b; S. 4)

Eigenschaften besitzt (*Folgerung 12*). Die Interpretation von β als pseudo Fließspannung analog zur Fließspannung τ_y von Flüssigkeiten mit Fließspannung, wie beispielsweise dem Reibelement und PRANDTL Element, resultiert aus der Übereinstimmung der Fließkurven

$$\tau_{\mathrm{ch}.\infty}\left(\dot{\tilde{\gamma}}_{\mathrm{ch}}\right) = \tau_{\mathrm{f}.\infty}\left(\dot{\tilde{\gamma}}_{\mathrm{f}}\right) = \tau_{\mathrm{p}.\infty}\left(\dot{\tilde{\gamma}}_{\mathrm{p}}\right) \ . \tag{6.33}$$

Somit stimmen ebenfalls die differentiellen Viskositäten

$$\eta_{\mathrm{ch.diff}}\left(\dot{\tilde{\gamma}}_{\mathrm{ch}}\right) = \eta_{\mathrm{f.diff}}\left(\dot{\tilde{\gamma}}_{\mathrm{f}}\right) = \eta_{\mathrm{p.diff}}\left(\dot{\tilde{\gamma}}_{\mathrm{p}}\right) \tag{6.34}$$

unter Berücksichtigung von [21] $\mathrm{sign}\left(\dot{\tilde{\gamma}}\right) = \widetilde{\mathrm{sign}}\left(\dot{\gamma}\right)\big|_{\dot{\gamma}=\dot{\tilde{\gamma}}t}$ überein. Durch Messen ausschließlich der Fließkurve können das Reib-, PRANDTL und endochrone MAXWELL Element folglich nicht voneinander unterschieden werden.
Weil das endochrone MAXWELL Element nach Gleichung (6.31) eine Fließkurve sowie nach Gleichung (6.16) eine von Null verschiedene Gleichgewichtsspannung besitzt, erfüllt es die Kriterien der Klasse von Materialien mit fest-flüssig Übergang. Daher besteht die Stoffklasse der Materialien mit fest-flüssig Übergang aus Flüssigkeiten mit Fließspannung und *Flüssigkeiten mit pseudo Fließspannung*.

6.4 Verhalten des endochronen MAXWELL Elements unter verzerrungsgeregelter sinusförmiger Anregung mit physikalisch großer Amplitude

Im Folgenden wird das Materialverhalten des endochronen MAXWELL Elements unter verzerrungsgesteuerter sinusförmiger Anregung

$$\gamma_{\mathrm{ch}} = \hat{\gamma}\sin(\omega t) \tag{6.35}$$

untersucht. Um die Materialantwort ausgehend aus einem unbelasteten Zustand heraus zu berechnen, werden die Anfangsbedingungen

$$\tau_{\mathrm{ch}}(t=0) \stackrel{!}{=} 0 \tag{6.36}$$

$$\gamma_{\mathrm{s.ch}}(t=0) \stackrel{!}{=} 0 \tag{6.37}$$

$$q(t=0) \stackrel{!}{=} 0 \tag{6.38}$$

gewählt. Da auch eine von Null verschiedene innere Variable q die Gleichung (6.36) erfüllen kann, ist ebenso die Bedingung aus Gleichung (6.38) erforderlich, um die pseudo kritische Schubverzerrung $\gamma_{\mathrm{cr}} = \frac{\beta}{G}$ entsprechend Gleichung (6.29) sinnvoll definieren zu können. Zur Berechnung der Spannungsantwort wird zunächst die kinematische Bogenlänge für

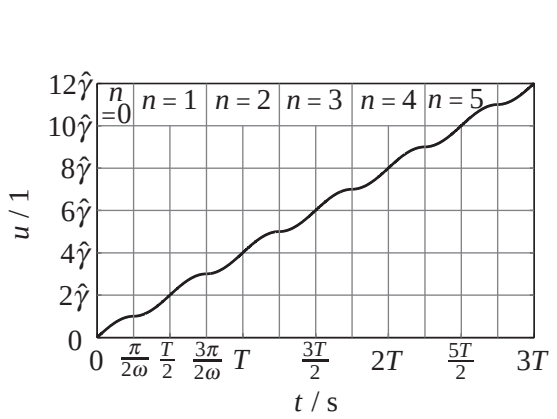
$$n \geq 0 \ : \qquad u = f_u(t) = \hat{\gamma}\left[2n + (-1)^n \sin(\omega t)\right] \qquad \frac{(2n-1)\pi}{2\omega} \leq t \leq \frac{(2n+1)\pi}{2\omega} \tag{6.39}$$

ermittelt. Dies ist ausführlich in Anhang A.6.1 dokumentiert. Aufgrund des alternierenden Vorzeichens von $\dot{\gamma}_{\mathrm{ch}}$ ist die kinematische Bogenlänge eine abschnittsweise definierte Funktion, die aus n Abschnitten mit jeweils konstantem Vorzeichen der Schubverzerrungsrate besteht. Die Bogenlänge ist in Abbildungen 6.5 und A.1 dargestellt. Folglich ist die Inverse $f_u^{-1}(u)$ ebenfalls lediglich stückweise definiert. Daher existiert Gleichung (6.5) nicht für alle u als geschlossene Funktion, sodass die Spannungsantwort auch abschnittsweise definiert ist. Die Berechnung der Spannung

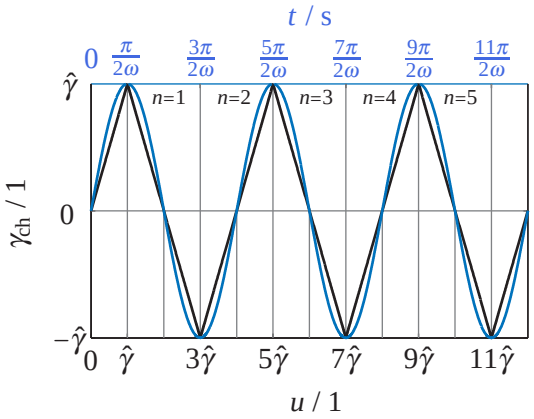
$$n = 0: \quad \tau_{\mathrm{ch}}[u(t)] = \beta\left[(-1)e^{-\frac{u(t)}{\gamma_{\mathrm{cr}}}} + 1\right] \qquad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2\omega} \tag{6.40a}$$

$$n \geq 1: \quad \tau_{\mathrm{ch}}[u(t)] = \beta\left[\left(2\frac{(-1)^{n+1}e^{(2n+1)\frac{\hat{\gamma}}{\gamma_{\mathrm{cr}}}} + e^{\frac{\hat{\gamma}}{\gamma_{\mathrm{cr}}}}}{e^{\frac{2\hat{\gamma}}{\gamma_{\mathrm{cr}}}} + 1} - 1\right)e^{-\frac{u(t)}{\gamma_{\mathrm{cr}}}} + (-1)^n\right] \qquad \frac{(2n-1)\pi}{2\omega} \leq t \leq \frac{(2n+1)\pi}{2\omega} \tag{6.40b}$$

erfolgt über die zweite Darstellungsform von Gleichung (6.12) ausführlich in Abschnitt A.6.1. Spannungsantworten sind für verschiedene Schubverzerrungsamplituden in Abbildung 6.6(a) dargestellt. Die entsprechenden Graphen der inneren Variable q, deren Verhalten über Gleichung (6.2a) berechnet ist, sind in



(a) Kinematische Bogenlänge $u(t)$ für eine verzerrungsgeregelte sinusförmige Anregung



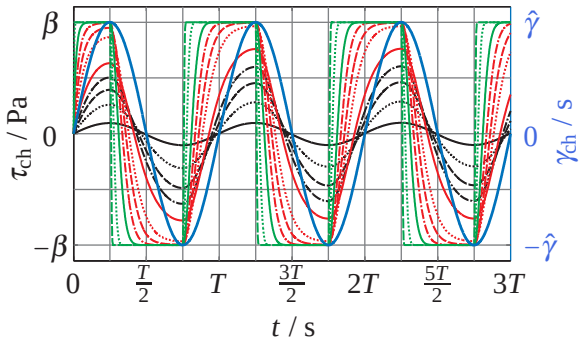
(b) Verlauf der Schubverzerrung $\gamma_{\mathrm{ch}}(t)$ —— im Vergleich zu $\gamma_{\mathrm{ch}}(u)$ —— zur Validierung von Gleichung (6.14)

Abbildung 6.5: Aufteilung des Verlaufs der Schubverzerrung $\gamma_{\mathrm{ch}}(t)$ in $\gamma_{\mathrm{ch}}(u)$ und die kinematische Bogenlänge $u(t)$ nach Gleichung (3.61)

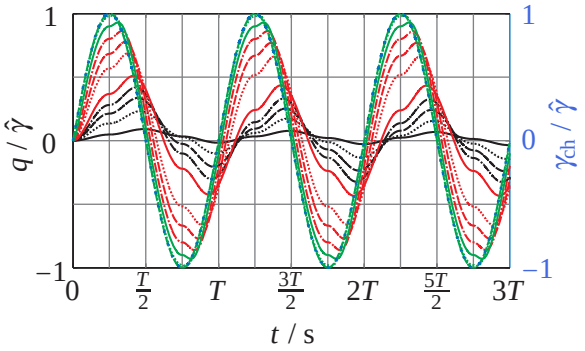
Abbildung 6.6(b) gegeben. Es ist zu erkennen, dass die Maximalspannung in guter Näherung der pseudo Fließspannung β entspricht, sobald die Schubverzerrungsamplitude circa das Doppelte der kritischen Schubverzerrung beträgt

$$\mathrm{MAX}\left\{ \tau_{\mathrm{ch}}|_{\gamma_{\mathrm{ch}}=\hat{\gamma}\sin(\omega t)} \right\} \approx \beta \qquad \hat{\gamma} \geq 2\,\gamma_{\mathrm{cr}}\,. \tag{6.41}$$

Dieser Sachverhalt liegt nach Boisly et al. (2014b; Abb. 3(a)) analog zum PRANTL Element vor, bei dem das Maximum der Spannungsantwort gleich der Fließspannung τ_{y} ist, sobald die Schubverzerrungsamplitude den Wert der kritischen Schubverzerrung annimmt. Wenn die Schubverzerrungsamplitude geringer



(a) Spannungsantwort als Funktion der Zeit zu verzerrungsgeregelter sinusförmiger Anregung



(b) Innere Variable als Funktion der Zeit zu verzerrungsgeregelter sinusförmiger Anregung

Abbildung 6.6: Materialantwort des endochronen MAXWELL Elements zu verzerrungsgeregelter sinusförmiger Anregung für $G = 5\cdot10^4\,\mathrm{Pa}$ und $\beta = 5\,\mathrm{Pa}$; $\hat{\gamma} = 10^{-5}$: ——, $\hat{\gamma} = 3\cdot10^{-5}$: ·····, $\hat{\gamma} = 5\cdot10^{-5}$: – – –, $\hat{\gamma} = 7\cdot10^{-5}$: - · - · -, $\hat{\gamma} = \gamma_{\mathrm{cr}} = 10^{-4}$: ——, $\hat{\gamma} = 2\cdot10^{-4}$: ····· , $\hat{\gamma} = 3\cdot10^{-4}$: – – –, $\hat{\gamma} = 5\cdot10^{-4}$: - · - · -, $\hat{\gamma} = 10^{-3}$: ——, $\hat{\gamma} = 5\cdot10^{-3}$: ·····, $\hat{\gamma} = 7\cdot10^{-2}$: – – –

als 3/10 der kritschen Schubverzerrung ist, so besitzt das endochrone MAXWELL Element

$$\text{HOOKEsches Verhalten}: \qquad \hat{\gamma} \leq \frac{3}{10}\,\gamma_{\mathrm{cr}}\,. \tag{6.42}$$

Dies ist ebenfalls in den PIPKIN Diagrammen der Abbildungen 6.10 und 6.11 zu erkennen. Daher kann der Maximalwert der Spannungsantwort in diesem Bereich über die elastische Näherung

$$\mathrm{MAX}\left\{ \tau_{\mathrm{ch}}|_{\gamma_{\mathrm{ch}}=\hat{\gamma}\sin(\omega t)} \right\} \approx G\,\hat{\gamma} \qquad \hat{\gamma} \lesssim \frac{3}{10}\,\gamma_{\mathrm{cr}} \tag{6.43}$$

[21] (Boisly et al. 2014a; Gl. (10)), (Boisly et al. 2014b; Gl. (15))

abgeschätzt werden. Analog zum PRANDTL Element kann die Charakteristik der Spannungsantwort je nach Lage des Zeitpunktes t_3 in einen MODE 1 und 2 aufgeteilt werden (Boisly et al. 2014b; S. 6)

$$\text{MODE 1:} \qquad \frac{\pi}{2\omega} < t_3 < \frac{\pi}{\omega} \tag{6.44}$$

$$\text{MODE 2:} \qquad \frac{\pi}{\omega} < t_3 < \frac{3\pi}{2\omega} \,. \tag{6.45}$$

Die von der Zeit abhängigen Spannungsantworten für MODE 1 und 2 sind in Abbildung 6.7 dargestellt. Da der Zeitpunkt t_3 nicht analytisch bestimmt werden kann, wie es für das PRANDTL Element möglich ist,

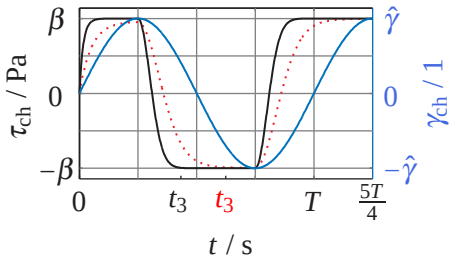


Abbildung 6.7: Transiente Spannungsantwort zu verzerrungsgeregelter sinusförmiger Anregung für $\hat{\gamma} = 10\,\gamma_{cr} = 10^{-3}$ (MODE 1: ——) und $\hat{\gamma} = 3\,\gamma_{cr} = 3\cdot10^{-4}$ (MODE 2: ·····) mit $G = 5\cdot10^4\,\text{Pa}$ und $\beta = 5\,\text{Pa}$ analog zum PRANDTL Element nach Boisly et al. (2014b; Abb. 3(a))

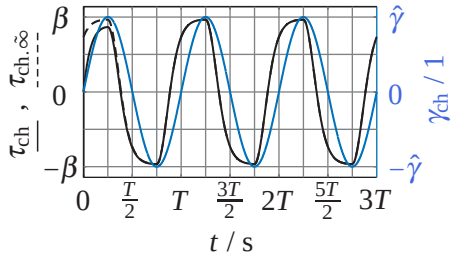


Abbildung 6.8: Transiente Spannungsantwort zu verzerrungsgeregelter sinusförmiger Anregung $\tau_{ch}|_{\gamma_{ch}=\hat{\gamma}\sin(\omega t)}$: —— im Vergleich zum asymptotischen Verlauf $\tau_{ch.\infty}$: − − − (Kammer 2015; Abb. 28(b)) für $G = 5\cdot10^4\,\text{Pa}$, $\beta = 5\,\text{Pa}$ und $\hat{\gamma} = 2\,\gamma_{cr} = 2\cdot10^{-4}$

wird die numerisch evaluierte Abschätzung

$$\text{MODE 1:} \qquad 4\gamma_{cr} \lesssim \hat{\gamma} \tag{6.46}$$

$$\text{MODE 2:} \qquad 2\gamma_{cr} \lesssim \hat{\gamma} \lesssim 4\,\gamma_{cr} \tag{6.47}$$

in Analogie zu Boisly et al. (2014b; Gl. (29), (30)) gewählt. Weiterhin ist in Abbildung 6.7 zu erkennen, dass sich die Spannungsantwort nicht instantan einstellt

$$\tau_{ch.\infty} \neq \tau_{ch}|_{\gamma_{ch}=\hat{\gamma}\sin(\omega t)} \,. \tag{6.48}$$

Die LISSAJOUS Diagramme für MODE 1 und 2 sind in Abbildung 6.9 dargestellt. Sie sind ebenfalls qualitativ vergleichbar mit denen des PRANDTL Elements aus Boisly et al. (2014b; Abb. 7). Die Übersicht des

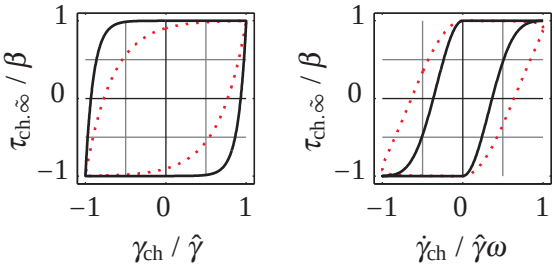


Abbildung 6.9: (a) Erstes LISSAJOUS Diagramm und (b) zweites LISSAJOUS Diagramm des endochronen MAXWELL Elements zu verzerrungsgeregelter sinusförmiger Anregung mit $G = 5\cdot10^4\text{Pa}$ und $\beta = 5\text{Pa}$; MODE 1: —— für $\hat{\gamma} = 10\,\gamma_{cr} = 10^{-3}$; MODE 2: ····· für $\hat{\gamma} = 3\,\gamma_{cr} = 3\cdot10^{-4}$

gesamten Spektrums von LISSAJOUS Diagrammen ist durch die ersten und zweiten PIPKIN Diagramme in Abbildungen 6.10 und 6.11 gegeben. Für physikalisch „kleine“ Verzerrungsamplituden verhält sich das endochrone MAXWELL Element wie eine HOOKEsche Feder. Daher ist das erste LISSAJOUS Diagramm in guter Näherung eine Gerade und das Zweite ein Kreis. Für physikalisch „große“ Verzerrungsamplituden gleicht das Verhalten des endochronen MAXWELL Elements im Grenzfall dem eines Reibelements.

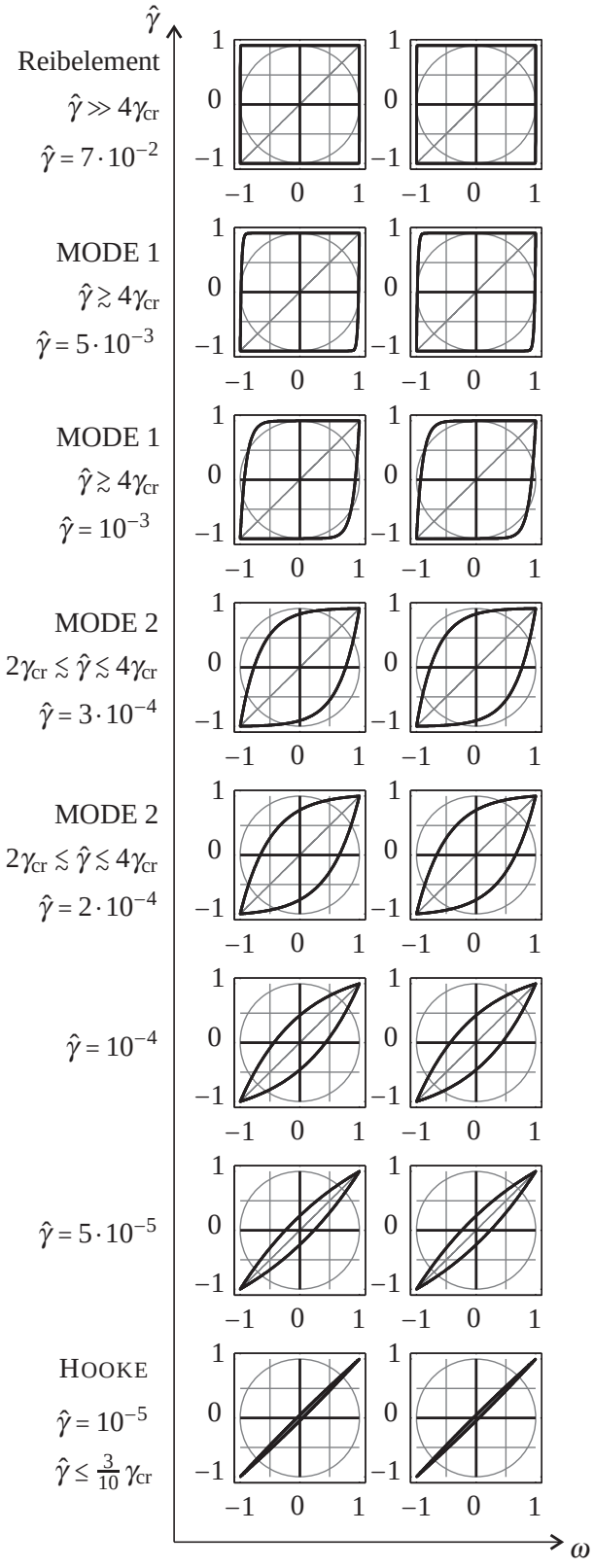


Abbildung 6.10: Erstes PIPKIN Diagramm, $\tau_{ch.\infty}/\mathrm{MAX}\{\tau_{ch.\infty}\}$ über $\gamma_{ch}/\hat{\gamma}$, für das endochrone MAXWELL Element mit $G = 5 \cdot 10^4$Pa und $\beta = 5$Pa

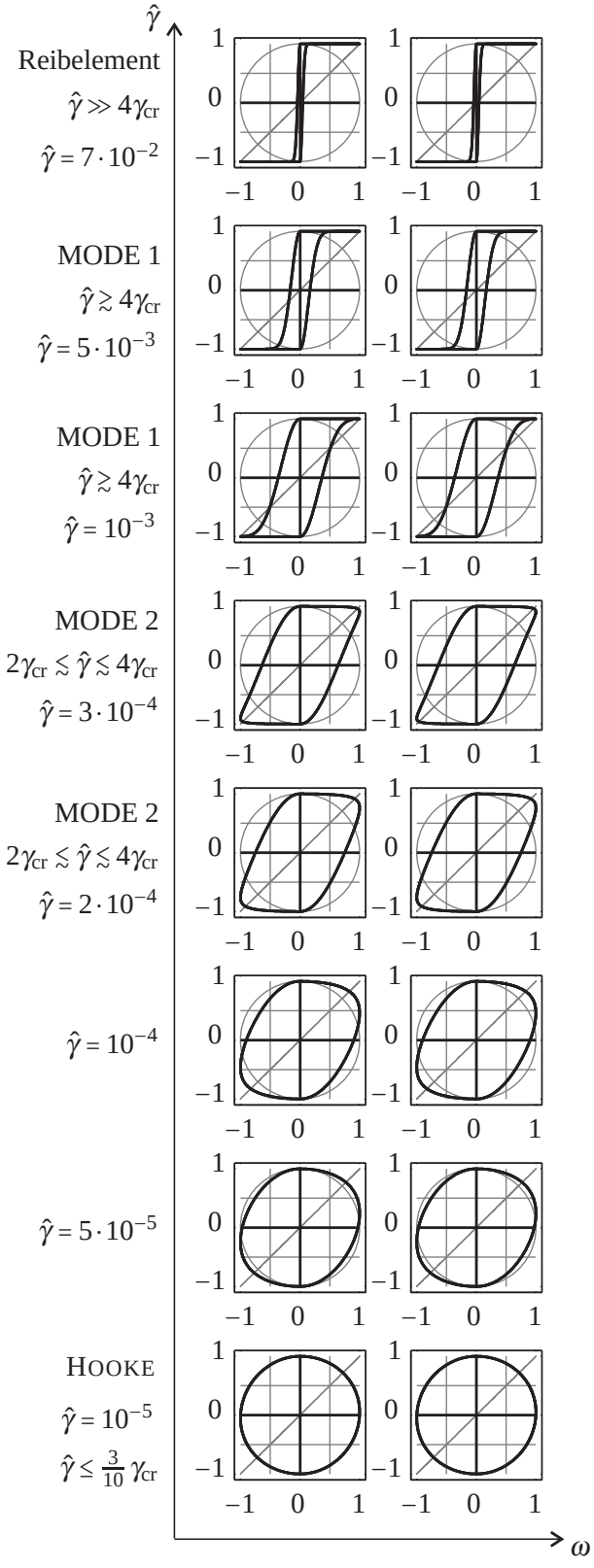


Abbildung 6.11: Zweites PIPKIN Diagramm, $\tau_{ch.\infty}/\mathrm{MAX}\{\tau_{ch.\infty}\}$ über $\dot{\gamma}_{ch}/\hat{\gamma}\omega$, für das endochrone MAXWELL Element mit $G = 5 \cdot 10^4$Pa und $\beta = 5$Pa

Infolgedessen ist das erste LISSAJOUS Diagramm ein Quadrat (Maxey et al. 2008; Abb. 1), und das Zweite eine Treppenfunktion. Ratenunabhängige Eigenschaften des endochronen MAXWELL Elements sind auch daran erkennbar, dass die LISSAJOUS Diagramme nicht von der Kreisfrequenz abhängen (*Folgerung 10*). Um Speicher- und Verlustmodul sowie Höherharmonische berechnen zu können, wird zunächst ein für den eingeschwungenen Zustand repräsentativer Bereich identifiziert. Anstelle den Zeitpunkt $\tilde{t}_0$ des in Gleichung (3.87) eingeführten STEADYSTATE Operators zu ermitteln, wird die abklingende Exponentialfunktion aus Gleichung (6.40) direkt durch Bestimmen der asymptotischen Spannungsantwort

$$\tau_{\mathrm{ch}.\tilde{\infty}}(t) = \lim_{u(t)\to\infty} \tau_{\mathrm{ch}}(t) = \beta \left[\frac{(-1)^{n+1}}{\cosh\left(\frac{\hat{\gamma}}{\gamma_{\mathrm{cr}}}\right)} e^{(-1)^{n+1}\frac{\hat{\gamma}}{\gamma_{\mathrm{cr}}}} \sin(\omega t) + (-1)^n \right] \qquad \frac{(2n-1)\pi}{2\omega} \le t \le \frac{(2n+1)\pi}{2\omega} \quad (6.49)$$

gefiltert. Dies ist anhand Gleichung (A.142) in Anhang A.6.1 dargelegt. Die asymptotische Spannungsantwort ist in Abbildung 6.8 im Vergleich zur transienten Spannungsantwort dargestellt. Weil das endochrone MAXWELL Element ein nichtlineares Materialmodell ist, werden die harmonischen Materialfunktionen entsprechend den Definitionen für LAOS berechnet. Der Speichermodul

$$G'_{\mathrm{ch}}(\hat{\gamma}) \approx \frac{1}{\cosh\left(\frac{G\hat{\gamma}}{\beta}\right)} \left[G + \beta \sum_{i=0}^{n} \left(\frac{1}{2^{2i+2}\,(i+2)\,[(i+1)!]^2} \frac{\hat{\gamma}^{2i+2}}{\left(\frac{\beta}{G}\right)^{2i+3}} \right) \right] \qquad i \in \mathbb{N} \qquad (6.50)$$

ist auf Basis von Gleichung (A.167) in Anhang A.6.2 abgeleitet. Da Gleichung (A.167) jedoch eine unendliche Potenzreihe enthält und somit für numerische Berechnungen ungeeignet ist, wurde die Potenzreihe in Gleichung (6.50) nach *n* Gliedern abgebrochen. Eine Untersuchung der Modellvorhersage in Abhängigkeit der Anzahl *n* berücksichtigter Reihenglieder ist in Anhang A.6.4 vorgenommen. Anhand von Abbildung A.2 ist verdeutlicht, dass für $G = 5 \cdot 10^4$ Pa und $\beta = 5$ Pa die mit MATLAB® maximal mögliche Zahl $n = 37$ nicht genügt, um die Güte der Referenzlösung zu erzielen. Die Referenzlösung

$$a_{\mathrm{ch}.k}(\hat{\gamma}_i) = \frac{\omega}{\hat{\gamma}_i \pi} \sum_{l=1}^{n} \left\{ \left[\tau_{\mathrm{ch}.\tilde{\infty}}(t_{l+1}) \sin(k\omega t_{l+1}) + \tau_{\mathrm{ch}.\tilde{\infty}}(t_l) \sin(k\omega t_l) \right] \cdot \left[t_{l+1} - t_l \right] \right\} \qquad (6.51)$$

$$b_{\mathrm{ch}.k}(\hat{\gamma}_i) = \frac{\omega}{\hat{\gamma}_i \pi} \sum_{l=1}^{n} \left\{ \left[\tau_{\mathrm{ch}.\tilde{\infty}}(t_{l+1}) \cos(k\omega t_{l+1}) + \tau_{\mathrm{ch}.\tilde{\infty}}(t_l) \cos(k\omega t_l) \right] \cdot \left[t_{l+1} - t_l \right] \right\} \qquad (6.52)$$

$$i = 1 \ldots \mathrm{MAX}\{\underline{\hat{\gamma}}\}; \quad t_l = t_1 \ldots t_n \ \text{ mit } t_n = t_1 + \frac{T}{2}$$

wird *semi-analytisch* berechnet. Dazu wird die analytisch bestimmte Spannungsantwort aus Gleichung (6.40) entsprechend den Gleichungen (3.119) bis (3.122) mit der *Trapezregel* [22] numerisch integriert. Die Vorgehensweise ist in Anhang A.6.4 ausführlich erläutert. Der auf Grundlage der semi-analytischen Lösung bestimmte Speichermodul ist in Abbildung 6.12 dargestellt. Der charakteristische Punkt

$$\lim_{\hat{\gamma}\to 0} G'_{\mathrm{ch}} = \lim_{\hat{\gamma}\to 0} G'_{\mathrm{p}} = G \qquad (6.53)$$

ist durch die Analogie zum PRANDTL Element (Boisly et al. 2014b; Gl. (31)) motiviert. Er ist aus Gleichung (A.167) abgeleitet (*Folgerung 5*). Zur Berechnung des Verlustmoduls

$$G''_{\mathrm{ch}}(\hat{\gamma}) = \frac{4\beta}{\hat{\gamma}\pi} \left[1 - \frac{\beta}{G\hat{\gamma}} \tanh\left(\frac{G\hat{\gamma}}{\beta}\right) \right] \qquad (6.54)$$

ist Gleichung (3.120) gelöst (Kammer 2015; S. 42). Die Struktur der Gleichung ist völlig identisch mit der Struktur des für den Nachfließbereich gültigen Verlustmoduls des PRANDTL Elements aus Boisly et al. (2014b; Gl. (37)). Das Verhalten im Unendlichen

$$\lim_{\hat{\gamma}\to\infty} G''_{\mathrm{ch}}(\hat{\gamma}) = \lim_{\hat{\gamma}\to\infty} G''_{\mathrm{p}}(\hat{\gamma}) = 0 \qquad (6.55)$$

[22] (Oelschlägel und Matthäus 1988; S. 48), (Schwetlick und Roos 1999; S. 18, 123), (Plato 2006; S. 117), (Freund und Hoppe 2007; S. 166), (Dahmen und Reusken 2008; S. 348), ; numerische Umsetzung mit der von MATLAB® bereit gestellten Funktion *trapz*

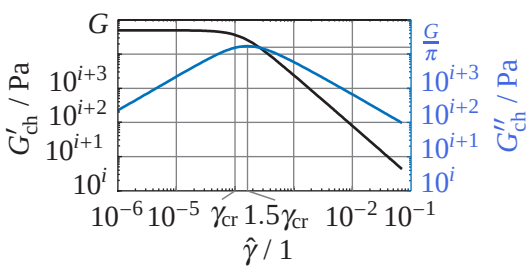


Abbildung 6.12: Speichermodul des endochronen MAXWELL Elements in Abhängigkeit von der Schubverzerrungsamplitude auf Grundlage der semi-analytischen Lösung nach Gleichung (6.51) mit $k = 1$; Verlustmodul nach Gleichung (6.54) für $\gamma_{cr} = \frac{\beta}{G}$, $G = 5 \cdot 10^4$Pa und $\beta = 5$Pa

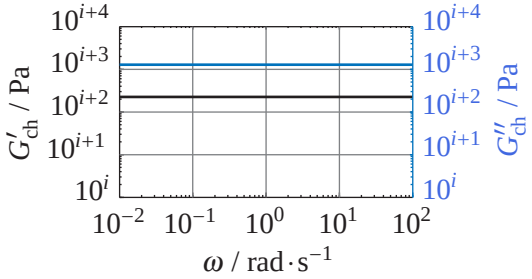


Abbildung 6.13: Speichermodul des endochronen MAXWELL Elements in Abhängigkeit von der Kreisfrequenz auf Grundlage der semi-analytischen Lösung nach Gleichung (6.51) mit $k = 1$; Verlustmodul nach Gleichung (6.54) im Bereich $G''_{ch}(\hat{\gamma}) > G'_{ch}(\hat{\gamma})$

gleicht ebenfalls dem des PRANDTL Elements (Boisly et al. 2014b; Gl. (40)). Das Verhalten des Verlustmoduls ist in Abbildung 6.12 grafisch dargestellt. Aufgrund des endochronen Verhaltens steigt der Verlustmodul nicht sprunghaft, sondern kontinuierlich an. Daher ergibt sich

$$\lim_{\hat{\gamma}\to 0} G''_{ch}(\hat{\gamma}) = 0 \tag{6.56}$$

im Unterschied zum PRANDTL Element (Boisly et al. 2014b; Gl. (36)) (*Folgerung 19*). Das Maximum des Verlustmoduls konnte vom Autor dieser Arbeit nicht analytisch bestimmt werden. Stattdessen wird

$$\mathrm{MAX}\left\{G''_{ch}(\hat{\gamma})\right\} \approx \mathrm{MAX}\left\{G''_{p}(\hat{\gamma})\right\} \approx G''_{ch}(\hat{\gamma} \approx 1.5\,\gamma_{cr}) \approx \frac{G}{\pi} \tag{6.57}$$

in Analogie zum PRANDTL Element nach Boisly et al. (2014b; Gl. (39)) motiviert. Lediglich die Verzerrungsamplitude des Maximums in Höhe von $\hat{\gamma} = 1.5\,\gamma_{cr}$ weicht marginal von der des PRANDTL Elements $\hat{\gamma} = 2\,\gamma_{cr}$ aus Boisly et al. (2014b; Abb. 4) ab. Weil das endochrone MAXWELL Element ratenunabhängig ist, sind Speicher- und Verlustmodul, wie man in Abbildung 6.13 erkennen kann, unabhängig von der Kreisfrequenz. (*Folgerung 10*) Die Höherharmonischen

$$a_{ch.k}(\hat{\gamma}) = \frac{2\beta}{\pi \cosh\left(\frac{\hat{\gamma}}{\gamma_{cr}}\right) \hat{\gamma}} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} e^{\frac{\hat{\gamma}}{\gamma_{cr}} \sin(\theta)} \sin(k\theta)\, d\theta \qquad k = \text{ungerade} \tag{6.58}$$

$$b_{ch.k}(\hat{\gamma}) = \frac{4\beta}{\pi \hat{\gamma}} \frac{(-1)^{\frac{k-1}{2}}}{k} + \frac{2\beta}{\pi \cosh\left(\frac{\hat{\gamma}}{\gamma_{cr}}\right) \hat{\gamma}} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} e^{\frac{\hat{\gamma}}{\gamma_{cr}} \sin(\theta)} \cos(k\theta)\, d\theta \qquad k = \text{ungerade} \tag{6.59}$$

sind in Anhang A.6.3 hergeleitet. Drückt man die Exponentialfunktion durch eine unendliche Potenzreihe

$$e^x = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!} \tag{6.60}$$

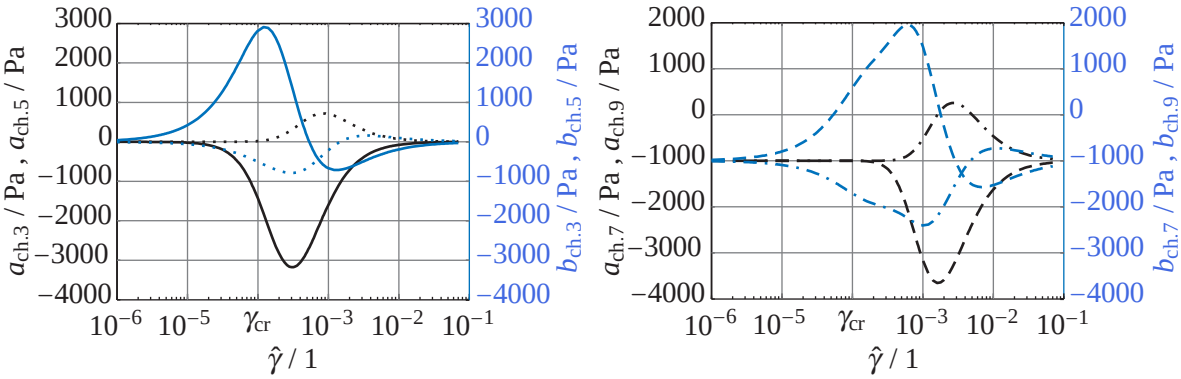
aus, und bricht diese wie in Anhang A.6.3 beschrieben nach n Gliedern ab, so erhält man

$$a_{ch.k}(\hat{\gamma}) \approx \frac{2\beta}{\pi \cosh\left(\frac{\hat{\gamma}}{\gamma_{cr}}\right)} \sum_{i=2}^{n} \left[\left(\frac{G}{\beta}\right)^i \frac{\hat{\gamma}^{i-1}}{i!} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \sin^i(\theta) \sin(k\theta)\, d\theta \right] \qquad k = \text{ungerade} \tag{6.61}$$

$$b_{ch.k}(\hat{\gamma}) \approx \frac{4\beta}{\pi k \hat{\gamma}} \left[\frac{(-1)^{\frac{k+1}{2}}}{\cosh\left(\frac{\hat{\gamma}}{\gamma_{cr}}\right)} + (-1)^{\frac{k-1}{2}} \right] + \frac{2\beta}{\pi \cosh\left(\frac{\hat{\gamma}}{\gamma_{cr}}\right)} \sum_{i=2}^{n} \left[\left(\frac{G}{\beta}\right)^i \frac{\hat{\gamma}^{i-1}}{i!} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \sin^i(\theta) \cos(k\theta)\, d\theta \right]$$

$$k = \text{ungerade}\,. \tag{6.62}$$

Wie in Anhang A.6.3 beschrieben ist, rechtfertigt der Nutzen nicht den Aufwand zur analytischen Berechnung der Integrale aus Gleichungen (6.61) und (6.62). Außerdem besteht dazu an dieser Stelle kein zwingender Grund, da wesentliche charakteristische Punkte mittels des Analogieprinzips zur analytischen Lösung des PRANDTL Elements postuliert und numerisch verifiziert werden können. Deswegen und aufgrund der Tatsache, dass weder die grafische Darstellung der analytischen Lösung basierend auf Exponentialfunktion (Gleichungen (6.58) und (6.59)) noch die Graphen der analytischen Lösung auf Basis der abgebrochenen Potenzreihe (Gleichungen (6.61) und (6.62)) die Qualität der semi-analytischen Lösung besitzen, ist letztere vorzuziehen. Dies ist ausführlich in Anhang A.6.4 beschrieben. Die Höherharmonischen



(a) $a_{ch.3}(\hat{\gamma})$: ——, $b_{ch.3}(\hat{\gamma})$: ——, $a_{p.5}(\hat{\gamma})$: ·····, $b_{p.5}(\hat{\gamma})$: ····· (b) $a_{ch.7}(\hat{\gamma})$: ——, $b_{ch.7}(\hat{\gamma})$: ——, $a_{p.9}(\hat{\gamma})$: ·····, $b_{p.9}(\hat{\gamma})$: ·····

Abbildung 6.14: Höherharmonische des endochronen MAXWELL Elements in Abhängigkeit der Schubverzerrungsamplitude auf Basis der semi-analytischen Lösung nach Gleichungen (6.51) und (6.52) für $\gamma_{cr} = \frac{\beta}{G}$, $G = 5 \cdot 10^4$Pa und $\beta = 5$Pa

sind in Abbildung 6.14 dargestellt. Dass die Höherharmonischen $a_{ch.k}$ und $b_{ch.k}$ für $\hat{\gamma} \leq \frac{3}{10}\gamma_{cr}$ verschwinden,

$$\lim_{\hat{\gamma}\to 0} a_{ch.k}(\hat{\gamma}) = 0 \tag{6.63}$$

$$\lim_{\hat{\gamma}\to 0} b_{ch.k}(\hat{\gamma}) = 0\,, \tag{A.186}$$

ist verständlich, da sich das endochrone MAXWELL Element in diesem Bereich nach Gleichung (6.42) in guter Näherung wie eine HOOKEsche Feder verhält. Die normierten Intensitäten sind in Abhängigkeit der Schubverzerrungsamplitude in Abbildung 6.15 gezeigt. Entsprechend den bisherigen Erkenntnissen nehmen die normierten Intensitäten die Werte des Reibelements an, sobald die Schubverzerrungsamplitude viel größer als die kritische Schubverzerrung ist

$$\frac{I_{ch.k}}{I_{ch.1}}(\hat{\gamma} \approx 500\gamma_{cr}) \approx \frac{I_{p.k}}{I_{p.1}} \approx \frac{I_{f.k}}{I_{f.1}} = \frac{1}{k}\,. \tag{6.64}$$

Da die Höherharmonischen und folglich auch die normierten Intensitäten, ebenso wie Speicher- und Verlustmodul aufgrund der ratenunabhängigen Eigenschaften des endochronen MAXWELL Elements nicht von der Kreisfrequenz abhängen, wird auf die grafische Darstellung verzichtet.

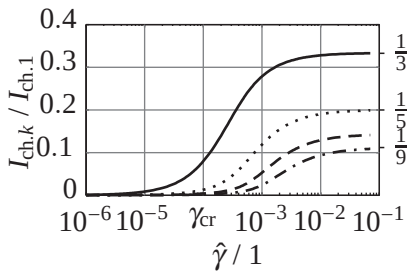


Abbildung 6.15: Normalisierte Intensitäten des endochronen MAXWELL Elements als Funktion der Schubverzerrungsamplitude basierend auf den semi-analytischen Lösungen nach Gleichungen (6.51) und (6.52) für $\gamma_{cr} = \frac{\beta}{G}$, $G = 5 \cdot 10^4$Pa und $\beta = 5$Pa; $k = 3$: ——, $k = 5$: ·····, $k = 7$: – – –, $k = 9$: - · - · -

7. Konzept und Identifikation der Fließspannung

7.1 Fließspannung als phänomenologischer Materialparameter

Die Fließspannung wird in dieser Arbeit als ein phänomenologischer Materialparameter behandelt, der das Materialverhalten des Reibelements (Boisly et al. 2014a) beschreibt (*Folgerung 20*). Er ist eine konstante Größe ähnlich wie der Elastizitätsmodul der HOOKEschen Feder ein konstanter Materialparameter ist (Barnes 1999; S. 136). Jedoch sticht die Fließspannung aus der Vielzahl an Materialparametern eines viskoplastischen Materialmodells als ein besonderer Parameter heraus. Die Fließspannung ist derjenige Materialparameter, der den phänomenologischen fest-flüssig Übergang maßgeblich beeinflusst. Aufgrund des besonderen Stellenwerts der Fließspannung, hat sie in der Vergangenheit zu Diskussionen veranlasst. Dabei wurden verschiedenste Auffassungen hinsichtlich der Existenz und Messung der Fließspannung diskutiert. Beispielsweise gibt es die Meinungen, dass die Fließspannung kein Materialparameter ist oder aber von der Lastgeschichte abhängt [1]. Andere Autoren sind wiederum der Ansicht, dass die Fließspannung nicht existiere [2]. Beispielsweise unterteilt Houwink (1957; S. 14) die Fließspannung in diesem Zusammenhang in eine scharfe und eine unscharfe Fließspannung. Dieser Tatbestand sowie die Vielfalt an vorgeschlagenen Identifizierungsmethoden [3] verdeutlicht die teils kontroversen Meinungen zur Fließspannung und deren messtechnischen Bestimmung [4]. Dass die experimentell bestimmte Fließspannung maßgeblich von der Messmethode abhängt [5], liegt nach Auffassung von Nguyen und Boger (1992; S. 65), Tiu et al. (2006; S. 654) und Oswald (2009; S. 13) unter anderem an

- zu stark vereinfachten Materialmodellen, (S5)
- einer unzureichenden Genauigkeit der Messsysteme in Relation zur Messmethode, (S6)
- der Tatsache, dass theoretische Annahmen bei der praktischen Umsetzung nicht erfüllt sind, und (S7)
- dass die Messmethoden phänomenologisch gleichwertig behandelt werden, sich jedoch auf mikroskopischer Ebene des Prüfkörpers unterschiedlich auswirken (Coussot et al. 2009) und diese Unterschiede vom Materialmodell nicht abgebildet werden. (S8)

Neben diesen Gründen ist die Aussage von Uhlherr et al. (2005; S. 102), dass die Fließspannung eine bedeutende Größe und ein wichtiges rheologisches Konzept ist, deren Definition dringend einer Erklärung bedarf [6], Anlass, um die Auffassung des Autors kurz darzulegen: Das Konzept der Fließspannung wird in

[1] (Nguyen und Boger 1992; S. 65), (Coussot et al. 2002a; S. 1), (Moller et al. 2006; S. 274), (Ewoldt 2006; S. 125), (Ewoldt et al. 2007a; S. 640), (Ewoldt 2009; S. 209), (Mezger 2010; S. 57), (Fall et al. 2010; S. 1, 4)

[2] (Houwink 1957; S. 14, 31), (Keentok 1982; S. 325), (Valanis und Fan 1983; S. 790), (Barnes und Walters 1985), (Doraiswamy et al. 1991; S. 655), (Nguyen und Boger 1992; S. 62), (Husband et al. 1993; S. 216), (Coussot und Boyer 1995; S. 535), (Steffe 1996; S. 35), (Barnes 1999; S. 133, 146, 169, 173), (Stokes und Telford 2004; S. 138), (Uhlherr et al. 2005; S. 101, 107), (Tiu et al. 2006; S. 653), (Hess, Kröger und Fischer 2006; S. 385), (Mitsoulis 2007; S. 136), (Andrade 2008; S. 13, 33), (Bonn und Denn 2009), (Oswald 2009; S. 13)

[3] (Keentok 1982; S. 326), (Yoshimura et al. 1987), (Nguyen und Boger 1992), (Coussot und Boyer 1995; S. 535), (Steffe 1996), (Barnes 1999), (Zhu et al. 2001; 1112), (Coussot et al. 2002b; S. 574), (Uhlherr et al. 2005; S. 293), (Tiu et al. 2006; S. 653), (Maxey et al. 2008; S. 1), (Pham et al. 2008; Tab. 2), (Le Grand und Petekidis 2008; S. 580), (Paredes et al. 2011; S. 1), (Segovia-Gutierrez et al. 2012; ch. IV, V), (Willenbacher und Georgieva 2013; S. 9)

[4] (Houwink 1957; S. 14), (James et al. 1987; S. 438), (Nguyen und Boger 1992; S. 62, 65), (Barnes 1999; S. 136, 140), (Zhu et al. 2001; S. 1105), (Stokes und Telford 2004; S. 138), (Uhlherr et al. 2005; S. 293), (Rouyer et al. 2005; S. 111), (Moller et al. 2006; S. 274, 275), (Tiu et al. 2006; S. 655), (Maxey und Hughes 2007; S. 2), (Mitsoulis 2007; S. 136), (Fall et al. 2010; S. 1), (Bhavsar et al. 2013), (Willenbacher und Georgieva 2013; S. 9)

[5] (Steffe 1996; S. 37), (Barnes 1999; S. 169), (Stokes und Telford 2004; S. 137, 138), (Uhlherr et al. 2005; S. 106)

[6] englisches Originalzitat: „Yield stress is an important and much used rheological concept, but its definition is in urgent need of clarification."

dieser Arbeit im Rahmen der phänomenologischen Materialmodellierung angewendet. Der Autor dieser Arbeit erachtet das Konzept der Fließspannung zur Modellierung praktischer Anwendungen als zweckmäßig [7] und gerechtgertigt, sofern die den Identifikationsexperimenten zugrunde gelegten Restriktionen des experimentellen Fensters ebenfalls in Simulationsrechnungen berücksichtigt werden [8]. Dazu sei auf die Modellbeispiele zur Bestimmung der Gleichgewichtsrelation in Abschnitt 3.4 verwiesen, da die Existenz einer Fließspannung mit der Existenz einer Gleichgewichtshysterese verknüpft ist.

Eine zentrale Fragestellung hinsichtlich der Identifikation der Fließspannung ist die Abhängigkeit des Fließbeginns von der Fließspannung. Unter anderem wird davon ausgegangen, dass die Fließspannung den Beginn des Fließens beschreibt [9]. Dies muss jedoch nicht immer zutreffen (Kreißig 1992; S. 5). Für phänomenologische Plastizitäts- und Viskoplastizitätsmodelle definiert die Fließbedingung in Bezug auf eine Fließfunktion den Fließbeginn. Sind während einer experimentellen Messvorschrift Spannungswerte, bei denen sich der Status der Fließbedingung von „nicht erfüllt“ auf „erfüllt“ ändert, abhängig von der Lastgeschichte oder dem experimentellen Fenster [10], so müssen neben der Fließspannung weitere Größen einen Einfluss auf den Fließbeginn haben (*Folgerung 20*). Die Fließspannung definiert den Fließbeginn dann ausschließlich für den jungfräulichen Zustand des Materials. Der Einfluss der Lastgeschichte auf den Fließbeginn wird durch innere Variablen mit zugehörigen Entwicklungsgleichungen beschrieben. Dies kann beispielsweise mittels des linear kinematisch verfestigenden Teilmodells aus Abbildung 4.4(a) nachvollzogen werden, dessen Fließfunktion neben der Fließspannung auch vom Backstress und somit vom plastischen Schubverzerrungsanteil abhängt. Die zugehörige Fließfunktion ist als Teil der konstitutiven Beziehungen in Boisly et al. (2014a; Anhang B.1) aufgeführt. Weitere Beispiele sind die konstitutiven thixotropen Gleichungen von Toorman (1997; S. 57) und Moller et al. (2006; S. 281), bei denen neben der Fließspannung auch thixotrope Eigenschaften den Fließbeginn beeinflussen. Lediglich für den Sonderfall, dass die Fließfunktion eines eindimensionalen rheologischen Modells keine innere Variable beinhaltet, definiert einzig und allein die Fließspannung den Fließbeginn bei $|\tau| = \tau_y$. Ein Beispiel dafür ist weder verfestigendes noch entfestigendes plastisches Materialverhalten. Dass dies für die magnetorheologische Flüssigkeit aus Abschnitt 8 zutrifft, ist mit der Reversibilität des magnetorheologischen Effekts im Bereich „moderater“ Lastwechselzahlen zu begründen. Somit kann ausschließlich die Fließspannung mit der Stärke der mikroskopischen Struktur [11] in Verbindung gebracht werden.

Im Allgemeinen ist zuallerst davon auszugehen, dass die Bestimmung der Fließspannung in den Identifikationsprozess aller Materialparameter eingebettet ist. Die Fließspannung wird als gleichwertiger Materialparameter zu den Übrigen angesehen. Es ist nicht zwangsläufig möglich die Fließspannung als einen exklusiven Materialparameter zu betrachten, der ohne die Kenntnis der restlichen Modellparameter bestimmt werden kann. Die Komplexität des Identifikationsalgorithmus hängt dabei maßgeblich von der Komplexität des zugrunde liegenden Materialmodells ab. Je nachdem sind mehrere Iterationsschritte notwendig, um einen annähernd optimalen Parametersatz, der die Fließspannung beinhaltet, zu bestimmen. (*Folgerung 20*) Solch ein iterativer Identifikationsprozess wird in Abschnitt 8 für magnetorheologische Flüssigkeiten angewendet.

„Fließgrenzen haben in der Anwendungspraxis eine große Bedeutung, und so wurden – durchaus mit viel Kreativität – im Laufe der Zeit zur Erfassung von entsprechenden Messwerten viele mehr oder weniger sinnvolle oder brauchbare Methoden entwickelt“ schreibt Mezger (2010; S. 53). Um eine fundierte Identifikationsstrategie sicherstellen zu können, werden daher im Folgenden bereits in der Literatur angewen-

[7] (Houwink 1957; S. 14, 33), (Keentok 1982; S. 325), (Doraiswamy et al. 1991; S. 655), (Nguyen und Boger 1992; S. 62), (Steffe 1996; S. 21, 35, 36), (Barnes 1999; S. 133, 137, 147, 150, 153, 168), (Moller et al. 2006; S. 275), (Tiu et al. 2006; S. 653), (Rao 2007; S. 8), (Oswald 2009; S. 13)

[8] (Houwink 1957; S. 14, 33), (Barnes 1999; S. 134, 169)

[9] (Keentok 1982; S. 325), (Dzuy und Boger 1983; S. 321), (Barnes und Walters 1985; S. 324), (Dealy und Wissbrun 1990; S. 18), (Nguyen und Boger 1992; S. 62), (Weiss et al. 1994; S. 772), (Barnes 1999; S. 136, 144, 147, 150), (Carreau et al. 1999; S. 1304), (Betten 2001; S. 20), (Varnik et al. 2004; S. 2788), (Stokes und Telford 2004; S. 137), (Moller et al. 2006; S. 275), (Tiu et al. 2006; S. 653), (Mitsoulis 2007; S. 135), (Yang et al. 2009; S. 458), (Fall et al. 2010; S. 1), (Vicente et al. 2011; S. 3704), (Paredes et al. 2011; S. 1)

[10] (Cheng 1986; S. 543, 544), (Nguyen und Boger 1992; S. 67, 68), (Götz et al. 2002), (Uhlherr et al. 2005; S. 106), (Ewoldt 2006; S. 125), (Ewoldt et al. 2007a; S. 640)

[11] (Dzuy und Boger 1983; S. 322), (James et al. 1987; S. 437), (Coussot und Boyer 1995; S. 535), (Steffe 1996; S. 38), (Carreau et al. 1999; S. 1299), (Zhu et al. 2001; S. 1105), (Coussot et al. 2002b; S. 574, 583), (Coussot et al. 2002a; S. 1), (Stokes und Telford 2004; S. 137, 138), (Uhlherr et al. 2005; S. 101, 102), (Tiu et al. 2006; S. 653), (Maxey und Hughes 2007; S. 1), (Mahaut et al. 2008; S. 287), (Mezger 2010; S. 57), (dos Santos et al. 2011; S. 667)

dete Methoden vom theoretischen Standpunkt aus untersucht. Zur Evaluierung gebräuchlicher Identifikationsmethoden dienen dazu eindimensionale rheologische Materialgleichungen als Modellbeispiele. Für weiterführende Beiträge zur Bestimmung der Fließspannung in Abhängigkeit der Messmethode sei auf die Arbeiten von Pham et al. (2006), Pham et al. (2008; Tab. 2), Le Grand und Petekidis (2008; S. 580), Rogers et al. (2011a), Rogers et al. (2011b) und Laurati et al. (2011; III.D.3.) verwiesen.
Methoden zur Bestimmung der Fließspannung von Materialien mit fest-flüssig Übergang können grob in statische und dynamische Verfahren unterteilt werden. In Abhängigkeit von der Wahl der Identifikationsmethode wird demnach zwischen einer *statischen Fließspannung* [12] τ_{ys} und einer *dynamischen Fließspannung* [13] τ_{yd} unterschieden. Die statische Fließspannung ist diejenige Fließspannung, welche beim Übergang vom Vor- in den Nachfließbereich identifiziert wird. Somit wird für eine Flüssigkeit mit Fließspannung während eines Belastungsprozesses bis zum erstmaligen Erfüllen der Fließbedingung angenommen, dass keine mikroskopischen Prozesse stattfinden, die auf phänomenologischer Ebene als plastisches Fließen zu interpretieren sind (Steffe 1996; S. 37, 203). Dies gilt nicht für die dynamische Fließspannung, welche durch Extrapolation aus dem Nachfließbereich ermittelt wird.

7.2 Fließkurve zur Extrapolation auf die dynamische Fließspannung

Die dynamische Fließspannung [13] τ_{yd} beschreibt diejenige Spannung, welche notwendig ist, die Präsenz des Nachfließbereichs für eine weder ver- noch entfestigende Flüssigkeit mit Fließspannung aufrechtzuerhalten (Steffe 1996; S. 37, 203). Sie kann durch die Extrapolation der Fließkurve zu $\dot{\tilde{\gamma}} \to 0$ bestimmt werden [14]. Der Extrapolationsschritt wird im Folgenden durch $\mathrm{EXT}\{\ \}$ dargestellt. Es gilt

$$\tau_y \approx \tau_{yd} = \mathrm{EXT}\left\{\underline{\tau}_{\infty,\mathrm{meas}}(\underline{\dot{\tilde{\gamma}}})\right\} \ . \tag{7.1}$$

Da die Fließkurve für Festkörper entsprechend Tabelle 4.2 nicht existiert, ist auch die dynamische Fließspannung für Festkörper nicht definiert. Die dynamische Fließspannung ist somit für Materialien mit fest-flüssig Übergang relevant. Allerdings ist es nicht ausgeschlossen, dass auch für stark scherverdünnende Flüssigkeiten eine zu $\dot{\tilde{\gamma}} \to 0$ extrapolierte Größe identifiziert wird (Macosko 1994; S. 92). Da diese Größe aufgrund der Extrapolationsvorschrift lediglich mathematisch begründet ist, wird sie auch als scheinbare Fließspannung [15] bezeichnet. Daher eignet sich die dynamische Fließspannung genau dann zur Bestimmung der Fließspannung, wenn deren Existenz bereits nachgewiesen oder physikalisch motiviert ist.
In Abhängigkeit davon, bis zu welchem Grad eine Messvorrichtung die Vorgabe $\dot{\tilde{\gamma}} = 0$ umsetzen kann, sind die Messergebnisse zu bewerten. Die Auflösung des Messsystems beeinflusst somit maßgeblich die dynamische Fließspannung [16]. Außerdem hängt die Güte der Modellvorhersage auch von dem zur Modellierung der Fließkurve unterstellten Materialmodell ab [17]. Deshalb wird die dynamische Fließspannung zur Modellierung des Materialverhaltens magnetorheologischer Fluide in Abschnitt 8 lediglich als erste Näherung zur Abschätzung der Fließspannung genutzt.

[12] (Cheng 1986; S. 549), (James et al. 1987), (Nguyen und Boger 1992; S. 63), (Husband et al. 1993; S. 216), (Weiss et al. 1994; S. 772, 774), (Steffe 1996; S. 37, 206, 207), (Parthasarathy und Klingenberg 1996; S. 85), (Zhu et al. 2001), (Kordonski et al. 2001; S. 1078, 1080), (Coussot et al. 2002b; S. 574), (Varnik et al. 2004; S. 2788, 2798), (Zhu et al. 2005; S. 180), (Uhlherr et al. 2005; S. 293), (Tiu et al. 2006; S. 654), (Fall et al. 2010; S. 1), (Rich et al. 2011; S. 9935), (Rogers et al. 2011b; S. 445), (Rich et al. 2012; S. 580, 583)

[13] (Cheng 1986; S. 549), (Nguyen und Boger 1992; S. 63), (Husband et al. 1993; S. 216), (Weiss et al. 1994; S. 772), (Steffe 1996; S. 37, 207), (Parthasarathy und Klingenberg 1996; S. 82), (Felt et al. 1996; S. 590), (Rankin et al. 1999; S. 473), (Kordonski et al. 2001; S. 1078, 1080), (Kordonski et al. 2001; S. 1080), (Coussot et al. 2002b; S. 574), (Varnik et al. 2004; S. 2798), (Zhu et al. 2005; S. 180), (Uhlherr et al. 2005; S. 293), (Höhler und Cohen-Addad 2005; S. 1057), (Maxey et al. 2008; S. 2 @ flow curve analysis), (Lopez-Lopez et al. 2009; S. 120), (Fall et al. 2010; S. 1), (Tadros 2010; S. 42), (Rich et al. 2011; S. 9935), (Rogers et al. 2011b; S. 445), (Rich et al. 2012; S. 580, 583), (DIN–Taschenbuch 398 2012; S. 439)

[14] (Tadros 2010; S. 42), (Keentok 1982; S. 326), (Barnes und Walters 1985; Abb. 1), (Cheng 1986; Abb. 5), (Nguyen und Boger 1992; Abb. 1, S. 62 f.), (Macosko 1994; Abb. 2.5.2, 2.5.4), (Steffe 1996; S. 36, 38), (Barnes 1999; S. 143), (Tanner 2002; S. 146, Abb. 4.2(a-c)), (Oswald 2009; S. 13), (Mezger 2010; S. 53), (Tikmani et al. 2013; S. 5)

[15] (Nguyen und Boger 1992; S. 63), (Pahl et al. 1995; S. 387), (Barnes 1999), (Niedzwiedz et al. 2010; S. 1108), (Willenbacher und Georgieva 2013; S. 8), (Martinie et al. 2013; S. 627)

[16] (Nguyen und Boger 1992; S. 63), (Zhu et al. 2001; S. 1105), (Oswald 2009; S. 13), (Mezger 2010; S. 54), (DIN–Taschenbuch 398 2012; S. 439)

[17] (Nguyen und Boger 1992; S. 65), (Steffe 1996; S. 81), (Carreau et al. 1999; S. 1304), (Stokes und Telford 2004; S. 138)

7.3 Verzerrungsrampe zur Identifizierung der statischen Fließspannung

Zur Bestimmung der statischen Fließspannung wird in der Literatur eine rampenförmig aufgebrachte Verzerrung vorgeschlagen [18]. Die Schubverzerrung

$$\gamma = \dot{\tilde{\gamma}} t \qquad \{\dot{\gamma} = \text{konst}\} =: \dot{\tilde{\gamma}} \tag{7.2}$$

besitzt demnach eine konstante Rate $\dot{\tilde{\gamma}}$. Die Spannungsantwort in Abhängigkeit der Zeit $\tau(t)$ beziehungsweise die Spannungs-Schubverzerrungs Antwort, $\tau(\gamma)$, wird gemessen (Nguyen und Boger 1992; S. 68). Auf Grundlage der gemessenen Spannungsantwort existieren einige Vorschläge, eine statische Fließspannung zu bestimmen: Die statische Fließspannung ist

1. diejenige Spannung, ab der die Spannungsantwort nicht mehr einer linearen Funktion folgt [19],
2. das Maximum [20] von $\tau(t)$ bzw. $\tau(\gamma)$,
3. die Plateauspannung [21], falls die Spannungsantwort anstelle eines Maximums ein Plateau besitzt.

Weil die Spannungsantwort im Vorfließbereich viskoplastischer Materialien aufgrund viskoelastischer Eigenschaften maßgeblich mit der Schubverzerrungsrate variieren kann (Zhu et al. 2001; S. 1119), hängt bei dieser Methode folgerichtig auch der Wert, welcher der statischen Fließspannung zugeordnet wird, von der Verzerrungsrate ab. Daher eignet sich diese Methode im besten Fall nur bei ausreichend kleiner Verzerrungsrate [22] zur Bestimmung der statischen Fließspannung. Da jedoch Ratenabhängigkeit selbst bei der messtechnisch kleinst möglich realisierbaren Verzerrungsrate nicht ausgeschlossen werden kann [23], ist die Zulässigkeit dieser Methode für jedes Zusammenspiel zwischen Materialprobe und Messeinrichtung zu überprüfen.

Hinsichtlich des ersten Definitionsvorschlags ist zu berücksichtigen, dass die Fließspannung nur genau dann der Spannung beim Abweichen von linearem Verhalten entspricht, wenn der Vorfließbereich entweder

- linear elastisch ist oder (S9)
- viskoelastische Eigenschaften mit linear elastischer Gleichgewichtsrelation derart besitzt, dass ratenabhängige Effekte beim Aufbringen der messtechnisch geringst möglichen Verzerrungsrate vernächlässigbar sind. (S10)

Selbst wenn Bedingung (S10) erfüllt sein sollte, ist die Definitionsvorschrift zur Bestimmung der Fließspannung nicht allgemeingültig, da sie für nichtlinear elastische Eigenschaften versagt (*Folgerung 21*).

Bezüglich des zweiten Definitionsvorschlags ist zu beachten, dass ein Spannungsmaximum einer $\tau(t)$ oder $\tau(\gamma)$ Kurve auch aufgrund thixotroper Eigenschaften [24] hervorgerufen werden kann, ohne dass das Material eine Fließspannung besitzt. Die Gültigkeit dieses Kriteriums ist daher für eine Materialprobe

[18] (Dzuy und Boger 1983; S. 324), (James et al. 1987; S. 443), (Nguyen und Boger 1992; S. 68), (Zhu et al. 2001; S. 1107), (Stokes und Telford 2004; S. 141), (Baker et al. 2006), (Yang et al. 2009; S. 458)

[19] (James et al. 1987; S. 444), (Nguyen und Boger 1992; S. 68), (Zhu et al. 2005; S. 180), (Moller et al. 2006; S. 276), (Vicente et al. 2011; S. 3705)

[20] (Denny und Gosline 1980; S. 386, Abb. 9), (James et al. 1987; S. 444), (Nguyen und Boger 1992; S. 68), (Weiss et al. 1994; Abb. 4), (Steffe 1996; S. 203), (Larson 1999; S. 36), (Stokes und Telford 2004; S. 141), (Uhlherr et al. 2005; S. 293), (Höhler und Cohen-Addad 2005; S. 1056), (Moller et al. 2006; S. 276), (Ewoldt 2006; S. 25), (Ewoldt et al. 2007a; S. 641), (Rao 2007; S. 77), (Chhabra und Richardson 2008; S. 93), (Stokes und Frith 2008; S. 1135), (Yang et al. 2009; S. 458), (Laurati et al. 2011; S. 689 ff.), (Vicente et al. 2011; S. 3705), (Koumakis et al. 2012; S. 1, 3), (DIN–Taschenbuch 398 2012; S. 443), (Bhavsar et al. 2013; S. 854)

[21] (Ashour et al. 1996; S. 126), (Uhlherr et al. 2005; S. 293), (Baker et al. 2006)

[22] (James et al. 1987; S. 443), (Nguyen und Boger 1992; S. 69), (Steffe 1996; S. 203), (Stokes und Telford 2004; S. 141, 142), (Ewoldt 2006; S. 27)

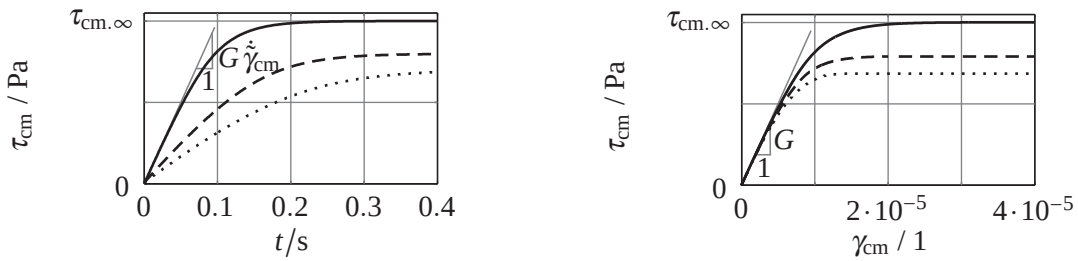
[23] (Lion 1994; S. 16), (Haupt und Lion 1995; S. 75), (Haupt 2002; S. 255, 257), (Kästner et al. 2012; S. 44)

[24] (Zhu et al. 2001; S. 1107), (Stokes und Telford 2004; S. 142), (Uhlherr et al. 2005; S. 293)

stets nachzuweisen. In Nguyen und Boger (1992; S. 68) wird das Maximum Kriterium generell infrage gestellt.

Die Handhabung einer Verzerrungsrampe zur Identifizierung der Fließspannung wird nun für das rCROSS-BINGHAM-HOOKE Element, dessen Spannungsantwort in Abbildung 5.3(a) dargestellt ist, bewertet. Das rCROSS-BINGHAM-HOOKE Element besitzt einen linear elastischen Vorfließbereich und erfüllt somit Bedingung (S9). Das Abweichen von linearem Verhalten kann somit aus theoretischer Sicht als Kriterium zur Fließspannungsbestimmung genutzt werden. In Abbildung 5.3(a) ist jedoch zu erkennen, dass das Abweichen vom linearen Verlauf generell schwer festgestellt werden kann und subjektiven Empfindungen unterliegt. Je nachdem wie sich das Zusammenspiel zwischen der messtechnisch kleinst möglichen Verzerrungsrate und den ratenabhängigen Effekten des Nachfließbereichs auswirkt, wird die Fließspannung mehr oder weniger überschätzt. Es ist weiterhin ersichtlich, dass das Spannungsplateau in keinster Weise ausschließlich mit der Fleißspannung korreliert, sondern ebenfalls von den ratenabhängigen Eigenschaften abhängt.

Am Beispiel des rCROSS-MAXWELL Elements (Boisly et al. 2015) kann nachvollzogen werden, dass das Abweichen der Spannungsantwort von einer linearen Funktion nicht in jedem Fall mit der Existenz einer Fließspannung in Verbindung gebracht werden kann. Die Spannungsantwort des rCROSS-MAXWELL Elements, $\tau_{\mathrm{cm}}(t)$ und $\tau_{\mathrm{cm}}(\gamma_{\mathrm{cm}})$, ist in Abbildung 7.1 dargestellt. Dazu sind zunächst die



(a) Spannungsantwort als Funktion der Zeit (b) Spannung als Funktion der Schubverzerrung

Abbildung 7.1: Spannungsantworten eines scherverdünnenden rCROSS-MAXWELL Elements (Boisly et al. 2015) für konstante Schubverzerrungsraten $\dot{\gamma}_{\mathrm{cm}} = \dot{\tilde{\gamma}}_{\mathrm{cm}}$: ——, $\dot{\gamma}_{\mathrm{cm}} = \frac{\dot{\tilde{\gamma}}_{\mathrm{cm}}}{2}$: − − − und $\dot{\gamma}_{\mathrm{cm}} = \frac{\dot{\tilde{\gamma}}_{\mathrm{cm}}}{3}$: ····· für G = 10Pa, η_0 = 8Pas, η_∞ = 0.3Pas, $K_1 = 10^5$s und $\dot{\tilde{\gamma}}_{\mathrm{cm}} = 10^{-4}\frac{1}{\mathrm{s}}$

konstitutiven Beziehungen aus Boisly et al. (2015; Gl. (62)) beziehungsweise Gleichungen (8.1a) bis (8.1c) unter Verwendung des EULER-Rückwärts Verfahrens [25] diskretisiert und anschließend für die Anfangsbedinung $\tau_{\mathrm{cm}}(t=0) = 0$ mit dem NEWTON-Verfahren [26] numerisch gelöst. Wie in Abbildung 7.1 zu erkennen ist, weicht die Spannungsantwort nach einer bestimmten Belastungsdauer von einer linearen Funktion ab, obwohl das rCROSS-MAXWELL Element keine Fließspannung als Modellparameter besitzt. Grund dafür ist, dass sich der elastische Schubverzerrungsanteil nach der bestimmten Belastungsdauer nicht mehr entwickelt, sondern konstant bleibt. Somit besitzt die Spannungsantwort im stationären Zustand einen Plateauwert

$$\tau_{\mathrm{cm.}\infty} = \tau_{\mathrm{c}}(\dot{\tilde{\gamma}}_{\mathrm{cm}}) = \left(\eta_\infty + \frac{\eta_0 - \eta_\infty}{1 + K_1 \cdot |\dot{\tilde{\gamma}}_{\mathrm{cm}}|}\right)\dot{\tilde{\gamma}}_{\mathrm{cm}}\ , \tag{7.3}$$

welcher identisch der Spannung des rCROSS Dämpfers nach Boisly et al. (2015; Gl. (24)) ist. Im Zuge des zweiten Vorschlags würde aufgrund des existierenden Plateauwertes fälschlicherweise eine Fließspannung interpretiert werden, obwohl dem Material beziehungsweise Modell keine Fließspannung zugrunde liegt.

Letztlich kann festgehalten werden, dass sich die Verzerrungsrampe ohne weitergehende Untersuchungen nicht zur Bestimmung der Fließspannung eignet. Die Existenz einer Fließspannung sollte vor dem Anwenden dieser Methode bereits bewiesen, mindestens jedoch physikalisch motiviert sein.

[25] (Zienkiewicz 1984; S. 518), (Oelschlägel und Matthäus 1988; S. 55 ff.), (Oertel Jr. und Laurien 1995; S. 102), (Schwetlick und Roos 1999; S. 150), (Schäfer 1999; S. 139), (Schanz 2000; S. 61), (Simo und Hughes 2000; S. 33), (Betten 2004; S. 274), (Ostermann 2005; S. 3.10), (Dahmen und Reusken 2008; S. 439, 445)

[26] (Plato 2006; S. 99), (Dahmen und Reusken 2008; S. 181)

7.4 Spannungsrampe zur Bestimmung der statischen Fließspannung

Analog zur Verzerrungsrampe wird in der Literatur auch die Verwendung einer Spannungsrampe [27]

$$\tau = \dot{\tilde{\tau}} t \qquad \{\dot{\tau} = \text{konst}\} =: \dot{\tilde{\tau}} \tag{7.4}$$

zur Identifizierung der stischen Fließspannung in Betracht gezogen. Dabei wird eine konstante Spannungsrate vorgegeben und die Schubverzerrung γ sowie die Schubverzerrungsrate $\dot{\gamma}$ werden ermittelt. Hierfür existieren mehrere Vorschläge, die statische Fließspannung zu definieren: Die statische Fließspannung ist

1. diejenige Spannung, bei der die linear skalierte $\gamma(\tau)$ Kurve von der Gestalt einer linearen Funktion abweicht [28],
2. entsprechend der *Tangentenmethode* der Schnittpunkt zwischen der Tangente im Unendlichen und der Tangente im Koordinatenursprung der doppelt logarithmisch skalierten $\gamma(\tau)$ Kurve [29],
3. die Stelle des abrupten Anstiegs der doppelt logartihmisch aufgetragenen $\dot{\gamma}(\tau)$ Kurve [30].

Weil die Verzerrungsantworten viskoplastischer Materialien mit viskoelastischem Vorfließbereich von der aufgebrachten Spannungsrate abhängen, variieren auch diejenigen Spannungswerte, welche der statischen Fließspannung zugeordnet werden. Berücksichtigt man die Aufteilung der Gesamtspannung nach Gleichung (3.43) in eine Gleichgewichts- und Überspannung, wobei lediglich die Gleichgewichtsspannung mit der Fließspannung verknüpft ist, so resultiert analog zu Abschnitt 7.3 die Forderung einer Versuchsführung mit verschwindend geringer Spannungsrate (Rich et al. 2012; S. 583). Somit wird deutlich, dass die Bestimmung der Fließspannung in einem Rotationsrheometer mittels Spannungsrampe von dem messtechnisch kleinst möglich realisierbaren Drehmoment abhängt. Da lediglich der Grenzfall $\frac{\tau^{\text{ov}}}{\tau} = 0$ mit $\tau_\text{y} = \tau_\text{ys}$ einhergeht, gilt in guter Näherung $\tau_\text{y} \approx \tau_\text{ys}$ wenn $|\dot{\tilde{\tau}}| \gtrsim 0$.
Ebenfalls ist zu erwähnen, dass die Bedingungen (S9) und (S10) gleichermaßen gelten. Wenn das elastische Vorfließverhalten eines plastischen Materials nichtlinear ist, kann die statische Fließspannung weder mit der Tangentenmethode noch mit dem Kriterium des Abweichens von der Geradlinigkeit zuverlässig bestimmt werden. Gleiches gilt für den Fall, dass der Vorfließbereich eines viskoplastischen Materials viskoelastisch ist und ratenabhängige Effekte bei gegebener Versuchsführung nicht vernächlässigbar sind.
Wenn die oben genannten Bedingungen erfüllt sind, liefert die Methode der Spannungsrampe gute Ergebnisse. Um dies zu zeigen, werden zunächst das PRANDTL Element und das BINGHAM Element untersucht. Die Schubverzerrung des PRANDTL Elements (Boisly et al. 2014b; Abschn. 3.1) ergibt sich zu

$$\gamma_\text{p}\left(\tau_\text{p}, t\right) = \begin{cases} \dfrac{\tau_\text{p}}{G} & : F < 0\,,\ \tau_\text{p} = \dot{\tilde{\tau}}_\text{p} t \qquad (7.5a) \\ \dfrac{\tau_\text{y}}{G} + \dot{\tilde{\gamma}}_\text{p}\left(t - \dfrac{\tau_\text{y}}{\dot{\tilde{\tau}}_\text{p}}\right) & : F = 0\,,\ \dot{\gamma}_\text{p} = \dot{\tilde{\gamma}}_\text{p} = \text{konst.} \qquad (7.5b) \end{cases}$$

Um das Verhalten des PRANDTL Elements im Nachfließbereich beschreiben zu können, ist es erfordlich die Schubverzerrungsrate zu kennen mit der $\tau_\text{p} = \tau_\text{y}$ aufgebracht wird. Hierfür ist der Einfachheit wegen eine Versuchsführung mit konstanter Schubverzerrungsrate $\dot{\gamma}_\text{p} = \dot{\tilde{\gamma}}_\text{p} = \text{konst}$ unterstellt. Die Schubverzerrungsantwort des BINGHAM Elements [31] beträgt

$$\gamma_\text{b}\left(\tau_\text{b}\right)\big|_{\tau_\text{b} = \dot{\tilde{\tau}}_\text{b} t} = \begin{cases} 0 & : F \le 0 \qquad (7.6a) \\ \dfrac{1}{2\eta\,\dot{\tilde{\tau}}_\text{b}}\left[\tau_\text{b} - \tau_\text{y}\,\text{sign}\left(\dot{\tilde{\tau}}_\text{b}\right)\right]^2 & : F > 0\,. \qquad (7.6b) \end{cases}$$

Die Kurvenverläufe sind in den Abbildungen 7.2 und 7.3 dargestellt. Wie zu erkennen ist, liefern sowohl die Tangentenmethode als auch das Kriterium des Abweichens vom linearen Verhalten gute Ergebnisse.

[27] (Steffe 1996; S. 205), (Zhu et al. 2001; S. 1113), (Zhu et al. 2005; S. 180), (Baker et al. 2006), (Maxey et al. 2008; S. 2), (Yang et al. 2009; S. 458), (Mezger 2010; S. 53, Abb. 3.2), (Koos und Willenbacher 2011; Supporting Online Material S. 6), (Lexis und Willenbacher 2014; Abb. 1), (Xu et al. 2017; Abb. 1)

[28] (Li et al. 1999; S. 464), (Zhu et al. 2001; S. 1113)

[29] (Rao 2007; S. 78), (Yang et al. 2009; S. 458), (Mezger 2010; S. 55, Abb. 3.23, 3.24), (DIN–Taschenbuch 398 2012; S. 441), (Lexis und Willenbacher 2013; S. 3), (Brummer 2013; S. 60), (Lexis und Willenbacher 2014; S. 180, Abb. 1)

[30] (Houwink 1957; S. 10, 34), (Brummer 2006; S. 66), (Rich et al. 2012; S. 583, 584), (DIN–Taschenbuch 398 2012; S. 443)

[31] (Giesekus 1994; S. 213), (Boisly et al. 2014a; Gl. (14))

Im Folgenden wird analog zu Abschnitt 7.3 überprüft, ob die Kriterien hinreichend für die Existenz einer Fließspannung sind, oder ob die Spannungsrampe ebenfalls fälschliche Ergebnisse liefern kann. Dazu

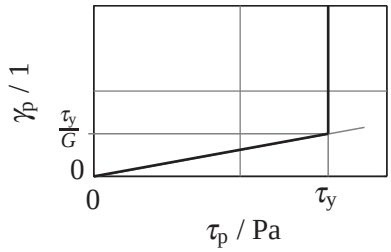


Abbildung 7.2: Schubverzerrung des PRANDTL Elements für eine Spannungsrampe

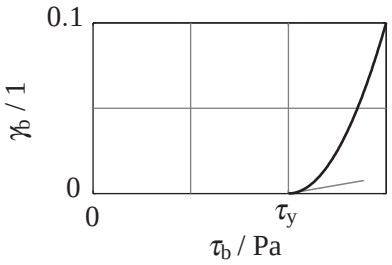
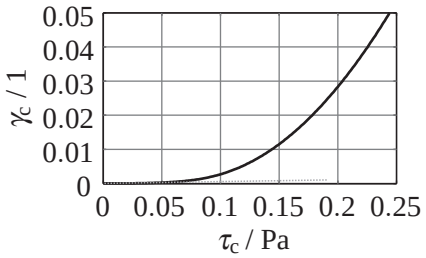


Abbildung 7.3: Schubverzerrung des BINGHAM Elements für eine Spannungsrampe mit $\dot{\tilde{\tau}}_{bh} = 1\frac{Pa}{s}$, $\eta = 5Pas$ und $\tau_y = 2Pa$

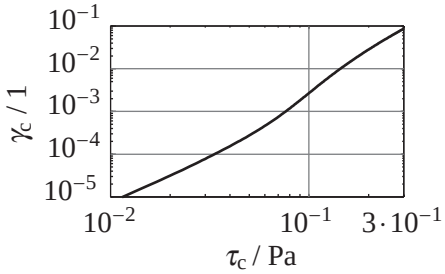
werden die Schubverzerrungsantworten des rCROSS Dämpfers und des rCROSS-MAXWELL Elements für verschiedene Parametersätze untersucht. Da beide Materialmodelle keine Fließspannung besitzen, ist zu zeigen, dass die Methode der Spannungsrampe ebenfalls keine Fließspannung identifiziert. Die konstitutiven Beziehungen des rCROSS Dämpfers können Boisly et al. (2015; Gl. (23)) und Gleichung (7.3) entnommen werden. Die Materialbeziehungen des rCROSS-MAXWELL Elements sind in Boisly et al. (2015; Gl. (62)) beziehungsweise Gleichung (8.1) hinterlegt. Aufgrund der nichtlinearen Eigenschaften konnten sie vom Autor dieser Arbeit nicht analytisch gelöst werden. Daher erfolgt die Berechnung der Schubverzerrung numerisch. Für den rCROSS Dämpfer werden $\left(\tau_c^i, \dot{\gamma}_c^i\right)$ zu den Zeitschritten t^i für vorgegebene Spannungswerte mittels dem NEWTON Verfahren [32] ermittelt. Daraus wird γ_c^{i+1} unter Berücksichtigung des *Rückwärtsdifferenzenquotienten* [33]

$$\dot{\gamma}_c^{i+1} = \frac{\gamma_c^{i+1} - \gamma_c^i}{\Delta t} \qquad i \in \mathbb{N}^+ \tag{7.7}$$

bestimmt. Das Ergebnis für den ersten Parametersatz ist in Abbildung 7.4 sowohl in linearer als auch dop-



(a) Lineare Skalierung

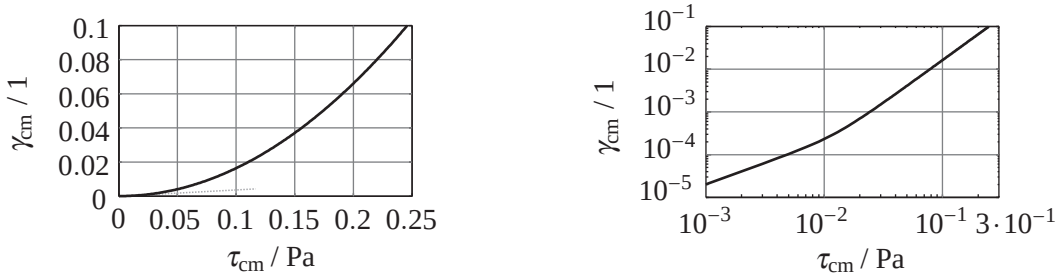


(b) Doppelt logarithmische Skalierung

Abbildung 7.4: Schubverzerrung des rCROSS Dämpfers für eine Spannungsrampe mit $\dot{\tilde{\tau}}_c = 1\frac{Pa}{s}$, $\eta_0 = 8Pas$, $\eta_\infty = 0.3Pas$ und $K_1 = 100s$

pelt logarithmischer Skalierung dargestellt. Die Schubverzerrung des rCROSS-MAXWELL Elements setzt sich nach Boisly et al. (2015; Gl. (62c)) aus zwei Anteilen zusammen, der soeben berechneten Schubverzerrung des rCROSS Dämpfers und dem Anteil der HOOKEschen Feder. Die Schubverzerrungsantwort ist in Abbildung 7.5 für den ersten Parametersatz sowohl in linearer als auch doppelt logarithmischer Skalierung aufgetragen. Entsprechend dem Kriterium vom Abweichen von einer linearen Funktion, ist es für die linear skalierten Graphen aus Abbildungen 7.4 und 7.5 denkbar, fälschlicherweise eine Fließspannung zu identifizieren. Wertet man hingegen die doppelt logarithmische Darstellung mit der Tangenentenmethode aus, so würde man davon absehen. Es sind allerdings auch Parametersätze denkbar, bei denen selbst die Tangentenmethode der doppelt logarithmischen Darstellung versagt und eine Fließspannung identifiziert, obwohl keine vorhanden ist. Dies trifft für stark scherverdünnendes Verhalten zu, wie es in den

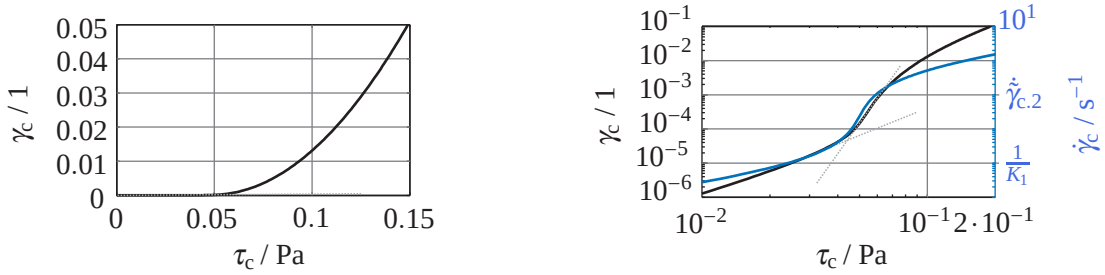
[32] (Schäfer 1999; S. 165), (Plato 2006; S. 99), (Freund und Hoppe 2007; S. 292, 335), (Dahmen und Reusken 2008; S. 181)
[33] (Schäfer 1999; S. 139), (Plato 2006; S. 229), (Dahmen und Reusken 2008; S. 445)



(a) Lineare Skalierung (b) Doppelt logarithmische Skalierung

Abbildung 7.5: Schubverzerrung des rCROSS-MAXWELL Elements für eine Spannungsrampe mit $\dot{\tilde{\tau}}_{cm} = 1\frac{Pa}{s}$, $G = 50Pa$, $\eta_0 = 8Pas$, $\eta_\infty = 0.3Pas$ und $K_1 = 1000s$

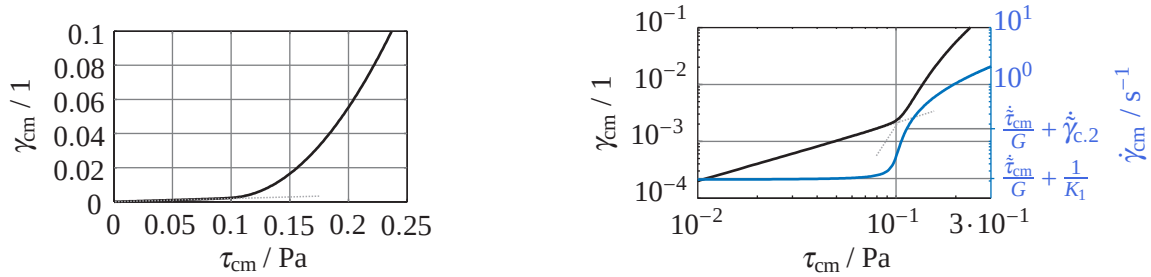
Abbildungen 7.6 und 7.7 gezeigt ist. Je größer das Verhältnis $\frac{\eta_0}{\eta_\infty}$, desto größer ist auch die Tendenz, dass die Tangentenmethode für eine doppelt logarithmisch aufgetragene Schubverzerrungsantwort fälschlicherweise eine Fließspannung identifiziert. Gleiches gilt für die Auswertung der doppelt logarithmisch



(a) Lineare Skalierung (b) Doppelt logarithmische Skalierung

Abbildung 7.6: Schubverzerrung des rCROSS Dämpfers für eine Spannungsrampe mit $\dot{\tilde{\tau}}_c = 1\frac{Pa}{s}$, $\eta_0 = 50Pas$, $\eta_\infty = 0.1Pas$, $K_1 = 1000s$ und $\kappa_2 = 0.05$

aufgetragenen Antwort der Schubverzerrungsrate. Nach Willenbacher und Georgieva (2013; S. 8) ist dieser Sachverhalt so zu interpretieren, dass es sich vielmehr um eine scheinbare Fließspannung handelt, die auf einen starken Viskositätsabfall innerhalb eines kleinen Spannungsbereiches zurückzuführen ist [34]. (*Folgerung 21*) Diese sogenannte *scheinbare* Fließspannung steht jedoch in keinem Zusammenhang mit der in



(a) Lineare Skalierung (b) Doppelt logarithmische Skalierung

Abbildung 7.7: Schubverzerrung des rCROSS-MAXWELL Elements für eine Spannungsrampe mit $\dot{\tilde{\tau}}_{cm} = 1\frac{Pa}{s}$, $G = 50Pa$, $\eta_0 = 100Pas$, $\eta_\infty = 0.1Pas$, $K_1 = 1000s$ und $\kappa_2 = 0.05$

dieser Arbeit als Materialparameter des Reibelements eingeführten Fließspannung (*Folgerung 20*). Es ist also zu konstatieren, dass eine Spannungsrampe ohne weitere Prüfung nicht hinreichend zur Bestimmung der statischen Fließspannung ist.

[34] englisches Originalzitat: „Soft matter, such as, for example, dispersions or emulsions, does not exhibit a yield stress in this strict sense. Instead, these materials often show a drastic change of viscosity by orders of magnitude within a narrow shear stress range and this is usually termed an apparent yield stress (Figure 1.2a,b).“ (Willenbacher und Georgieva 2013; S. 8)

7.5 Amplitudensweep zur Identifizierung der statischen Fließspannung

Neben den monotonen Versuchsführungen kann ebenfalls eine sinusförmige Versuchsführung zur Bestimmung der statischen Fließspannung genutzt werden. In der Literatur wird die auf diesem Weg ermittelte Fließspannung daher auch als *oszillatorische Fließspannung* [35] bezeichnet. Dazu wird ein Amplitudensweep [36] aufgebracht, bei der die Kreisfrequenz ω konstant gehalten wird. Die Amplituden $\hat{x}_i$ der Steuergröße $x_i = \hat{x}_i \sin(\omega t)$ werden aufsteigend für $i = 1 \ldots n$ Werte variiert. Im Falle dessen, dass die Steuergröße die Schubverzerrung ist, $\hat{x} = \hat{\gamma}$, und nichtlineares Materialverhalten vorliegt, handelt es sich um einen LAOStrain Amplitudensweep. Als Ergebnis erhält man $i = 1 \ldots n$ Messpunkte für Speicher- G_i' und Verlustmodul G_i'' in Abhängigkeit der Schubverzerrungsamplitude $\hat{\gamma}_i$. Ist die Steuergröße die Spannung, $\hat{x} = \hat{\tau}$, liegt ein LAOStress Amplitudensweep vor. Mittels FOURIER Transformation der Verzerrungsantwort erhält man dynamische Nachgiebigkeiten als Funktion der Spannungsamplituden $\hat{\tau}_i$ (Ewoldt 2013; S. 183). Nach Auffassung von Rouyer et al. (2005; S. 113) gibt es kein eindeutiges Kriterium, nach dem die statische Fließspannung mittels oszillatorischer Versuchsführung bestimmt werden kann [37]. Stattdessen existieren zahlreiche Vorschläge:

1. Nach einem Vorschlag von Rouyer et al. (2005; S. 113) können die Fließspannung τ_y und die Fließverzerrung γ_y mittels des Speichermoduls empirisch definiert werden. Die Fließspannung ergibt sich aus dem Schnittpunkt der Anfangs- und Endtangenten an den von der Spannungsamplitude abhängigen Speichermodul [38].

2. Analog dazu wird vorgeschlagen, die Fließverzerrung [39] aus dem Schnittpunkt der Anfangs- und Endtangenten des von der Schubverzerrungsamplitude abhängigen Speichermoduls zu bestimmen.

3. Nach einem anderen Vorschlag ergibt sich die Fließspannung als Schnittpunkt der von der Spannungsamplitude abhängigen Speicher- und Verlustmoduli [38, 40].

4. In analoger Weise wird die Fließverzerrung auch aus dem Schnittpunkt bestimmt, der sich für Speicher- und Verlustmoduls als Funktion der Schubverzerrungsamplitude ergibt [41].

5. Auch wird die Schubverzerrung am Maximum des Verlustmoduls als Fließverzerrung definiert [42].

6. Entsprechend dem DIN–Taschenbuch 398 (2012; S. 445) ist die Fließspannung diejenige Spannung, ab welcher die von der Spannungsamplitude abhängigen Speicher- und Verlusmoduli [38] nicht länger amplitudenunabhängig sind.

7. Saint-Jalmes und Durian (1999; S. 1411, S. 1415 ff.), Christopoulou et al. (2009; S. 5057 ff.), Koumakis und Petekidis (2011; S. 2459 ff.) und Laurati et al. (2011; Abb. 6) tragen zunächst die für LAOStrain gemessenen Maximalspannungen doppelt logarithmisch über der Schubverzerrungsamplitude auf. Der Schnittpunkt der Anfangs- und Endtangente definiert den Fließpunkt [43] (γ_y, τ_y).

[35] (Li et al. 1999; S. 465), (Höhler und Cohen-Addad 2005; S. 1057), (Rouyer et al. 2005; S. 111), (Rogers et al. 2011a; S. 747)

[36] (Pahl et al. 1995; S. 144), (Li et al. 2003; S. 282), (Celli et al. 2007; S. 1583), (Mezger 2010; S. 149), (DIN 51810-2;S. 8)

[37] englisches Originalzitat: „There is no unique and rigorously motivated criterion allowing a yield stress to be determined from oscillatory data." (Rouyer et al. 2005; S. 113)

[38] Die zugrunde gelegte Berechnungsvorschrift des Speicher- beziehungsweise Verlustmoduls bei spannungsgeregelter Versuchsführung konnte der Autor dieser Arbeit nicht im Detail entnehmen.

[39] (Yoshimura und Prud'homme 1987), (Weiss et al. 1994; S. 773), (Yziquel et al. 1999b), (Larson 1999; S. 36), (Saint-Jalmes und Durian 1999; S. 1411, 1415), (Saint-Jalmes und Durian 1999; S. 1412), (Rouyer et al. 2005; S. 111), (Höhler und Cohen-Addad 2005; S. 1056), (Le Grand und Petekidis 2008; S. 582), (Renou et al. 2010; S. 1227), (Rogers et al. 2011b; S. 443), (Koumakis und Petekidis 2011), (Laurati et al. 2011; S. 684), (Lim und Ahn 2013; S. 648)

[40] (Celli et al. 2007; S. 1583 ff.), (Pham et al. 2008; Tab. 2), (Mezger 2010; S. 155), (Koumakis und Petekidis 2011; S. 2462), (DIN 51810-2;S. 8, 9), (Segovia-Gutierrez et al. 2012; S. 1430, 1440), (DIN–Taschenbuch 398 2012; S. 259, 445), (Martinie et al. 2013; S. 632), (Lexis und Willenbacher 2013; S. 4)

[41] (Pham et al. 2006; S. 627), (Pham et al. 2008; S. 659, Tab. 2), (Le Grand und Petekidis 2008; S. 583, 585), (Carrier und Petekidis 2009; S. 255), (Renou et al. 2010; S. 1227), (Koumakis und Petekidis 2011; S. 2459, 2461), (Laurati et al. 2011; S. 682), (Lim und Ahn 2013; S. 648), (Koos et al. 2014; S. 951)

[42] (Pham et al. 2006; S. 627), (Helgeson et al. 2007; S. 305), (Le Grand und Petekidis 2008; S. 583), (Christopoulou et al. 2009; S. 5057 ff.), (Renou et al. 2010; S. 1227)

[43] (Weiss et al. 1994; S. 774), Saint-Jalmes und Durian (1999; S. 1416), (Pham et al. 2008; S. 659, Tab. 2), (Christopoulou et al. 2009; S. 5058), (Koumakis und Petekidis 2011; S. 2462), (Laurati et al. 2011; S. 684)

Die folgenden Untersuchungen zielen darauf ab, festzustellen, welche der oben vorgestellten Methoden zur Bestimmung der statischen Fließspannung geeignet sind. Um die Überlegungen nachvollziehen zu können, sei zunächst auf die verzerrungsgesteuerten Amplitudensweeps des PRANDTL Elements aus (Boisly et al. 2014b), des rCROSS-MAXWELL Elements aus Boisly et al. (2015) und des BINGHAM-HOOKE Elements aus Boisly et al. (2017) verwiesen. Zusätzlich dazu können die Ergebnisse des in dieser Arbeit analysierten rCROSS-BINGHAM-HOOKE Elements (Abbildungen 5.12(a) bis 5.16(a)) und des endochronen MAXWELL Elements (Abbildung 6.12) verwendet werden. Daran ist zu erkennen, dass ein ausgeprägtes Maximum des Verlustmoduls entsprechend des Typ III Verhaltens von Hyun et al. (2002; Abb. 7b, 8c, 9c) keinesfalls hinreichend aber dennoch notwendig für die Existenz einer Fließspannung ist (*Folgerung 15*). Dass ein Maximum des Verlustmoduls notwendig für die Existenz einer Fließspannung ist, liegt daran, dass die Verlustmoduli aller Flüssigkeiten mit Fließspannung ein Maximum besitzen. Es ist jedoch ein Trugschluss anzunehmen, dass ein Maximum des Verlustmoduls hinreichend für die Existenz einer Fließspannung ist. Beispielsweise kann ein Maximum im amplitudenabhängigen Verlustmodul auch für das scherverdünnende viskoelastische Verhalten des rCROSS-MAXWELL Elements (Boisly et al. 2015) oder thixotrope Viskoelastizität [44] festgestellt werden (*Folgerung 15*). Ein Amplitudensweep kann zur Bestimmung der Fließspannung ohne zusätzliche Informationen keine verbindliche Aussagen liefern. Die Existenz einer Fließspannung sollte vor dem Anwenden dieser Methode bereits bewiesen, mindestens jedoch motiviert sein.

Ebenso besitzt der Schnittpunkt zwischen den von der Verzerrungsamplitude abhängigen Speicher- und Verlustmoduli keinen Bezug zur Existenz einer Fließspannung. Diese Feststellungen decken sich in analoger Weise mit den Erkenntnissen von Winter und Mours (1997; S. 220), welche die oben genannten Ansätze im Zusammenhang mit Polymeren nahe dem fest-flüssig Übergang kommentieren und als „weit hergeholt“ bezeichnen [45]. Die Aussagen von Winter und Mours (1997; S. 220) sind ebenso für die Bestimmung der Fließspannung gültig, da der fest-flüssig Übergang für Flüssigkeiten mit Fließspannung genau beim Erfüllen der Fließbedingung (Fließbeginn) einsetzt.

Infolge eines phänomenologischen fest-flüssig Übergangs steigt der Verlustmodul abrupt an und der Speichermodul beginnt abzufallen. Die bei der Erfüllung der Fließbedingung auftretende Schubverzerrung wird im Folgenden als Fließverzerrung γ_y bezeichnet. Sie ist kein Materialparameter. Die Fließverzerrung muss daher nicht zwingenderweise konstant sein. Im Allgemeinen hängt sie von den Lastparametern der sinusförmigen Anregung ab. Für eine verzerrungsgeregelte Versuchsführung sind das die Schubverzerrungsamplitude und die Kreisfrequenz. In den folgenden Überlegungen wird darauf näher eingegangen. Außerdem wird die Bestimmung der Fließspannung auf der Grundlage von LAOStrain untersucht. Dafür werden folgende Fälle diskutiert:

(1) Der Vorfließbereich einer Flüssigkeit mit Fließspannung sei annähernd linear viskoelastisch. Folglich ergibt sich die Fließverzerrung entsprechend Weiss et al. (1994; Abb. 1, 2) als diejenige Amplitude, ab der Speicher- und Verlusmodul nicht länger unabhängig von der Schubverzerrungsamplitude sind. Die Fließverzerrung und die kritische Schubverzerrung stimmen überein

$$\gamma_{cr} = \gamma_y \ . \tag{7.8}$$

Für Flüssigkeiten mit Fließspannung und linear viskoelastischem Vorfließbereich geht dies mit einem abrupten Ansteigen des Verlustmoduls und der normierten Intensitäten einher. Daher kann die Fließverzerrung aus verzerrungsgeregelten sinusförmigen Versuchen bequem bestimmt werden. Dies ist für das PRANDTL Element in Boisly et al. (2014b), das BINGHAM-HOOKE Element in Boisly et al. (2017) und für das rCROSS-BINGHAM-HOOKE Element in Abschnitt 5.4.1 gezeigt. Weil die Vorfließbereiche dieser drei Modelle lediglich linear elastisch sind, hängen der Elastizitätsmodul G und die Fließverzerrung γ_y mit der Fließspannung über

$$\tau_y = G\,\gamma_y \qquad \text{mit} \quad \gamma_y = \hat{\gamma}_y \tag{7.9}$$

[44] (Yziquel et al. 1999a; Abb. 5), (de Souza Mendes 2009; Abb. 10), (Carrier und Petekidis 2009; Abb. 4), (de Souza Mendes 2011; Abb. 13), (Derec et al. 2003; Abb. 10)

[45] englisches Originalzitat: „There are also some far-fetched proposals for the LST: a maximum in $\tan\delta$ [151] or a maximum in G'' [152] at LST. [...] It also has been proposed that the gel point may be reached when the storage modulus equals the loss modulus, $G' = G''$ [153, 154], but this is contradicted by the observation that the $G' = G''$ crossover depends on the specific choice of frequency [154].“ (Winter und Mours 1997; S. 220) LST steht für liquid-solid transition.

zusammen. Die Fließverzerrung hängt ausschließlich von der Schubverzerrungsamplitude aber nicht von der Kreisfrequenz ab. Somit gibt es genau einen Fließpunkt $(\gamma_y = \hat{\gamma}_y,\ \tau_y)$. Dieser Zusammenhang wird in Abschnitt 8 zur Parameteridentifikation genutzt. Es sei allerdings darauf hingewiesen, dass die Fließverzerrung keinen Materialparameter darstellt. Sie ist ein, speziell für verzerrungsgeregelte sinusförmige Versuche, eingeführter Parameter und hängt im Allgemeinen von der Schubverzerrungsamplitude $\hat{\gamma}$ und der Kreisfrequenz ω ab. (*Folgerung 22*)

(2) Um zu zeigen, dass sich die Fließverzerrung nicht ausschließlich aus der Schubverzerrungsamplitude $\hat{\gamma}$ ergibt, sondern zusätzlich ebenfalls von der Kreisfrequenz ω abgängen kann, wird das LAOStrain Verhalten des SCHOFIELD-SCOTT-BLAIR Elements [46] diskutiert. Dessen rheologisches Schaltbild

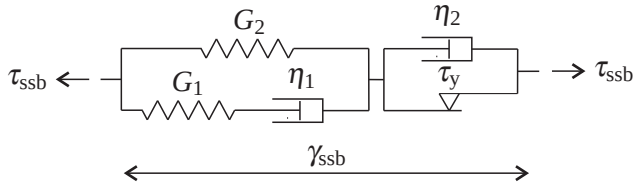


Abbildung 7.8: SCHOFIELD-SCOTT-BLAIR Element

ist in Abbildung 7.8 dargestellt. Dreidimensional verallgemeinerte konstitutive Beziehungen sind bei Pouriayevali et al. (2013) vorgestellt. Die das SCHOFIELD-SCOTT-BLAIR Element betreffenden Größen sind mit dem Literalindex $(\ )_{ssb}$ versehen. Zur Beschreibung der Fließverzerrung genügt es nicht, ausschließlich die Schubverzerrungsamplitude anzugeben. Gleichung (7.9) ist nicht mehr gültig. Aufgrund des viskoelastischen Vorfließbereichs hängt die Gesamtspannung im Vorfließbereich sowohl von der Schubverzerrung als auch von der Schubverzerrungsrate ab. Diese ergeben sich wiederum aus der Schubverzerrungsamplitude und der Kreisfrequenz. Die Fließverzerrung stellt sich in Abhängigkeit der beiden Lastparameter ein. Es gilt $\gamma_y = \gamma_y(\gamma, \dot{\gamma}) = \gamma_y(\hat{\gamma}, \omega)$. Daher existiert eine Menge aller Fließpunkte $(\gamma_y = \gamma_y(\hat{\gamma}, \omega),\ \tau_y)$. Die Fließspannung kann mit Kenntnis der Materialparameter G_1, G_2 und η_2 sowie der Lastparameter bei Fließbeginn, $(\hat{\gamma}, \omega) \leftrightarrow \gamma_y$, berechnet werden. Sie ergibt sich folglich als Maximum der Spannungsantwort zu derjenigen verzerrungsgesteuerten Anregung $\gamma_{ssb}(t) = \gamma_y(\hat{\gamma}, \omega)\sin(\omega t)$, bei der Fließen erstmalig eintritt,

$$\tau_y = \mathrm{MAX}\left(\tau_{ssb}(t)\big|_{\gamma_{ssb}(t)=\gamma_y(\hat{\gamma},\omega)\sin(\omega t)} \right) . \tag{7.10}$$

(3) Die Identifikation der Fließspannung mithilfe verzerrungsgeregelter Amplitudensweeps setzt im Allgemeinen die Kenntnis aller den Vorfließbereich beschreibenden Materialparameter voraus. Dies kann man sich mithilfe einer Parallelschaltung aus SCHOFIELD-SCOTT-BLAIR Element und MAXWELL Element erklären. In diesem Fall kann die Fließspannung nicht über das Maximum derjenigen Spannungsantwort bestimmt werden, bei der Fließen erstmalig einsetzt. Gleichung (7.10) verliert an Gültigkeit, da sich die Gesamtspannung additiv auf das SCHOFIELD-SCOTT-BLAIR Element und das MAXWELL Element aufteilt. Somit ist die Identifikation der Fließspannung in den gesamten Prozess der Parameteridentifikation eingebunden und erfolgt iterativ.

(4) Ist der Vorfließbereich des Materials mit fest-flüssig Übergang nicht annähernd linear viskoelastisch, so kann die Fließverzerrung nicht ohne Weiteres mit dem Ansteigen des Verlustmoduls beziehungsweise dem Ansteigen normierter Intensitäten in Verbindung gebracht werden. Das kann man sich mithilfe einer Parallelschaltung aus rCROSS-MAXWELL Element (Boisly et al. 2015) und PRANDTL Element (Boisly et al. 2014b) erklären. Befindet sich das rCROSS-MAXWELL Element entsprechend Boisly et al. (2015; Abb. 15 bis 17) in MODE $\omega/3$, $\omega/4$ oder $\omega/5$, und tritt außerdem das Maximum im Verlustmodul bei Schubverzerrungsamplituden kleiner der kritischen Verzerrung des PRANDTL Elements auf, korreliert das Ansteigen des Verlustmoduls nicht mit der Fließverzerrung.

Die bisher abgeleiteten Erkenntnisse gelten gleichermaßen für endochrone viskoplastische Materialien. Somit ist es in völlig analoger Weise möglich, die pseudo Fließspannung des endochronen MAXWELL Elements zu bestimmen.

[46] (Reiner 1968; S. 167), (Du und Tscheuschner 1986; S. 48), (Gamota und Filisko 1991; S. 422), (Weipert et al. 1993; S. 147), (Spencer Jr. und Dyke 1997; Abb. 6), (Butz und von Stryk 2002; Abb. 4) (Wang und Liao 2011; Abb. 14); Ursprünglich ist das SCHOFIELD-SCOTT-BLAIR Element als der rheologische Körper eingeführt worden. Es kann jedoch nach DIN 13343 (Abb. 4, Absch. 5.3), Gross et al. (2004; S. 311), Silber und Steinwender (2005; S. 178) und DIN–Taschenbuch 398 (2012; S. 41) in Abbildung 7.8 überführt werden, sodass die Gesamtspannung eine Summe aus Über- und Gleichgewichtsspannung ist.

7.6 LISSAJOUS Diagramme im PIPKIN-Raum zur Bestimmung der statischen Fließspannung

Eine weitere Möglichkeit zur Bestimmung der statischen Fließspannung, ist die Auswertung von LISSAJOUS Diagrammen im PIPKIN-Raum. Diese Methode wird in Maxey et al. (2008; S. 2, 8) angewendet. Nach MAXEY ergibt sich die statische Fließspannung für eine verzerrungsgesteuerte sinusförmige Anregung analog zu Gleichung (7.10) als diejenige Maximalspannung, bei der die LISSAJOUS Diagramme gerade noch eine elliptische Gestalt haben.
Wie schon in den Methoden zuvor herausgearbeitet ist, setzt auch diese Methode voraus, dass die Existenz einer Fließspannung bereits nachgewiesen oder mindestens physikalisch begründet ist. Das ist dadurch begründet, dass auch LISSAJOUS Diagramme nichtlinear viskoelastischer, nichtlinear elastischer sowie nichtlinear viskoser Materialmodelle von der elliptischen Gestalt abweichen können, obwohl letztere keine Fließspannung besitzen. Diese Tatsache ist beispielsweise für den rCROSS Dämpfer und das rCROSS-MAXWELL Element in Boisly et al. (2015; Abb. 7, 20, 21) gezeigt. Das Abweichen der LISSAJOUS Diagramme von der elliptischen Gestalt ist also zur Bestimmung der statischen Fließspannung nicht geeignet, wenn die Existenz der Fließspannung noch nicht motiviert ist.
Außerdem ist zu fordern, dass das Verlassen der elliptischen Gestalt eine Folge von plastischem Fließen ist. Wie bereits in Abschnitt 7.5 beschrieben wurde, ist es auch denkbar, dass nichtlinear viskoelastische Effekte eher einsetzen, als die Fließbedingung eines viskoplastischen Materialmodells erfüllt ist. Je nachdem wieviel eher nichtlinear viskoelastische Effekte einsetzen, wird die statische Fließspannung mehr oder weniger unterschätzt.

7.7 Relaxationsversuche zum Ermitteln der statischen Fließspannung

Ein weiteres in der Literatur verbreitetes Verfahren zur Bestimmung der statischen Fließspannung fußt auf der Auswertung von Relaxationsversuchen [47]

$$\gamma(t) = \begin{cases} \dot{\tilde{\gamma}} t & : 0 < t < \tilde{t} \quad (7.11a) \\ \tilde{\gamma} & : \tilde{t} \le t \le \tilde{t} + \Delta t \,. \quad (7.11b) \end{cases}$$

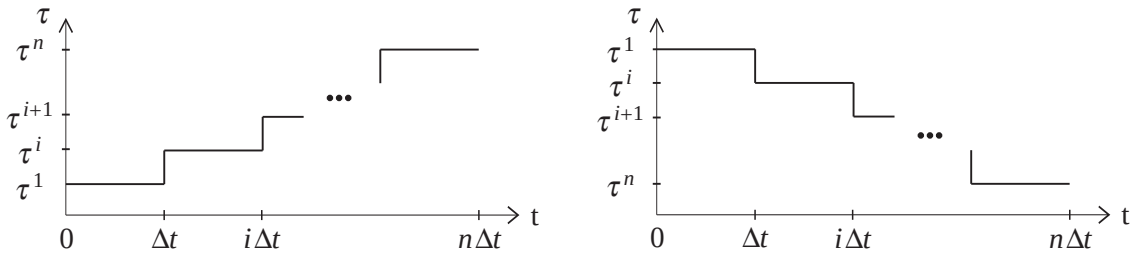
Dazu wird das Material solange mit konstanter Rate $\dot{\tilde{\gamma}}$ belastet, bis das gewünschte Relaxationsniveau $\tilde{\gamma}$ erreicht ist. Das Relaxationsniveau wird anschließend für eine Haltezeit von Δt aufrecht erhalten. Die Spannung, welche nach dem Ende des Relaxationsversuch bei $\tilde{t} + \Delta t$ verbleibt, wird als statische Fließspannung definiert.
Der Ansatz dieser Methode ist vergleichbar mit der Bestimmung der Gleichgewichtsspannung nach Abschnitt 3.3. Daher ist zu beachten, dass die Gleichgewichtsspannung nur in Sonderfällen mit der statischen Fließspannung gleichgesetzt werden kann. Treten beispielsweise Verfestigungseffekte [48] auf, so setzt sich die Gleichgewichtsspannung aus der statischen Fließspannung und einem Verfestigungsanteil zusammen. Würde die Gleichgewichtsspannung mit der Fließspannung gleichgesetzt werden, so würde man die Fließspannung überschätzen. Dabei hängt der Umfang der Überschätzung davon ab, in welchem Maß das Relaxationsniveau $\tilde{\gamma}$ über demjenigen Relaxationsniveau liegt, welches notwendig ist, um plastisches Fließen zu iniziieren. Liegt das Relaxationsniveau unter demjenigen Relaxationsniveau, bei dem plastisches Fließen gerade einsetzt, so wird der statischen Fließspannung eine Vorfließbereichsspannung zugeordnet. Infolgedessen wird die statische Fließspannung unterschätzt. (*Folgerung 23*) Erschwerend kommt hinzu, dass man allein aus Relaxationsversuchen nicht feststellen kann, ob beziehungsweise in welchem Maße die Fließbedingung erfüllt ist. Deswegen wird diese Methode für verfestigendes Material nicht als Mittel der Wahl erachtet.
Unterstellt man dem Material jedoch, dass keine Ver- und Entfestigungseffekte auftreten, wie es für viele Flüssigkeiten mit Fließspannung der Fall ist, so muss lediglich das Erfüllen der Fließbedingung für das korrekte Messen der Fließspannung sichergestellt sein. Das bedeutet, dass sich für verschiedene Relaxationsniveaus nach dem Ende der Haltezeit ein und dieselbe Relaxationsabbruchspannung einstellt. Diese entspricht folglich der statischen Fließspannung. Mittels eines rheologischen Modells, bestehend aus der

[47] (Keentok 1982; S. 327), (Dzuy und Boger 1983; S. 324, 331), (James et al. 1987; S. 444), (Nguyen und Boger 1992; S. 66)
[48] (Houwink 1957; S. 3), (Maugin 1992; S. 4), (Puzrin 2012; S. 110)

Parallelschaltung eines MAXWELL und PRANDTL Elements, kann man diese Tatsache nachvollziehen. Um festzustellen, ob das Material Ver- oder Entfestigungseffekten unterliegt, ist die Versuchsführung für ein und dasselbe Material nach Entlastung und „ausreichend langer“ Haltezeit mehrere Male durchzuführen. Die zwischen den Relaxationsversuchen „ausreichend lang“ gehaltene Entlastungszeit ist sicherzustellen, damit ratenabhängige Materialeffekte während dessen abklingen können. Liegt nach wiederholt durchgeführter Versuchsführung in guter Näherung ein identisches Messergebnis vor, so können Ver- und Entfestigungseffekte für moderate Lastwechselzahlen vernachlässigt werden.
Die Schwierigkeiten, die bei der praktischen Bestimmung der Gleichgewichtsspannung in Abschnitt 3.4 existieren, bleiben im Generellen für diese Methode bestehen. Daher kann es unter Umständen der Fall sein, dass der Relaxationsabbruchpunkt, welcher der statischen Fließspannung zugeordnet wird, von der Dauer der Haltezeit abhängt. Es ist folglich ratsam, die Abhängigkeit des Relaxationsabbruchpunktes von der Haltezeit zu überprüfen.

7.8 Kriechversuche zur Identifizierung der statischen Fließspannung

Die Identifizierung der statischen Fließspannung von weder ver- noch entfestigenden Materialien mit festflüssig Übergang kann mittels Kriechversuchen [49] erfolgen. Dazu werden in aufsteigender beziehungsweise abfallender Reihenfolge mehrere Spannungsniveaus $\tau^1 \dots \tau^n$ für eine Haltezeit Δt aufgebracht. Die Versuchsführung ist in Abbildung 7.9 dargestellt. Die Evolution der Verzerrung in Abhängigkeit von der



(a) Aufsteigende Reihenfolge (b) Abfallende Reihenfolge

Abbildung 7.9: Versuchsführung zur Bestimmung der statischen Fließspannung auf Basis von Kriechversuchen

Zeit wird als Materialantwort für jedes Spannungsniveau bestimmt [50].
Die statische Fließspannung wird als das größtmögliche Spannungsniveau identifiziert, für das die Verzerrung gerade noch asymptotisch gegen einen Grenzwert konvergiert. Dies unterstellt die Abfolge von Kriechversuchen, ausgehend von einem minimalen Spannungsniveaus mit betragsmäßig steigenden Kriechniveaus entsprechend Abbildung 7.9(a). Sobald die Verzerrungsantwort einen stationären Zustand mit konstanter Verzerrungsrate erreicht, ist die Fließspannung überschritten.
Alternativ kann die statische Fließspannung auch als das kleinstmögliche Spannungsniveau identifiziert werden, für das die Verzerrung nicht asymptotisch gegen einen Grenzwert konvergiert. Zur Bestimmung dessen wird die Abfolge von Kriechversuchen, ausgehend von einem maximalen hinzu geringeren Spannungsniveaus entsprechend Abbildung 7.9(b), aufgebracht. Sobald die Verzerrungsantwort einen stationären Zustand mit konstanter Verzerrung erreicht, ist die Fließspannung unterschritten.
Die Schwierigkeit bei dieser Methode liegt darin, zu entscheiden, ob die Verzerrungsantwort mit endlicher aber von Null verschiedener Verzerrungsrate erfolgt, oder ob die Verzerrung infolge einer verschwindenden Verzerrungsrate einen konstanten Wert angenommen hat. Cheng (1986; S. 543) beschreibt dieses Phänomen damit, dass sich der Wert, welcher der statischen Fließspannung zugeordnet wird, umso mehr verkleinert, je größer die Beobachtungszeit ist. Die Haltezeit Δt hat somit einen entscheidenden Einfluss

[49] (Cheng 1986; S. 543), (James et al. 1987; S. 442), (Nguyen und Boger 1992; S. 66), (Husband et al. 1993; S. 224), (Steffe 1996; S. 204), (Zhu et al. 2001; S. 1112), (Coussot et al. 2002b; S. 577), (Uhlherr et al. 2005; S. 105), (Tiu et al. 2006; S. 656), (Maxey et al. 2008; S. 2), (Le Grand und Petekidis 2008; S. 581), (Chhabra und Richardson 2008; S. 93), (Stokes und Frith 2008; S. 1135), Christopoulou et al. (2009; S. 5058 ff.), (Mezger 2010; S. 53, Abb. 3.1), (Paredes et al. 2011; S. 3), (Vicente et al. 2011; S. 3705), (DIN–Taschenbuch 398 2012; S. 444), (Martinie et al. 2013; S. 632), (Koos et al. 2014; S. 951)

[50] (Husband et al. 1993; S. 225), (Christopoulou et al. 2009; Abb. 5, 7), (Le Grand und Petekidis 2008; S. 581)

auf das Messergebnis [51]. Für eine zu klein gewählte Haltezeit ist die Überspannung am Kriechabbruchpunkt noch nicht vollständig abgebaut. Infolgedessen wird die statische Fließspannung überschätzt. Die Haltezeit muss folglich „ausreichend groß“ sein, sodass die Überspannung vernachlässigbar klein gegenüber der Gleichgewichtsspannung ist. Die experimentellen Ergebnisse von Coussot et al. (2002b; Abb. 2) und Fall et al. (2010; Abb. 5) unterstreichen diesen Sachverhalt. Dieser kann auch theoretisch mittels einer Parallelschaltung aus MAXWELL und PRANDTL Element nachvollzogen werden.
Weiterhin ist zu berücksichtigen, dass die Methode für Materialien mit Verfestigungseffekten keine verläßlichen Ergebnisse liefern kann. Infolge der Verfestigung konvergiert die Verzerrung auch nach Erfüllen der Fließbedingung asymptotisch gegen einen konstanten Wert. Erst wenn der Verfestigungseffekt gesättigt ist, stellt sich zu einem konstanten Spannungsniveau ein stationärer Zustand mit konstanter Verzerrungsrate ein. Da jedoch viele Flüssigkeiten mit Fließspannung keine plastischen Verfestigungseffekte besitzen, sind gestaffelte Kriechversuche ein geeignetes Mittel, um die Existenz einer Fließspannung festzustellen. (*Folgerung 24*)

7.9 Identifikation der Fließspannung einer magnetorheologischen Flüssigkeit

Eine für diese Arbeit wesentliche Teilaufgabe, ist die Modellierung der Messergebnisse der magnetorheologischen Flüssigkeit aus Abbildung 2.5. Dass magnetorheologische Fluide eine Fließspannung besitzen, gilt als allgemein akzeptierter Stand der Technik [52]. Dies ist in Abschnitt 2.5 anschaulich motiviert. Infolgedessen kann zum einen auf die direkte Bestimmung der Fließspannung mittels Kriechversuchen entsprechend Abschnitt 7.8 verzichtet werden. Zum anderen besteht die Möglichkeit, die Fließspannung in erster Instanz mittels der dynamischen Fließspannung abzuschätzen. Ausgehend davon ist es legitim, den Wert der Fließspannung unter Berücksichtigung verzerrungsgesteuerter Amplitudensweeps zu modifizieren, sodass er im Mittel für alle Materialfunktionen das beste Modellierungsergebnis liefert.

[51] (Nguyen und Boger 1992; S. 66), (Mezger 2010; S. 56)

[52] (Lemaire et al. 1995; S. 1012), (Tang und Conrad 1996; S. 1167), (Hagenbüchle und Liu 1997; S. 7664), (Claracq et al. 2004; S. 38), (Peng et al. 2008; S. 28)

8. Modellierung des Materialverhaltens magnetorheologischer Fluide unter einfachem Schub

In diesem Kapitel erfolgt die Modellierung des Scherverhaltens magnetorheologischer Fluide im Bereich geometrisch linearer Theorie. Grundlage hierfür sind die Messungen zur Fließkurve sowie Speicher- und Verlustmodul entsprechend Abbildung 2.5. Zunächst wird in Abschnitt 8.1 das Materialverhalten ohne dem Einfluss eines äußeren Magnetfeldes modelliert. Unter dieser Bedingung verhält sich das MRF wie eine normale Suspension. Anschließend werden die Messergebnisse unter dem Einfluss eines äußeren Magnetfeldes ausgewertet. Der Betrag der magnetischen Induktion übernimmt dabei die Rolle eines Steuerparameters. Dies ist zulässig, da das Magnetfeld im Messspalt der magneto-rheologischen Messzelle des Anton Paar Rheometers MCR 501 ausreichend homogen ist. Die Messergebnisse werden mittels verschiedener rheologischer Modelle abgebildet. Ziel des Modellvergleichs ist, das im phänomenologischen Sinne bestmögliche Modellierungsergebnis zu erzielen. In Abschnitt 8.2 wird dazu eine Parallelschaltung aus rCROSS-BINGHAM-HOOKE und rCROSS-MAXWELL Element zugrunde gelegt. Dazu werden die Modellvorhersagen des rCROSS-BINGHAM-HOOKE Elements aus Abschnitt 5 berücksichtigt, deren Interpretation im Wesentlichen auf dem Verhalten des BINGHAM-HOOKE Elements (Boisly et al. 2017) fußt. Da die Vorhersagen des rCROSS-MAXWELL Elements bereits in Boisly et al. (2015) veröffentlicht sind, erübrigt sich die theoretische Vorbetrachtung im Rahmen dieser Arbeit. Die Parallelschaltung aus PRANDTL Element und rCROSS-MAXWELL Element kommt in Abschnitt 8.3 zur Anwendung. Die Modellvorhersagen des PRANDTL Elements wurden bereits in Boisly et al. (2014b) publiziert, sodass sie im Rahmen dieser Arbeit nicht mehr gesondert untersucht werden müssen. In Abschnitt 8.4 erfolgt die Modellierung unter Verwendung eines, zu einem rCROSS-MAXWELL Element parallel geschalteten endochronen MAXWELL Elements. Abschließend werden die Modellierungsergebnisse in Abschnitt 8.5 ausgewertet.

8.1 Modellierung des Materialverhaltens eines magnetorheologischen Fluids ohne dem Einfluss eines äußeren Magnetfelds

Ziel dieses Abschnittes ist die Modellierung der in Abbildung 2.5(a) für $|\mathbf{B}| = 0\,\mathrm{mT}$ dargestellten Fließkurve $\underline{\tau}_{\infty.\mathrm{meas}}\left(\dot{\tilde{\gamma}}\right)$ sowie des in Abbildung 2.5(b) für $|\mathbf{B}| = 0\,\mathrm{mT}$ aufgetragenen Speicher- und Verlustmoduls, $\underline{G}'_{\mathrm{meas}}$ und $\underline{G}''_{\mathrm{meas}}$. Die Messungen $(\,)_{\mathrm{meas}}$ wurden von ADAM und BORIN [1] aus der Gruppe von ODENBACH aufgenommen. Die Rohdaten der Messungen sind in Abschnitt A.7 hinterlegt. Da der Anstieg der

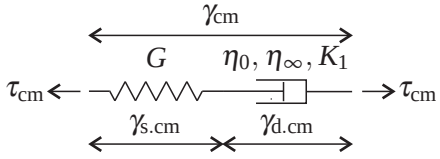


Abbildung 8.1: Rheologisches Schaltbild des rCROSS-MAXWELL Elements

Fließkurve mit zunehmender Scherrate sinkt, handelt es sich um scherverdünnendes Verhalten. Eine signifikante dynamische Fließspannung ist nicht zu erkennen. Bei dem Speicher- und Verlustmodul handelt es sich nach Hyun et al. (2002) und Hyun et al. (2011; Abb. 5) um „Typ I“ Verhalten. Beide sind in der

[1] Frank Adam, Dmitry Borin; Technische Universität Dresden, Fakultät für Maschinenwesen, Institut für Strömungsmechanik, Professur für Magnetofluiddynamik (Professor Odenbach)

selben Größenordnung. Speicher- und Verlustmodul weisen für „kleinere“ Verzerrungsamplituden ein Plateau auf, bevor die Messwerte abfallen. Diese Eigenschaften unter Berücksichtigung des in Abschnitt 2 beschriebenen Materialverhaltens deutet auf einen viskoelastischen flüssigkeitsähnlichen Charakter hin, der mit einem rCROSS-MAXWELL Element im MODE ω/3a entsprechend Boisly et al. (2015; Abb. 15) abgebildet werden kann. Das rheologische Schaltbild ist in Abbildung 8.1 dargestellt (Boisly et al. 2015; Abb. 8). Die eindimensionalen konstitutiven Beziehungen

$$\tau_{\mathrm{cm}} = G\,\gamma_{\mathrm{s.cm}} \tag{8.1a}$$

$$\tau_{\mathrm{cm}} = \left(\eta_\infty + \frac{\eta_0 - \eta_\infty}{1 + K_1 \cdot |\dot{\gamma}_{\mathrm{d.cm}}|}\right)\dot{\gamma}_{\mathrm{d.cm}} \tag{8.1b}$$

$$\gamma_{\mathrm{cm}} = \gamma_{\mathrm{s.cm}} + \gamma_{\mathrm{d.cm}} \tag{8.1c}$$

ergeben sich somit unter Berücksichtigung der kinematischen und kinetischen Bedingungen für eine Reihenschaltung entsprechend den Gleichungen (2.1) und (2.2). Analog zum MAXWELL Element können die Relaxationszeiten

$$\alpha_0 = \frac{\eta_0}{G} \tag{8.2}$$

$$\alpha_\infty = \frac{\eta_\infty}{G} \tag{8.3}$$

eingeführt werden. Bei der Modellierung der Fließkurve sowie Speicher- und Verlustmodul hat sich herausgestellt, dass sie für ein und denselben Parametersatz nicht gleichermaßen gut modelliert werden können. Daher sind im Folgenden für zwei Grenzfälle, (1) der bestmöglichen Modellierung von Speicher- und Verlustmodul sowie (2) der bestmöglichen Modellierung der Fließkurve, die entsprechende Identifizierungsstrategie sowie die zugehörigen Modellvorhersagen dargelegt. Die Parameteridentifikation unter der Maßgabe, Speicher- und Verlustmodul bestmöglich zu modellieren, erfolgt in Abschnitt 8.1.1. Die bestmögliche Modellierung der Fließkurve ist die Zielstellung von Abschnitt 8.1.2 .

8.1.1 Identifikationsstrategie zur bestmöglichen Modellierung von Speicher- und Verlustmodul

Die Materialparameter werden im Folgenden derart bestimmt, dass sie die bestmögiche Modellierung des Speicher- und Verlustmoduls garantieren. Dies erfolgt unter Verwendung charakteristischer Punkte des MODE ω/3a des rCROSS-MAXWELL Elements. Zur Bestimmung des Schubmoduls und der Nullviskosität werden Gleichungen (80) und (81) aus Boisly et al. (2015) nach diesen Materialparametern, G und η_0, aufgelöst. Man erhält

$$G = \frac{(G'_{\mathrm{m.0}})^2 + (G''_{\mathrm{m.0}})^2}{G'_{\mathrm{m.0}}} \tag{8.4}$$

$$\eta_0 = \frac{(G'_{\mathrm{m.0}})^2 + (G''_{\mathrm{m.0}})^2}{\omega\, G''_{\mathrm{m.0}}}\,. \tag{8.5}$$

Somit können G und η_0 über die arithmetische Mittelung entsprechender Messwerte aus Tabelle A.2 und A.3

$$G'_{\mathrm{m.0}} = \frac{G'^{i=2}_{\mathrm{meas}} + G'^{i=5}_{\mathrm{meas}}}{2} = \frac{559.9\,\mathrm{Pa} + 573.6\,\mathrm{Pa}}{2} = 566.75\,\mathrm{Pa} \tag{8.6}$$

$$G''_{\mathrm{m.0}} = \frac{G''^{i=2}_{\mathrm{meas}} + G''^{i=9}_{\mathrm{meas}}}{2} = \frac{445.07\,\mathrm{Pa} + 419.07\,\mathrm{Pa}}{2} = 432.07\,\mathrm{Pa} \tag{8.7}$$

berechnet werden. Hierbei wird ein Messpunkt $G'^{i=(\,)}_{\mathrm{meas}}$ beziehungsweise $G''^{i=(\,)}_{\mathrm{meas}}$ mittels der rechts oben stehenden Nummer ( ) gekennzeichnet. Es ergibt sich

$$G = 896.17\,\mathrm{Pa} \tag{8.8}$$

$$\eta_0 = 187.08\,\mathrm{Pa} \tag{8.9}$$

unter Beachtung von

$$\omega = 2\pi \frac{\text{rad}}{\text{s}} \,. \tag{8.10}$$

Ziel des nächsten Schrittes ist die Identifizierung der Parameter K_1 und η_∞. Dies erfolgt iterativ, solange der bestmögliche Fit des Speicher- und Verlustmoduls erreicht ist. Weil für den Speicher- und Verlustmodul weder der Beginn des Plateaus im Unendlichen, $\frac{\dot{\gamma}_{c.3}}{\omega}$, noch die Plateauwerte $G'_{\text{m}.\infty}$ und $G''_{\text{m}.\infty}$ selbst abgeschätzt werden können, wird in erster Näherung

$$K_1 \approx 79.58\,\text{s} \tag{8.11}$$

nach Boisly et al. (2015; Abb. 14) über den Zusammenhang

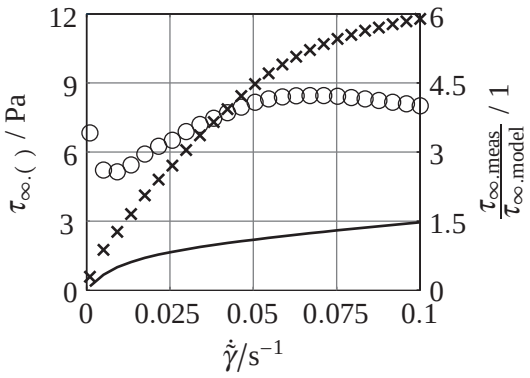
$$\frac{1}{K_1 \omega} \approx 2 \cdot 10^{-3} \tag{8.12}$$

aus MODE $\omega/2$ abgeschätzt. Anschließend ergibt sich η_∞. In weiteren Iterationsschritten werden K_1 und η_∞ solange variiert, bis die Modellvorhersagen G'_{model} und G''_{model} möglichst nahe an den Messergebnissen G'_{meas} und G''_{meas} liegen. Letztlich erhält man

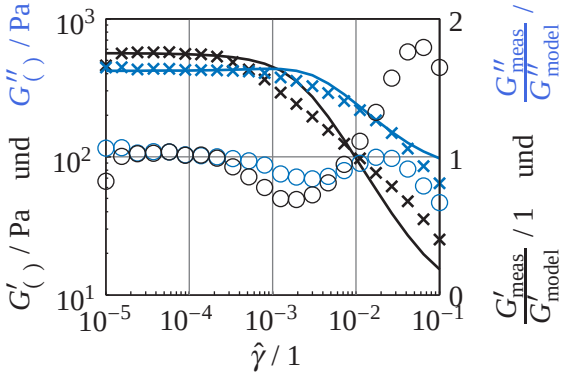
$$K_1 = 90\,\text{s} \tag{8.13}$$

$$\eta_\infty = 12\,\text{Pa s} \,. \tag{8.14}$$

Die Modellvorhersagen $(\,)_{\text{model}}$ sind im Vergleich zu den Messergebnissen $(\,)_{\text{meas}}$ in Abbildung 8.2 dargestellt. Die Abweichungen zwischen Modellvorhersagen und Messergebnissen sind mittels den Verhältnissen $\tau_{\infty.\text{meas}}/\tau_{\infty.\text{model}}$ für die Fließkurve sowie $G'_{\text{meas}}/G'_{\text{model}}$ und $G''_{\text{meas}}/G''_{\text{model}}$ für Speicher- und Verlustmodul quantifiziert.



(a) Fließkurve $\underline{\tau}_{\infty.\text{meas}}$: xxx, $\tau_{\infty.\text{model}}$: —— und $\frac{\tau_{\infty.\text{meas}}}{\tau_{\infty.\text{model}}}$: ooo



(b) Speicher- und Verlustmodul $\underline{G'}_{\text{meas}}$: xxx, G'_{model}: ——, $\frac{G'_{\text{meas}}}{G'_{\text{model}}}$: ooo, $\underline{G''}_{\text{meas}}$: xxx, G''_{model}: —— und $\frac{G''_{\text{meas}}}{G''_{\text{model}}}$: ooo für $\omega = 2\pi \frac{\text{rad}}{\text{s}}$

Abbildung 8.2: Modellvorhersagen im Vergleich zu Messergebnissen für die Suspension aus Abschnitt 8.1 mit $\Phi = 40\,\text{vol\%}$ BASF$^{\text{TM}}$ CIP CC Partikeln in der Trägerflüssigkeit MOTUL 300V; Modellvorhersagen für $\eta_0 = 187.08\,\text{Pa s}$, $\eta_\infty = 12\,\text{Pa s}$, $K_1 = 90\,\text{s}$ und $G = 896.14\,\text{Pa}$

8.1.2 Identifikationsstrategie zur bestmöglichen Modellierung der Fließkurve

Im Folgenden wird der Schwerpunkt auf die bestmögliche Modellierung der Fließkurve gelegt. Aus diesem Grund ändert sich die Strategie zur Parameteridentifikation. Die Materialparameter des viskosen Teilmodells, η_0, η_∞ und K_1, werden zunächst mittels charakteristischer Punkte der Fließkurve bestimmt. Schätzt man die Nullviskosität als dynamische Viskosität

$$\eta_0 \approx \frac{\tau^{i=1}_{\infty.\text{meas}}}{\dot{\tilde{\gamma}}_{i=1}} = \frac{0.5879\,\text{Pa}}{0.001\,\text{s}^{-1}} = 587.9\,\text{Pa s} \tag{8.15}$$

ab, hat sich gezeigt, dass die Fließkurve überschätzt wird. Deswegen wird die Nullviskosität als differentielle Viskosität

$$\eta_0 \approx \eta_{\text{diff}.i=1} \tag{8.16}$$

berechnet. Diese wird mittels des *zentralen Differenzenquotienten* [2] approximiert und man erhält

$$\eta_0 \approx \frac{\tau_{\infty.\text{meas}}^{i=2} - \tau_\infty(\dot{\gamma}=0)}{\dot{\gamma}_{i=2} - 0} = \frac{1.749\,\text{Pa}}{0.00513\,\text{s}^{-1}} = 340.9\,\text{Pa s} \tag{8.17}$$

unter der Annahme von

$$\tau_\infty(\dot{\gamma}=0) = 0\,. \tag{8.18}$$

Die letzte Annahme ist dadurch begründet, dass das rCROSS-MAXWELL Element keine Flüssigkeit mit Fließspannung ist. Die Viskosität im Unendlichen η_∞ wird über den Differenzenquotienten

$$\eta_\infty \approx \frac{\tau_{\infty.\text{meas}}^{i=25} - \tau_{\infty.\text{meas}}^{i=24}}{\dot{\gamma}_{i=25} - \dot{\gamma}_{i=24}} = \frac{11.78\,\text{Pa} - 11.68\,\text{Pa}}{0.1\,\text{s}^{-1} - 0.0959\,\text{s}^{-1}} = 24.4\,\text{Pa s} \tag{8.19}$$

bestimmt. Die Messwerte $\tau_{\infty.\text{meas}}^{i=2}$, $\tau_{\infty.\text{meas}}^{i=24}$, $\tau_{\infty.\text{meas}}^{i=25}$, $\dot{\gamma}_{i=2}$, $\dot{\gamma}_{i=24}$ und $\dot{\gamma}_{i=25}$ sind aus Tabelle A.1 entnommen. Im nächsten Schritt wird aus Abbildung 8.3(a) die charakteristische Schubverzerrungsrate

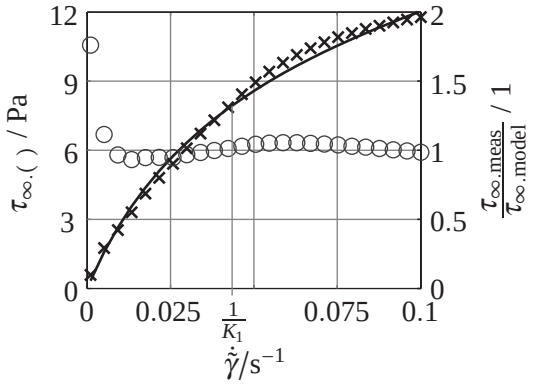
$$\frac{1}{K_1} = 0.05\,\frac{1}{\text{s}} \tag{8.20}$$

abgeschätzt, woraus sich zunächst $K_1 = 20\,\text{s}$ ergibt. Ausgehend davon, wird K_1 solange variiert, bis sich der beste Kurvenfit für die Fließkurve einstellt. Letztendlich erhält man

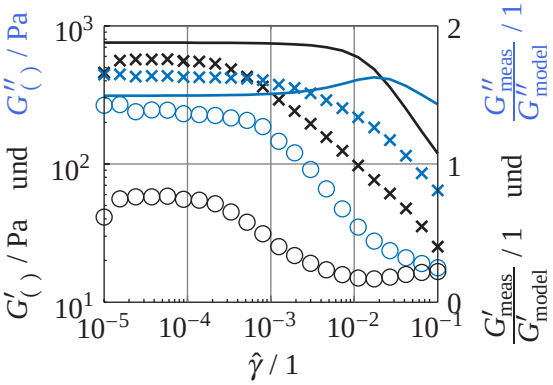
$$K_1 = 23\,\text{s} \tag{8.21}$$

$$G = 896.14\,\text{Pa}\,. \tag{8.22}$$

Der Elastizitätsmodul ist über Gleichung (8.4) ermittelt. Die Modellierungsergebnisse sind in Abbildung 8.3 im Verhältnis zu den Messungen dargestellt. Die Abweichungen zwischen Modell und Messung sind als Verhältnisse angegeben.



(a) Fließkurve $\underline{\tau}_{\infty.\text{meas}}$: xxx, $\tau_{\infty.\text{model}}$: —— und $\frac{\tau_{\infty.\text{meas}}}{\tau_{\infty.\text{model}}}$: ooo



(b) Speicher- und Verlustmodul $\underline{G'}_{\text{meas}}$: xxx, G'_{model}: ——, $\frac{G'_{\text{meas}}}{G'_{\text{model}}}$: ooo, $\underline{G''}_{\text{meas}}$: xxx, G''_{model}: —— und $\frac{G''_{\text{meas}}}{G''_{\text{model}}}$: ooo

Abbildung 8.3: Modellvorhersagen im Vergleich zu Messergebnissen für die Suspension aus Abschnitt 8.1 mit $\Phi = 40\,\text{vol\%}$ BASF$^{\text{TM}}$ CIP CC Partikeln in der Trägerflüssigkeit MOTUL 300V; Modellvorhersagen für $\eta_0 = 340.9\,\text{Pa s}$, $\eta_\infty = 24.4\,\text{Pa s}$, $K_1 = 23\,\text{s}$ und $G = 896.14\,\text{Pa}$

[2] (Plato 2006; S. 229), (Schwetlick und Roos 1999; S. 18, 120)

8.2 Modellierung des Materialverhaltens eines magnetorheologischen Fluids unter dem Einfluss eines äußeren Magnetfeldes auf Basis des rCROSS-BINGHAM-HOOKE Elements

8.2.1 Qualitativer Modellierungsschritt – Entwicklung einer Modellstruktur

Um das Materialverhalten eines MRF unter dem Einfluss eines äußeren Magnetfeldes modellieren zu können, muss zunächst ein Materialmodell entwickelt werden, das in der Lage ist die qualitativen Eigenschaften sowohl der Fließkurven aus Abbildung 2.5(a) als auch der Speicher- und Verlustmoduli aus Abbildung 2.5(b) abbilden zu können. Im Gegensatz zu den ohne Einfluss eines äußeren Magnetfeldes gemessenen Verlustmoduli, besitzen die Verlustmoduli unter dem Einfluss eines äußeren Magnetfeldes ein ausgeprägtes Maximum. Nach einem Vorschlag von Laun et al. (2009) ist ein BINGHAM-HOOKE Element in der Lage dieses Maximum zu modellieren. Ein BINGHAM-HOOKE Element ist eine Reihenschaltung einer HOOKEschen Feder und einem BINGHAM Element (Boisly et al. 2017). Es ist allerdings nicht in der Lage

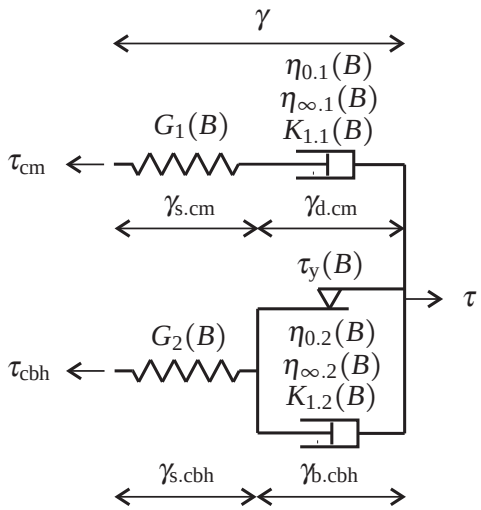


Abbildung 8.4: Rheologisches Modell auf Grundlage des rCROSS-BINGHAM-HOOKE Elements zur Modellierung des Materialverhaltens eines magnetorheologischen Fluids

das scherverdünnende Verhalten der Fließkurven aus Abbildung 2.5(a) zu modellieren. Deswegen wird der NEWTONsche Dämpfer des BINGHAM Elements durch einen rCROSS Dämpfer nach Boisly et al. (2015) ersetzt. Somit erhält man das in Abschnitt 5 eingeführte rCROSS-BINGHAM-HOOKE Element. Diesem wird das rCROSS-MAXWELL Element aus Abschnitt 8.1 parallel geschalten, sodass der viskoelastische Grenzfall für verschwindendes äußeres Magnetfeld im Gesamtmodell ebenfalls enthalten ist. Außerdem ist das Parallelschalten eines Teilmodells mit viskosen Eigenschaften zur Modellierung der viskoelastischen Eigenschaften des Vorfließbereichs notwendig. Das sich ergebende Gesamtmodell ist in Abbildung 8.4 dargestellt. Die qualitative Modellstruktur wird außerdem von Puzrin (2012; Abb. 21.13) untersucht. Infolge der rheologischen Schaltung aus Abbildung 8.4 ergeben sich die Gesamtspannung und Gesamtverzerrung zu

$$\tau = \tau_{\mathrm{cm}} + \tau_{\mathrm{cbh}} \tag{8.23}$$

$$\gamma = \gamma_{\mathrm{s.cm}} + \gamma_{\mathrm{d.cm}} = \gamma_{\mathrm{s.cbh}} + \gamma_{\mathrm{b.cbh}} \ . \tag{8.24}$$

Entsprechend des magnetorheologischen Effektes wird der Einfluss des Magnetfeldes über die von der magnetischen Induktion des äußeren Magnetfelds

$$B = |\mathbf{B}| = \sqrt{B_k B_k} \tag{8.25}$$

abhängigen Materialparameter eingearbeitet.

8.2.2 Quantitative Modellierung – Identifikation der Materialparameter

Im Folgenden werden die Materialparameter in einer definierten Reihenfolge auf Basis charakteristischer Punkte iterativ identifiziert. Auf die Anwendung eines rein mathematisch arbeitenden nichtlinearen Optimierungsalgorithmus kann daher vorerst verzichtet werden. Der Identifikationsprozess ist in zwei Blöcke unterteilt. Die Arbeitsschritte dieser beiden Blöcke werden solange wiederholt, bis ein zufriedenstellendes Modellierungsergebnis erzielt ist.

Identifizierung charakteristischer Punkte

Der in dieser Arbeit entwickelte Algorithmus zur Parameteridentifikation fußt auf der Auswertung charakteristischer Punkte sowohl der Fließkurve als auch Speicher- und Verlustmodul. Dazu werden die charakteristischen Punkte

- der Fließkurve des rCROSS-MAXWELL Elements, die identisch der Fließkurve des rCROSS Dämpfers aus Boisly et al. (2015; Absch. 4) ist,
- des MODE $\omega/2$ von Speicher- und Verlustmodul des rCROSS-MAXWELL Elements nach Boisly et al. (2015; Abb. 14),
- der Fließkurve des rCROSS-BINGHAM-HOOKE Elements aus Abbildung 5.4 und
- des MODE $\omega/1$ von Speicher- und Verlustmodul des rCROSS-BINGHAM-HOOKE Elements entsprechend Abbildung 5.12(a)

ausgewertet und den Messergebnissen aus Abbildung 2.5 zugeordnet. Somit kann beispielsweise die obere Grenze der Fließspannung nach Gleichung (7.1) mittels der dynamischen Fließspannung

$$\tau_\mathrm{y} \leq \tau_\mathrm{yd} \tag{8.26}$$

abgeschätzt werden. Der Extrapolationsoperator wird mithilfe des ersten und zweiten Messpunktes der Fließkurve, $\left(\dot{\tilde{\gamma}}_{i=1}, \tau_{\infty.\mathrm{meas}}^{i=1}\right)$ und $\left(\dot{\tilde{\gamma}}_{i=2}, \tau_{\infty.\mathrm{meas}}^{i=2}\right)$, definiert und man erhält

$$\tau_\mathrm{yd} = \mathrm{EXT}\left\{\underline{\tau}_{\infty.\mathrm{meas}}\left(\underline{\dot{\tilde{\gamma}}}\right)\right\} = \tau_{\infty.\mathrm{meas}}^{i=1} - \frac{\tau_{\infty.\mathrm{meas}}^{i=2} - \tau_{\infty.\mathrm{meas}}^{i=1}}{\dot{\tilde{\gamma}}_{i=2} - \dot{\tilde{\gamma}}_{i=1}} \dot{\tilde{\gamma}}_{i=1} \,. \tag{8.27}$$

Die Nullviskosität wird als differentielle Viskosität bestimmt und ergibt sich aus dem Differenzenquotienten

$$\eta_{0.\mathrm{meas}} = \frac{\tau_{\infty.\mathrm{meas}}^{i=2} - \tau_{\infty.\mathrm{meas}}^{i=1}}{\dot{\tilde{\gamma}}_{i=2} - \dot{\tilde{\gamma}}_{i=1}} \,. \tag{8.28}$$

Die Viskosität im Unendlichen wird ebenfalls als differentielle Viskosität mittels des Differenzenquotienten

$$\eta_{\infty.\mathrm{meas}} = \frac{\tau_{\infty.\mathrm{meas}}^{i=24} - \tau_{\infty.\mathrm{meas}}^{i=15}}{\dot{\tilde{\gamma}}_{i=24} - \dot{\tilde{\gamma}}_{i=15}} \tag{8.29}$$

abgeschätzt. Weitere charakteristische Punkte sind das Anfangsplateau des Speichermoduls

$$G'_\mathrm{pre} = G'_\mathrm{model}\left(\hat{\gamma} \leq \gamma_\mathrm{cr}\right) \tag{8.30}$$

und das Anfangsplateau des Verlustmoduls

$$G''_\mathrm{pre} = G''_\mathrm{model}\left(\hat{\gamma} \leq \gamma_\mathrm{cr}\right) \,. \tag{8.31}$$

Aufgrund der Tatsachse, dass die Messergebnisse im Vorfließbereich nicht exakt von der Schubverzerrungsamplitude unabhängig sind, ergibt sich für beide Parameter jeweils ein Gültigkeitsbereich

$$\mathrm{MIN}\{G'_\mathrm{pre}\} < G'_\mathrm{pre} < \mathrm{MAX}\{G'_\mathrm{pre}\} \tag{8.32}$$

$$\mathrm{MIN}\{G''_\mathrm{pre}\} < G''_\mathrm{pre} < \mathrm{MAX}\{G''_\mathrm{pre}\} \,. \tag{8.33}$$

Entsprechend den Ausführungen zum Amplitudensweep in Abschnitt 7.5 und Abbildung 5.12(a) kann die kritische Schubverzerrung γ_{cr} mittels des Abfalls des Speichermoduls ($\gamma_{cr}^{G'}$) oder über den Anstieg des Verlustmoduls ($\gamma_{cr}^{G''}$) abgeschätzt werden. Das Zweifache der kritischen Schubverzerrung kann nach Gleichung (5.64) ebenfalls über das Maximum des Verlustmoduls bestimmt werden. Auf diese Weise wird die charakteristische Schubverzerrung $\gamma_{max}^{G''}$ identifiziert. Somit ergibt sich für die kritische Schubverzerrung ein Gültigkeitsbereich

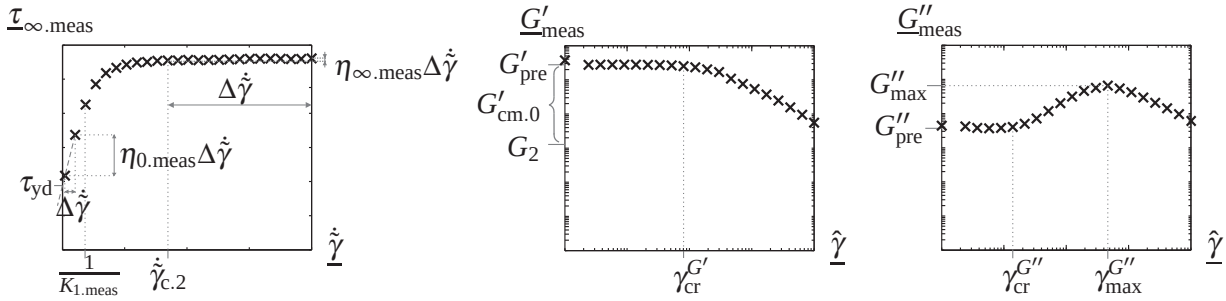
$$\gamma_{cr}^{min} \leq \gamma_{cr} \leq \gamma_{cr}^{max} \,. \tag{8.34}$$

Die obere und untere Grenze resultieren aus

$$\gamma_{cr}^{min} = \mathrm{MIN}\left\{\gamma_{cr}^{G'},\ \gamma_{cr}^{G''},\ \frac{\gamma_{max}^{G''}}{2}\right\} \tag{8.35}$$

$$\gamma_{cr}^{max} = \mathrm{MAX}\left\{\gamma_{cr}^{G'},\ \gamma_{cr}^{G''},\ \frac{\gamma_{max}^{G''}}{2}\right\} . \tag{8.36}$$

Zum besseren Verständnis sind die charakteristischen Punkte für die Messergebnisse bei $B = 300\,\mathrm{mT}$ in Abbildung 8.5 visualisiert. Die Identifizierung der charakteristischen Punkte erfolgt auf Grundlage der Messwerte in Abschnitt A.7. Daraus resultieren die in Tabelle 8.1 aufgeführten numerischen Werte.



(a) Fließkurve (linearer Maßstab) (b) Speichermodul (c) Verlustmodul

Abbildung 8.5: Charakteristische Punkte eines MRF mit $\Phi = 40\,\mathrm{vol\%}$ BASF^{TM} CIP CC Partikeln in der Trägerflüssigkeit MOTUL 300V; Messergebnisse aus Abbildung 2.5 bei $B = 300\,\mathrm{mT}$

Tabelle 8.1: Charakteristische Punkte eines MRF mit $\Phi = 40\,\mathrm{vol\%}$ BASF^{TM} CIP CC Partikeln in der Trägerflüssigkeit MOTUL 300V zu den Messergebnissen aus Abbildung 2.5 bei von Null verschiedenen Magnetfeldern

	$B = 50\mathrm{mT}$	$B = 150\mathrm{mT}$	$B = 300\mathrm{mT}$
τ_{yd} / Pa	$8.44 \cdot 10^{1}$	$1.82 \cdot 10^{3}$	$3.77 \cdot 10^{3}$
$\mathrm{MIN}\{G'_{pre}\}$ / Pa	$4.51 \cdot 10^{5}$	$1.70 \cdot 10^{6}$	$2.16 \cdot 10^{6}$
$\mathrm{MAX}\{G'_{pre}\}$ / Pa	$4.70 \cdot 10^{5}$	$1.82 \cdot 10^{6}$	$3.71 \cdot 10^{6}$
$\mathrm{MIN}\{G''_{pre}\}$ / Pa	$7.83 \cdot 10^{4}$	$8.61 \cdot 10^{4}$	$3.71 \cdot 10^{4}$
$\mathrm{MAX}\{G''_{pre}\}$ / Pa	$8.08 \cdot 10^{4}$	$1.18 \cdot 10^{5}$	$4.44 \cdot 10^{4}$
G''_{max} / Pa	$1.02 \cdot 10^{5}$	$3.85 \cdot 10^{5}$	$6.54 \cdot 10^{5}$
$\gamma_{cr}^{G'}$ / 1	$5.78 \cdot 10^{-5}$	$1.39 \cdot 10^{-4}$	$8.03 \cdot 10^{-4}$
$\gamma_{cr}^{G''}$ / 1	$3.73 \cdot 10^{-5}$	$8.96 \cdot 10^{-5}$	$2.15 \cdot 10^{-4}$
$\gamma_{max}^{G''}$ / 1	$2.15 \cdot 10^{-4}$	$8.03 \cdot 10^{-4}$	$4.64 \cdot 10^{-3}$
$\eta_{0.meas}$ / Pas	$1.07 \cdot 10^{4}$	$1.01 \cdot 10^{5}$	$5.79 \cdot 10^{5}$
$\frac{1}{K_{1.meas}}$ / $\frac{1}{s}$	0.015	0.003	0.004
$\eta_{\infty.meas}$ / Pas	$8.51 \cdot 10^{2}$	$2.62 \cdot 10^{3}$	$1.89 \cdot 10^{3}$

Erster Block zur Parameteridentifikation

Die Identifizierung der Materialparameter beginnt mit der Abschätzung des elastischen Moduls des rCROSS-BINGHAM-HOOKE Elements. Dazu wird der charakteristische Punkt nach Gleichung (5.63) ausgewertet. Man erhält die Beziehung

$$G_2 = \frac{\tau_\mathrm{y}}{\gamma_\mathrm{cr}} \,, \tag{8.37}$$

die in der ersten Iteration mit $\tau_\mathrm{y} = \tau_\mathrm{yd}$ aus Abbildung 8.5(a) und Tabelle 8.1 abgeschätzt wird. Da die kritische Schubverzerrung nach Gleichung (8.34) nicht eindeutig festgelegt ist, ergibt sich für den elastischen Modul der Gültigkeitsbereich

$$\boxed{G_2^{\min.\tau_\mathrm{yd}} \leq G_2 \leq G_2^{\max.\tau_\mathrm{yd}}} \tag{8.38}$$

mit

$$G_2^{\min.\tau_\mathrm{yd}} = \frac{\tau_\mathrm{yd}}{\gamma_\mathrm{cr}^{\max}} \tag{8.39}$$

$$G_2^{\max.\tau_\mathrm{yd}} = \frac{\tau_\mathrm{yd}}{\gamma_\mathrm{cr}^{\min}} \,. \tag{8.40}$$

Weil die Hauptstruktur des Gesamtmodells nach Abbildung 8.4 eine Parallelschaltung ist, ergibt sich $G''_\mathrm{model} = G''_\mathrm{cbh} + G''_\mathrm{cm}$ entsprechend Gleichung (2.8). Für den Grenzfall $[G''_\mathrm{cm} = 0] \;\rightarrow\; [G''_\mathrm{model} = G''_\mathrm{cbh}]$ und unter Berücksichtigung der Gleichungen (5.64) und (5.65) kann das Maximum des Verlustmoduls G''_max zur Bestimmung der oberen Grenze des elastischen Moduls

$$\boxed{G_2 \lesssim \left(G_2^{\max.G''} = G''_\mathrm{max}\,\pi\right)} \tag{8.41}$$

genutzt werden. Analog gilt nach Gleichung (2.7) für den Speichermodul

$$G'_\mathrm{pre} = G'_\mathrm{cbh.0} + G'_\mathrm{cm.0} \,. \tag{8.42}$$

Hierbei kann man unter Berücksichtigung von Gleichung (5.62)

$$G'_\mathrm{cbh.0} = G_2 \tag{8.43}$$

gleichsetzen. Somit ist für den Grenzfall $G'_\mathrm{cm.0} = 0$ die Ungleichung

$$\boxed{G_2 \lesssim \left(G_2^{\max.G'} = \mathrm{MAX}\{G'_\mathrm{pre}\}\right)} \tag{8.44}$$

gegeben. Sobald ein Wert für G_2 festgelegt wurde, können der elastische Modul und die Nullviskosität des rCROSS-MAXWELL Elements berechnet werden. Dazu werden Gleichungen (80) und (81) aus Boisly et al. (2015) nach den Materialparametern umgestellt. Analog zu Gleichungen (8.4) und (8.5) und mit

$$G'_\mathrm{cm.0} = G'_\mathrm{pre} - G_2 \tag{8.45}$$

$$G''_\mathrm{cm.0} = G''_\mathrm{pre} \tag{8.46}$$

erhält man

$$G_1 = \frac{\left(G''_\mathrm{cm.0}\right)^2 + \left(G'_\mathrm{cm.0}\right)^2}{G'_\mathrm{cm.0}} = \frac{\left(G''_\mathrm{pre}\right)^2 + \left(G'_\mathrm{pre} - G_2\right)^2}{G'_\mathrm{pre} - G_2} \tag{8.47}$$

$$\eta_{0.1} = \frac{\left(G''_\mathrm{cm.0}\right)^2 + \left(G'_\mathrm{cm.0}\right)^2}{\omega\, G''_\mathrm{cm.0}} = \frac{\left(G''_\mathrm{pre}\right)^2 + \left(G'_\mathrm{pre} - G_2\right)^2}{\omega\, G''_\mathrm{pre}} \,. \tag{8.48}$$

Aus letzterer Gleichung kann unter Berücksichtigung von $\eta_{0.1}\omega\, G''_\mathrm{pre} - \left(G''_\mathrm{pre}\right)^2 = \left(G'_\mathrm{pre} - G_2\right)^2 > 0$ abgeleitet werden. Es gilt

$$\eta_{0.1} > \frac{G''_\mathrm{pre}}{\omega} \,. \tag{8.49}$$

Zweiter Block zur Parameteridentifikation

In den folgenden Arbeitsschritten werden die viskosen Materialparameter identifiziert. Während der ersten Iteration wird die gesamte Nullviskosität

$$\eta_{0.\text{model}} = \eta_{0.1} + \eta_{0.2} \tag{8.50}$$

mittels der differentiellen Viskosität nach Gleichung (8.28), Abbildung 8.5(a) und Tabelle 8.1 approximiert, sodass $\eta_{0.\text{model}} = \eta_{0.\text{meas}}$. Somit kann die Nullviskosität des rCROSS-BINGHAM-HOOKE Elements unter Berücksichtigung von Gleichung (8.48) direkt berechnet werden, $\eta_{0.2} = \eta_{0.\text{meas}} - \eta_{0.1}$. Um $\eta_{0.2} > 0$ sicherzustellen, muss die Bedingung $\eta_{0.1} < \eta_0$ erfüllt sein. Um diese Forderung sicherzustellen, kann aus den Gleichungen (8.48) bis (8.46) für den Grenzfall $\eta_{0.2} = 0 \rightarrow \eta_{0.1} = \eta_{0.\text{model}}$ die Abschätzung

$$\boxed{G_2 \geq \left(G_2^{\text{min.}\eta_0} = G'_{\text{pre}} - \sqrt{\eta_{0.\text{model}}\,\omega\,G''_{\text{pre}} - \left(G''_{\text{pre}}\right)^2} \right)} \tag{8.51}$$

abgeleitet werden. Während der ersten Iteration wird diese Ungleichung für $\eta_{0.\text{model}} = \eta_{0.\text{meas}}$ ausgewertet. Ungleichung (8.51) ist im Vergleich zu Gleichungen (8.38), (8.41) und (8.44) eine verbindliche Forderung, die stets zu erfüllen ist, andernfalls ergeben sich physikalisch unzulässige Werte für $\eta_{0.2}$. Sollten im Gegensatz dazu die Gleichungen (8.38), (8.41) und (8.44) zur Abschätzung von G_2 nicht erfüllt sein, so würden sich die Modellvorhersagen allenfalls verschlechtern, aber die Minimalforderung nach physikalischer Sinnhaftigkeit wäre weiterhin gegeben. Im nächsten Schritt werden

$$K_{1.1} = K_{1.2} = \frac{1}{\frac{1}{K_{1.\text{model}}}} \tag{8.52}$$

bestimmt. In der ersten Iteration kann dies über die charakteristische Rate $\frac{1}{K_{1.\text{model}}} \approx \frac{1}{K_{1.\text{meas}}}$ aus Abbildung 8.5(a) und Tabelle 8.1 erfolgen. Die gesamte Viskosität im Unendlichen

$$\eta_{\infty.\text{model}} = \eta_{\infty.1} + \eta_{\infty.2} \tag{8.53}$$

wird auf beide Anteile gleichmäßig aufgeteilt, sodass

$$\eta_{\infty.1} = \eta_{\infty.2} = \frac{\eta_{\infty.\text{model}}}{2}\ . \tag{8.54}$$

Diese Wahl erfolgt willkürlich, da der Autor dieser Arbeit keine klaren Kriterien identifizieren konnte, welche die Art der additiven Aufteilung konkretisieren würden. Die gesamte Viskosität wird in der ersten Iteration mittels des Differenzenquotienten nach Gleichung (8.29), Abbildung 8.5(a) und Tabelle 8.1 als differentielle Viskosität bestimmt, sodass $\eta_{\infty.\text{model}} = \eta_{\infty.\text{meas}}$. Hinsichtlich der Parameteridentifikation besitzt die dynamische Viskosität keine praktische Relevanz. Daran erkennt man, dass die differentielle Viskosität ein sowohl vernünftiges als auch praktisch nützliches Maß darstellt (*Folgerung 12*).

Maßnahmen ab der zweiten Iteration des Identifikationsprozesses aufgrund von Abweichungen zwischen Modellvorhersagen und Messungen

Die Schritte der ersten beiden Blöcke des Identifikationsalgorithmus liefern nach der ersten Iteration nicht das „beste“ Modellierungsergebnis. Das ist darauf zurückzuführen, dass die Modellvorhersagen des zur Modellierung unterstellten Materialmodells nicht exakt mit den Messergebnissen übereinstimmen. Ziel der Parameteridentifikation ist es daher, denjenigen Parametersatz zu extrahieren für den die Abweichungen zwischen Messung und Modellvorhersage im Mittel minimal sind. Weil die Identifikationsstrategie auf Grundlage charakteristischer Punkte vorerst nicht zwingend auf die Anwendung einer rein mathematisch nichtlinearen Optimierungsstrategie angewiesen ist, kann die Einschätzung vom Erreichen des „bestmöglichen“ Modellierungsergebnisses nach eigenem Ermessen mittels „Augenmaß“ erfolgen. Diese Handhabe erspart die Implementierung eines objektiven Abbruchkriteriums. Jedoch unterliegt das Modellierungsergebnis infolgedessen subjektiven Einflüssen. (*Folgerung 5*)
Die Steuergrößen des iterativen Identifikationsprozesses sind die Fließspannung τ_y und die kritische

Tabelle 8.2: Obere und untere Grenzwerte des elastischen Moduls des rCROSS-BINGHAM-HOOKE Elements G_2 für die in Tabelle 8.1 aufgeführten Werte. Berechnungen auf Basis der dynamischen Fließspannung (Gleichungen (8.35), (8.36), (8.39) und (8.40)), des maximalen Verlustmoduls (Gleichung (8.41)), des maximalen Speichermoduls (Gleichung (8.44)) und der Nullviskosität (Gleichung (8.51))

	$B = 50\text{mT}$	$B = 150\text{mT}$	$B = 300\text{mT}$
$G_2^{\min.\tau_{yd}}$ / Pa	$7.84 \cdot 10^5$	$4.53 \cdot 10^6$	$1.62 \cdot 10^6$
$G_2^{\min.\eta_0}$ / Pa	$\in \mathbb{C}$	$1.53 \cdot 10^6$	$2.62 \cdot 10^6$
$G_2^{\max.\tau_{yd}}$ / Pa	$2.26 \cdot 10^6$	$2.03 \cdot 10^7$	$1.75 \cdot 10^7$
$G_2^{\max.G''}$ / Pa	$3.19 \cdot 10^5$	$1.21 \cdot 10^6$	$2.05 \cdot 10^6$
$G_2^{\max.G'}$ / Pa	$4.70 \cdot 10^5$	$1.82 \cdot 10^6$	$3.71 \cdot 10^6$

Tabelle 8.3: Werte für G'_{pre} und G''_{pre} zur Berechnung der in Tabelle 8.2 angegebenen Werte von $G_2^{\min.\eta_0}$

	$B = 50\text{mT}$	$B = 150\text{mT}$	$B = 300\text{mT}$
G'_{pre} / Pa	$4.6 \cdot 10^5$	$1.75 \cdot 10^6$	$3.0 \cdot 10^6$
G''_{pre} / Pa	$7.9 \cdot 10^4$	$8.9 \cdot 10^4$	$4.0 \cdot 10^4$

Schubverzerrung γ_{cr}. Da die beiden Parameter direkt mit dem elastischen Modul des rCROSS-BINGHAM-HOOKE Elements G_2 zusammenhängen, kann nach Gleichungen (8.38), (8.41), (8.44) und (8.51) eine Abschätzung für dessen oberen und unteren Grenzwert, $G_2^{\max}$ und $G_2^{\min}$, auf Grundlage der in Tabelle 8.1 aufgeführten Werte erfolgen. Die Ergebnisse sind in Tabelle 8.2 hinterlegt. Die Werte für $G_2^{\min.\eta_0}$ sind für die Nullviskosität $\eta_{0.\text{meas}}$ aus Tabelle 8.1 sowie für G'_{pre} und G''_{pre} aus Tabelle 8.3 berechnet.

Die Abschätzung $G_2^{\min.\eta_0}|_{B=50\,\text{mT}}$ liegt für den ersten Iterationsschritt in der Menge der komplexen Zahlen $\mathbb{C}$, da hierfür $\eta_{0.\text{model}}$ durch $\eta_{0.\text{meas}}$ entsprechend Tabelle 8.1 ersetzt wurde. Da jedoch $\eta_{0.\text{meas}}$ so klein ist, dass $\eta_{0.\text{meas}}\,\omega\,G''_{\text{pre}} < \left(G''_{\text{pre}}\right)^2$, ergibt sich für den ersten Iterationsschritt, d.h. $\eta_{0.\text{model}} = \eta_{0.\text{meas}}$, nach Gleichung (8.51) eine komplexe Zahl. Folglich ist $\eta_{0.\text{meas}}|_{B=50\,\text{mT}}$ zu klein, um $\eta_{0.\text{model}}|_{B=50\,\text{mT}}$ zu parametrisieren. Das ist ebenfalls daran zu erkennen, dass Gleichung (8.49) für den Grenzfall $\eta_{0.1}|_{B=50\,\text{mT}} = \eta_{0.\text{meas}}|_{B=50\,\text{mT}}$ nicht erfüllt ist. Um physikalische Zulässigkeit zu gewährleisten, muss dieses Problem behoben werden. Dazu wird die Summe $\eta_{0.1} + \eta_{0.2} = \eta_{0.\text{model}}$ in Gleichung (8.51) größer gewählt als $\eta_{0.\text{meas}}$ aus Tabelle 8.1. Infolge von

$$\eta_{0.\text{model}} > \eta_{0.\text{meas}} \tag{8.55}$$

sinkt die Abschätzung für $G_2^{\min.\eta_0}$. Die Abhängigkeit $G_2^{\min.\eta_0} = f(\eta_{0.1} + \eta_{0.2})$ ist exemplarisch für $B = 300\,\text{mT}$ in Abbildung 8.6 dargestellt. Dafür sind G'_{pre} und G''_{pre} aus Tabelle 8.3 sowie die Kreisfrequenz

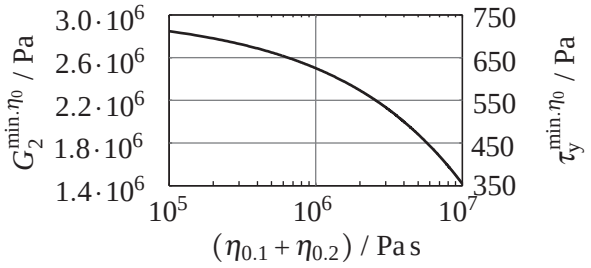


Abbildung 8.6: $G_2^{\min.\eta_0}$ in Abhängigkeit von $(\eta_{0.1} + \eta_{0.2})$ nach Gleichung (8.51) unter Verwendung von G'_{pre} und G''_{pre} aus Tabelle 8.3 sowie $\omega = 2\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$; Die kritische Schubverzerrung $\gamma_{\text{cr}} = 2 \cdot 10^{-4}$ wurde angenommen, um $\tau_{\text{y}}^{\min.\eta_0}$ zu berechnen.

$\omega = 2\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$ entsprechend den Messergebnissen aus Abbildung 2.5(b) zugrunde gelegt. Dass die Summen der Nullviskositäten $\eta_{0.\text{model}}$ ebenfalls für $B = 150\,\text{mT}$ und $B = 300\,\text{mT}$ über die entsprechenden Werte

$\eta_{0.\mathrm{meas}}$ aus Tabelle 8.1 erhöht werden müssen, sieht man daran, dass für diese beiden Magnetfelder in der ersten Iteration $G_2^{\max.G''} < G_2^{\min.\eta_0}$ gilt. Auch dies wird durch die Erhöhung von $\eta_{0.\mathrm{model}}$ korrigiert, da es nach Gleichung (8.51) ebenso ein Absenken von $G_2^{\min.\eta_0}$ bewirkt.

Um bei angehobener Nullviskosität die Modellvorhersage der Fließkurve nicht wesentlich zu verschlechtern, muss die Fließspannung gesenkt werden. Dies ist in Abbildung 8.7 schematisch dargestellt. Würde man lediglich die Nullviskosität $\eta_{0.\mathrm{model}}$ über den Wert $\eta_{0.\mathrm{meas}}$ anheben, ohne die Fließspannung

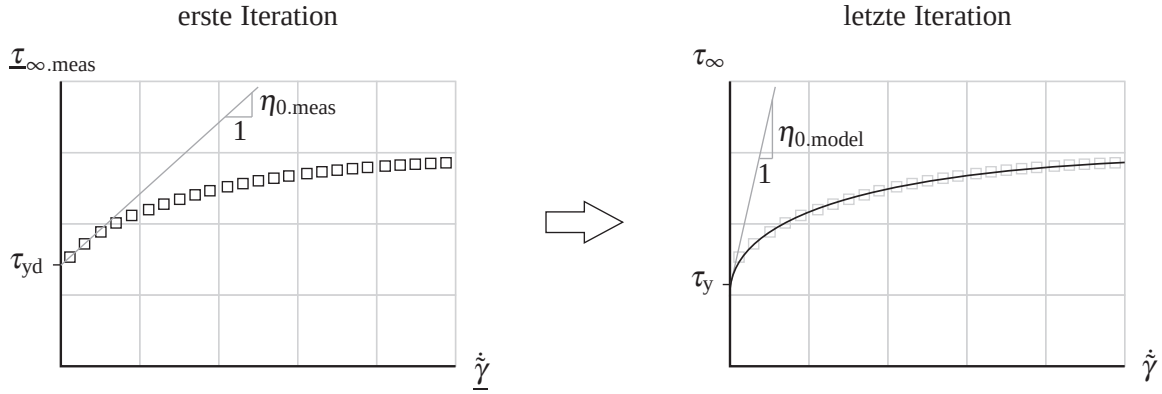


Abbildung 8.7: Modifikation der Nullviskosität und Fließspannung während des iterativen Identifikationsalgorithmus um physikalische Zulässigkeit zu gewährleisten: Anheben der Nullviskosität von $\eta_{0.\mathrm{meas}}$ auf $\eta_{0.\mathrm{model}}$; Absenken der Fließspannung von τ_{yd} auf τ_{y}.

zu verringern, so läge die Modellvorhersage der Fließkurve über der Messung. Die Verringerung der Fließspannung motiviert sich außerdem aus Gleichung (8.37) unter Berücksichtigung einer konstant gehaltenen kritischen Schubverzerrung γ_{cr}. Infolge des Absenkens des elastischen Moduls G_2, verringert sich die untere Grenze der Fließspannung auf

$$\tau_{\mathrm{y}}^{\min.\eta_0} = G_2^{\min.\eta_0}\,\gamma_{\mathrm{cr}}\ . \tag{8.56}$$

Das Konstanthalten der kritischen Schubverzerrung ist notwendig, um die Lage des Maximums des Verlustmoduls entsprechend Gleichung (5.64) nicht zu verändern. Die Abhängigkeit $\tau_{\mathrm{y}}^{\min.\eta_0} = f(\eta_{0.1} + \eta_{0.2})$ ist in Abbildung 8.6 an der rechten Achse aufgetragen. Dass für $B = 50\,\mathrm{mT}$ und $B = 150\,\mathrm{mT}$ eine Verringerung der Fließspannung notwendig ist, deuten ebenfalls die Relationen $G_2^{\min.\tau_{\mathrm{yd}}} > G_2^{\max.G''}$ und $G_2^{\min.\tau_{\mathrm{yd}}} > G_2^{\max.G'}$ aus Tabelle 8.2 an. Das Absenken der Fließspannung stellt somit auch sicher, dass die untere Grenze $G_2^{\min.\tau_{\mathrm{yd}}}$ unterhalb der beiden oberen Grenzen $G_2^{\max.G''}$ und $G_2^{\max.G'}$ liegen kann.
Abschließend kann man festhalten, dass sich die Notwendigkeit der Verringerung der Fließspannung direkt als Folge der Modellierung der Fließkurven unter Berücksichtigung von $\eta_{0.\mathrm{model}} = \eta_{0.1} + \eta_{0.2} > \eta_{0.\mathrm{meas}}$, aber auch als Folge des abgesenkten $G_2^{\min.\eta_0}$ ergibt, welches wiederum nach Gleichung (8.51) ebenfalls auf die Erhöhung der Nullviskosität zurückzuführen ist.

Eine weitere Konsequenz der Anhebung der Nullviskosität und Absenkung der Fließspannung ist das Anheben der Materialparameter $K_{1.1} = K_{1.2} = K_{1.\mathrm{model}}$, ausgehend von dem in Tabelle 8.1 identifizierten Wert $K_{1.\mathrm{meas}}$, auf

$$K_{1.\mathrm{model}} > K_{1.\mathrm{meas}}\ . \tag{8.57}$$

Abschließend ergibt sich die Nullviskosität $\eta_{0.2} = \eta_{0.\mathrm{model}} - \eta_{0.1}$ aus Gleichung (8.50), sodass

$$\eta_{0.2} \quad \leftrightarrow \quad \tau_\infty\left(\dot{\gamma} < \frac{1}{K_1}\right) \approx \underline{\tau}_{\infty.\mathrm{meas}}\left(\dot{\underline{\gamma}} < \frac{1}{K_1}\right)\ . \tag{8.58}$$

Dieser Iterationsalgorithmus wird solange durchgeführt bis zufriedenstellende Modellvorhersagen erreicht sind. Ab der zweiten Iteration werden τ_{yd}, $\eta_{0.\mathrm{meas}}$, $\frac{1}{K_{1.\mathrm{meas}}}$ und $\eta_{\infty.\mathrm{meas}}$ aus Abbildung 8.5(a) und Tabelle 8.1 durch τ_{y}, $\eta_{0.\mathrm{model}}$, $\frac{1}{K_{1.\mathrm{model}}}$ und $\eta_{\infty.\mathrm{model}}$ ersetzt, welche bis zur letzten Iteration variiert werden. Der Iterationsablauf ist in übersichtlicher Darstellung in Abbildung 8.8 aufgeführt.

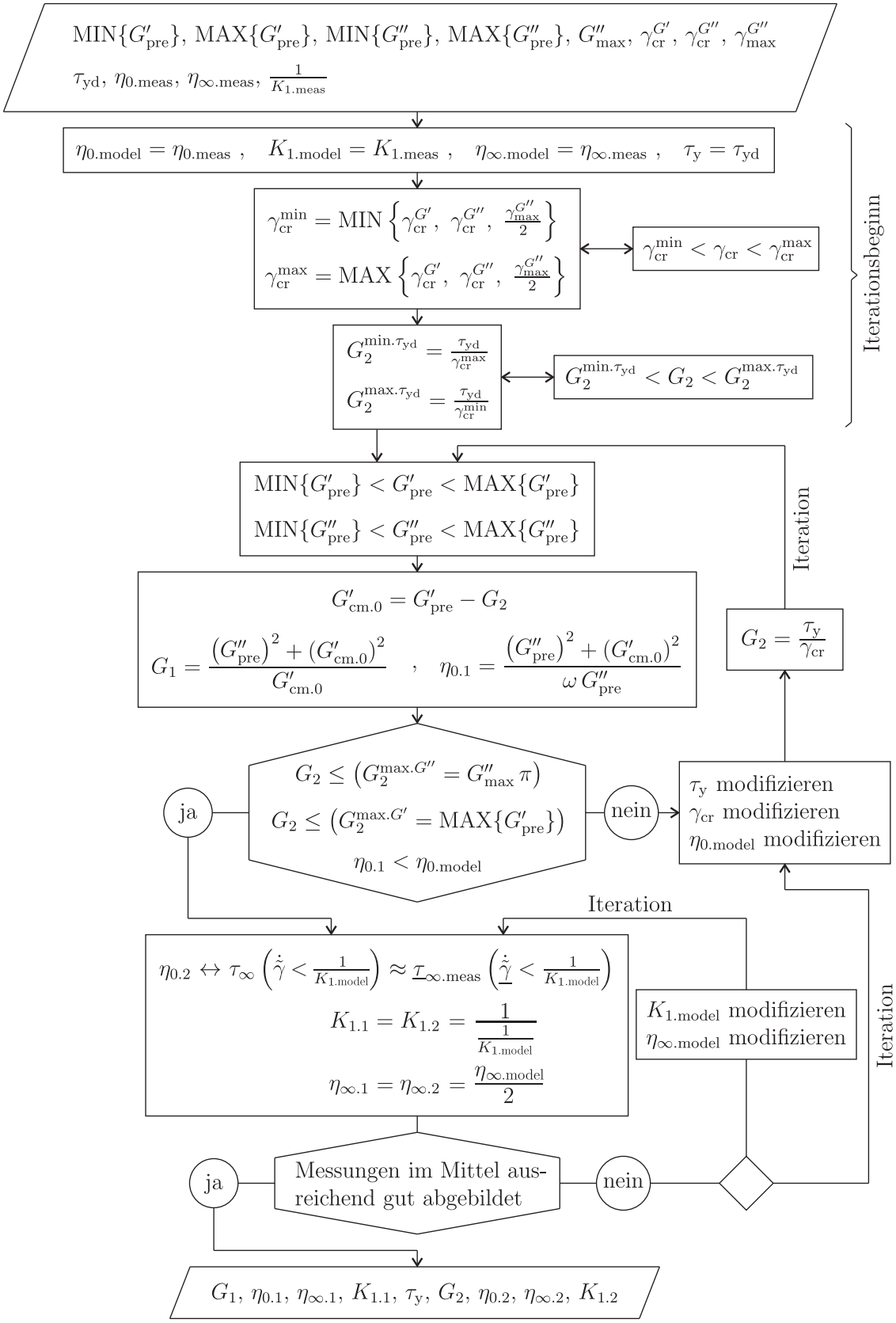


Abbildung 8.8: Iterativer Identifikationsalgorithmus zur Bestimmung der Materialparameter des Materialmodells nach Abbildung 8.4

Modellierungsergebnis und abschließende Bemerkungen

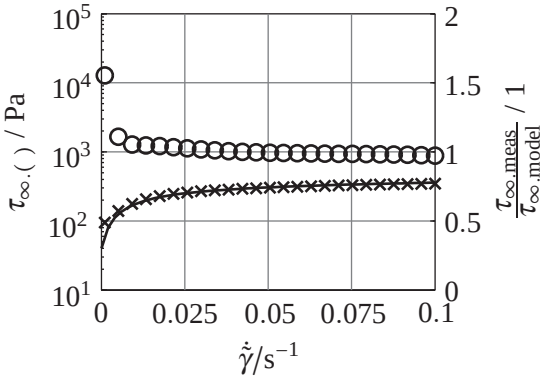
Abschließend sind die identifizierten Parameter des Gesamtmodells nach Abbildung 8.8 in Tabelle 8.4 zusammengefasst. Um physikalisch plausible Materialparameter sicherzustellen, ist zum einen der identifizierte Wert der Fließspannung kleiner als derjenige in Tabelle 8.1. Zum anderen ist die Nullviskosität größer als der in Tabelle 8.1 identifizierte Wert. Deshalb sind, wenngleich nicht signifikant, ebenfalls $K_{1.1} = K_{1.2}$ größer als der Wert von K_1 aus Tabelle 8.1. Die Summe der Viskositäten im Unendlichen ist ebenfalls in der selben Größenordnung wie der identifizierte Wert für η_∞. Die Werte der charakteristischen Punkte aus Tabelle 8.1 konnten also im Wesentlichen in guter Näherung eingehalten werden.
Da der iterative Prozess zur Parameteridentifikation manuell mittels „Augenmaß“ beendet wurde, unterliegt das Modellierungsergebnis subjektiven Einflüssen. Der identifizierte Parametersatz stellt somit ein „subjektiv optimales“ Modellierungsergebnis dar. Ist das Ziel, „objektiv optimale“ Modellierungsergebnisse nachzuweisen, muss in folgenden Arbeiten ein quantifizierbares Abbruchkriterium, z.B. auf Basis der Minimierung der Fehlerquadrate, implementiert werden.

Tabelle 8.4: Identifizierte Materialparameter des Materialmodells aus Parallelschaltung eines rCROSS-BINGHAM-HOOKE und rCROSS-MAXWELL Elements nach Abbildung 8.8

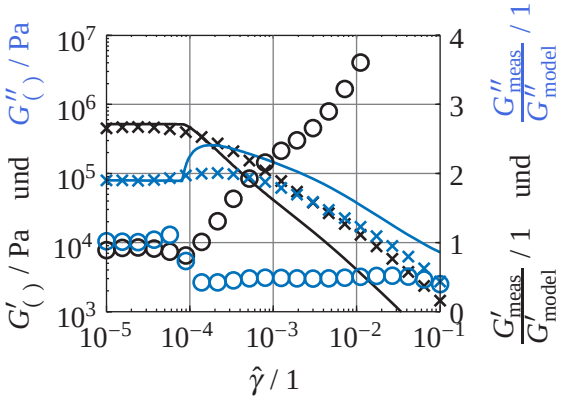
	$B = 50\,\mathrm{mT}$	$B = 150\,\mathrm{mT}$	$B = 300\,\mathrm{mT}$
G_1 / Pa	$3.0 \cdot 10^5$	$1.97 \cdot 10^5$	$1.13 \cdot 10^5$
$\eta_{0.1}$ / Pa s	$1.38 \cdot 10^4$	$2.03 \cdot 10^4$	$8.02 \cdot 10^3$
$\eta_{\infty.1}$ / Pa s	230	500	940
$K_{1.1}$ / s	72	340	305
τ_y / Pa	40	450	600
G_2 / Pa	$4.94 \cdot 10^5$	$2.31 \cdot 10^6$	$3.06 \cdot 10^6$
$\eta_{0.2}$ / Pa s	$9.0 \cdot 10^3$	$8.68 \cdot 10^5$	$3.36 \cdot 10^6$
$\eta_{\infty.2}$ / Pa s	230	500	940
$K_{1.2}$ / s	72	340	305

8.2.3 Vergleich der Messungen mit Modellvorhersagen

Folgend werden die Messergebnisse für das Magnetfeld $B = 50\,\mathrm{mT}$ in Abbildung 8.9 mit den Modellvorhersagen verglichen. In Abbildung 8.9(a) ist zu erkennen, dass die Fließkurve sehr gut modelliert wird. Lediglich die Messpunkte der „kleineren“ Verzerrungsraten sind unwesentlich unterbestimmt. Dieser



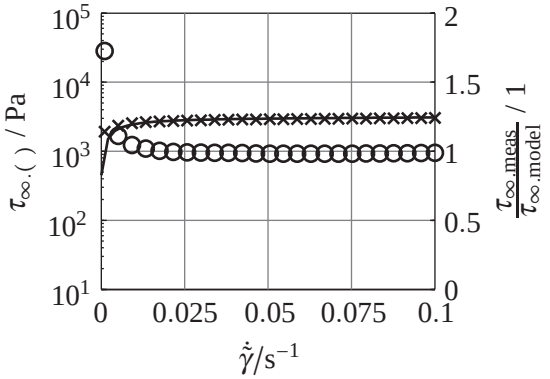
(a) Fließkurve $\underline{\tau}_{\infty.\mathrm{meas}}$: xxx, $\tau_{\infty.\mathrm{model}}$: —— und $\frac{\tau_{\infty.\mathrm{meas}}}{\tau_{\infty.\mathrm{model}}}$: ooo



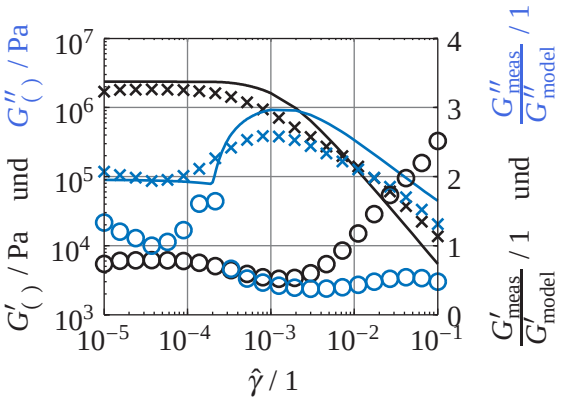
(b) Speicher- und Verlustmodul $\underline{G}'_{\mathrm{meas}}$: xxx, G'_{model}: ——, $\frac{G'_{\mathrm{meas}}}{G'_{\mathrm{model}}}$: ooo, $\underline{G}''_{\mathrm{meas}}$: xxx, G''_{model}: —— und $\frac{G''_{\mathrm{meas}}}{G''_{\mathrm{model}}}$: ooo für $\omega = 2\pi\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}$

Abbildung 8.9: Modellvorhersage des rCROSS-BINGHAM-HOOKE Element basierten Gesamtmodells aus Abbildung 8.4 mit $G_1 = 3.0 \cdot 10^5\,\mathrm{Pa}$, $\eta_{0.1} = 1.38 \cdot 10^4\,\mathrm{Pas}$, $\eta_{\infty.1} = 230\,\mathrm{Pas}$, $K_{1.1} = 72\,\mathrm{s}$, $\tau_\mathrm{y} = 40\,\mathrm{Pa}$, $G_2 = 4.94 \cdot 10^5\,\mathrm{Pa}$, $\eta_{0.2} = 9.0 \cdot 10^3\,\mathrm{Pas}$, $\eta_{\infty.2} = 230\,\mathrm{Pas}$ und $K_{1.2} = 72\,\mathrm{s}$ nach Tabelle 8.4, im Vergleich zu Messergebnissen eines MRF bestehend aus $\Phi = 40\,\mathrm{vol\%}$ BASF$^{\mathrm{TM}}$ CIP CC Partikeln in der Trägerflüssigkeit MOTUL 300V (Abschnitt 8.1) bei $B = 50\mathrm{mT}$.

Sachverhalt ist darauf zurückzuführen, dass die Fließspannung τ_y kleiner ist als die aus den Messwerten ermittelte dynamische Fließspannung τ_yd. Die Modellvorhersagen für Speicher- und Verlustmodul sind in Abbildung 8.9(b) dargestellt. Dass der Vorfließbereich sehr gut modelliert wird, ist darauf zurückzuführen, dass er ein von der Schubverzerrung unabhängiges Plateau ist und dessen Messwerte für Speicher- und Verlustmodul direkt in die Parameteridentifikation einfließen.



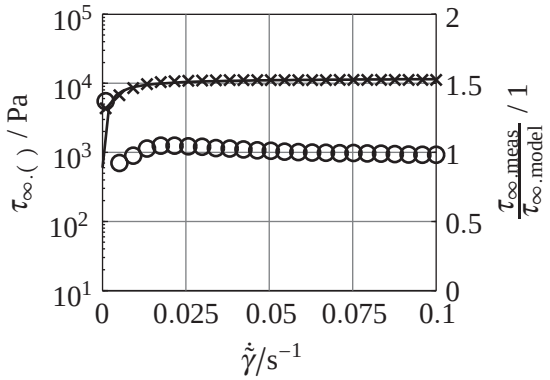
(a) Fließkurve $\underline{\tau}_{\infty.\mathrm{meas}}$: xxx, $\tau_{\infty.\mathrm{model}}$: —— und $\frac{\tau_{\infty.\mathrm{meas}}}{\tau_{\infty.\mathrm{model}}}$: ooo



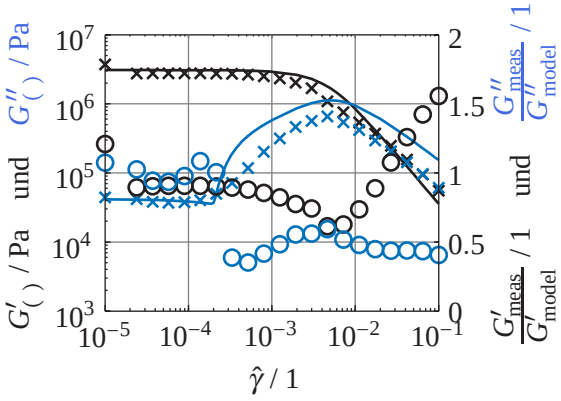
(b) Speicher- und Verlustmodul $\underline{G}'_{\mathrm{meas}}$: xxx, G'_{model}: ——, $\frac{G'_{\mathrm{meas}}}{G'_{\mathrm{model}}}$: ooo, $\underline{G}''_{\mathrm{meas}}$: xxx, G''_{model}: —— und $\frac{G''_{\mathrm{meas}}}{G''_{\mathrm{model}}}$: ooo für $\omega = 2\pi\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}$

Abbildung 8.10: Modellvorhersage des rCROSS-BINGHAM-HOOKE Element basierten Gesamtmodells aus Abbildung 8.4 mit $G_1 = 1.97 \cdot 10^5\,\mathrm{Pa}$, $\eta_{0.1} = 2.03 \cdot 10^4\,\mathrm{Pas}$, $\eta_{\infty.1} = 500\,\mathrm{Pas}$, $K_{1.1} = 340\,\mathrm{s}$, $\tau_\mathrm{y} = 450\,\mathrm{Pa}$, $G_2 = 2.31 \cdot 10^6\,\mathrm{Pa}$, $\eta_{0.2} = 8.68 \cdot 10^5\,\mathrm{Pas}$, $\eta_{\infty.2} = 500\,\mathrm{Pas}$ und $K_{1.2} = 340\,\mathrm{s}$ nach Tabelle 8.4, im Vergleich zu Messergebnissen eines MRF bestehend aus $\Phi = 40\,\mathrm{vol\%}$ BASF$^{\mathrm{TM}}$ CIP CC Partikeln in der Trägerflüssigkeit MOTUL 300V (Abschnitt 8.1) bei $B = 150\mathrm{mT}$.

Im Gegensatz dazu ist der Nachfließbereich von der Schubverzerrungsamplitude abhängig und der Kurvenverlauf geht nicht in die Parameteridentifikation ein. Unter Berücksichtigung dieser Umstände sind die Modellvorhersagen im Nachfließbereich akzeptabel. Die Absolutwerte der Modellvorhersage des Verlustmoduls sind circa das Zweifache der Messergebnisse. Das qualitative Verhalten wird hingegen sehr gut erfasst. Diejenigen Messpunkte des Speichermoduls, deren Verhältnis $G'_{\text{meas}}/G'_{\text{model}}$ größer als Vier ist, sind in Abbildung 8.9(b) nicht dargestellt. Um das Maximum des Verlustmoduls den gemessenen Werten wei-



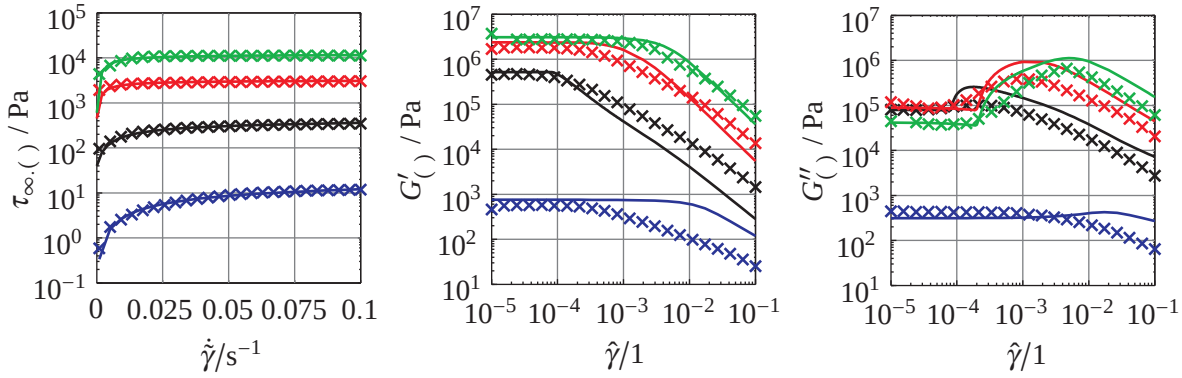
(a) Fließkurve $\underline{\tau}_{\infty.\text{meas}}$: xxx, $\tau_{\infty.\text{model}}$: —— und $\frac{\tau_{\infty.\text{meas}}}{\tau_{\infty.\text{model}}}$: ooo



(b) Speicher- und Verlustmodul $\underline{G}'_{\text{meas}}$: xxx, G'_{model}: ——, $\frac{G'_{\text{meas}}}{G'_{\text{model}}}$: ooo, $\underline{G}''_{\text{meas}}$: xxx, G''_{model}: —— und $\frac{G''_{\text{meas}}}{G''_{\text{model}}}$: ooo für $\omega = 2\pi\frac{\text{rad}}{\text{s}}$

Abbildung 8.11: Modellvorhersage des rCROSS-BINGHAM-HOOKE Element basierten Gesamtmodells aus Abbildung 8.4 mit $G_1 = 1.13 \cdot 10^5\,\text{Pa}$, $\eta_{0.1} = 8.02 \cdot 10^3\,\text{Pas}$, $\eta_{\infty.1} = 940\,\text{Pas}$, $K_{1.1} = 305\,\text{s}$, $\tau_\text{y} = 600\,\text{Pa}$, $G_2 = 3.06 \cdot 10^6\,\text{Pa}$, $\eta_{0.2} = 3.36 \cdot 10^6\,\text{Pas}$, $\eta_{\infty.2} = 940\,\text{Pas}$ und $K_{1.2} = 305\,\text{s}$ nach Tabelle 8.4, im Vergleich zu Messergebnissen eines MRF bestehend aus $\Phi = 40\,\text{vol\%}$ BASF$^\text{TM}$ CIP CC Partikeln in der Trägerflüssigkeit MOTUL 300V (Abschnitt 8.1) bei $B = 300\text{mT}$.

ter anzunähern, ist es erforderlich den Einfluss des rCROSS-MAXWELL Elements gegenüber dem Einfluss des rCROSS-BINGHAM-HOOKE Elements zu stärken. Dafür müssen die Beträge der Materialparameter des rCROSS-BINGHAM-HOOKE Elements verringert werden, was sich wiederum negativ auf die Modellierung der Fließkurve auswirkt. An dieser Stelle wird jedoch der Fokus auf eine bestmögliche Modellierung der Fließkurve gelegt. Die entsprechenden Graphen für $B = 150\,\text{mT}$ sind in Abbildung 8.10 aufgetragen. Die Fließkurve wird sehr gut modelliert. Die Werte des Qualitätskriteriums $\tau_{\infty.\text{meas}}/\tau_{\infty.\text{model}}$ sind ähnlich gut wie die aus Abbildung 8.9(a). Es ist nahezu für jeden Messpunkt gleich Eins. Die Modellvorhersagen für



(a) Fließkurve $\underline{\tau}_{\infty.\text{meas}}$: xxx und $\tau_{\infty.\text{model}}$: —— (b) Speichermoduli $\underline{G}'_{\text{meas}}$: xxx und G'_{model}: —— (c) Verlustmoduli $\underline{G}''_{\text{meas}}$: xxx und G''_{model}: ——

Abbildung 8.12: Modellvorhersage des rCROSS-BINGHAM-HOOKE Element basierten Gesamtmodells aus Abbildung 8.4, im Vergleich zu Messergebnissen bei $B = 0\text{mT}$ ——, $B = 50\text{mT}$ ——, $B = 150\text{mT}$ —— und $B = 300\text{mT}$ —— eines MRF bestehend aus $\Phi = 40\,\text{vol\%}$ BASF$^\text{TM}$ CIP CC Partikeln in der Trägerflüssigkeit MOTUL 300V (Abschnitt 8.1). Materialparameter entsprechend Tabelle 8.4.

Speicher- und Verlustmodul sind in Abbildung 8.10(b) dargestellt. Das Qualitätskriterium des Verlustmoduls $G''_{\text{meas}}/G''_{\text{model}}$ ist vergleichbar mit dem für $B = 50\,\text{mT}$ aus Abbildung 8.9(b): Im Vorfließbereich ist es nahe Eins und im Nachfließbereich im Bereich von 0.5. Da das Qualitätskriterium für den Speichermodul, $G'_{\text{meas}}/G'_{\text{model}}$, jedoch für alle Messpunkte kleiner als Drei ist, liegen die Modellvorhersagen näher an den Messergebnissen als es für $B = 50\,\text{mT}$ der Fall ist.
In Abbildung 8.11 sind die Modellierungsergebnisse für $B = 300\text{mT}$ präsentiert. Die Modellvorhersagen für Fließkurve und Verlustmodul sind ähnlich gut wie die für $B = 50\,\text{mT}$ und $B = 150\,\text{mT}$. Für den Speichermodul kann eine Verbesserung der Modellierungsgüte, im Vergleich zu den Modellvorhersagen für $B = 150\,\text{mT}$, festgestellt werden, da $G'_{\text{meas}}/G'_{\text{model}}$ unterhalb von 1.5 liegt. Abschließend sind die Modellvorhersagen aller Magnetfelder, einschließlich für $B = 0\,\text{mT}$, in Abbildung 8.1.2 in Relation zu den Messergebnissen dargestellt.

8.3 Modellierung des Materialverhaltens eines magnetorheologischen Fluids unter dem Einfluss eines äußeren Magnetfelds auf Basis des PRANDTL Elements

8.3.1 Qualitativer Modellierungsschritt – Entwicklung einer Modellstruktur

Anhand der in Boisly et al. (2014b; Abb. 4) vorgestellten Modellvorhersagen des PRANDTL Elements kann geschlussfolgert werden, dass es in der Lage ist, das ausgeprägte Maximum des Verlustmoduls abzubilden. Dies motiviert ein Gesamtmodell auf Basis des PRANDTL Elements, mit dem Ziel die Messergebnisse von Abbildung 2.5 mithilfe eines alternativen phänomenologischen Ansatzes zu modellieren. In diesem Sinn wird das rCROSS-BINGHAM-HOOKE Element aus Abbildung 8.4 durch das PRANDTL Element ersetzt.

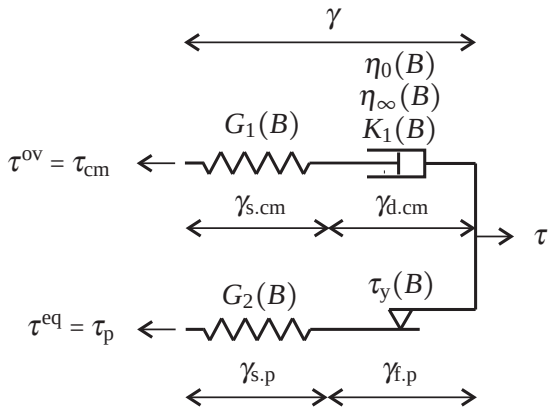


Abbildung 8.13: Rheologisches Modell auf Grundlage des PRANDTL Elements zur Modellierung des Materialverhaltens eines magnetorheologischen Fluids

Als Resultat ergibt sich die Flüssigkeit mit Fließspannung aus Abbildung 8.13. Analog zu Abschnitt 8.2 wird dem magnetorheologischen Effekt durch die Abhängigkeit der Materialparameter vom Magnetfeld Rechnung getragen. Die qualitative Modellstruktur wird ebenfalls bei Krawietz (1986; Abb. 2.16), Keck (1998; Abb. 4.6), Kaleta et al. (2007; Abb. 2) und Puzrin (2012; Abb. 21.12) verwendet. Die Gesamtspannung und Gesamtverzerrung setzen sich zusammen aus

$$\tau = \tau_{\text{cm}} + \tau_{\text{p}} \tag{8.59}$$

$$\gamma = \gamma_{\text{s.cm}} + \gamma_{\text{d.cm}} = \gamma_{\text{s.p}} + \gamma_{\text{f.p}}\ . \tag{8.60}$$

Entsprechend den Gleichungen (8.1a) bis (8.1c), werden die scherverdünnenden Eigenschaften durch das rCROSS-MAXWELL Element beschrieben, welches zugleich die ratenabhängigen Eigenschaften der Überspannung $\tau^{\text{ov}} = \tau_{\text{cm}}$ definiert. Weil die Spannung des PRANDTL Elements (Boisly et al. 2014b; S. 4)

$$\tau_{\text{p}} = G\,\gamma_{\text{s.p}} \tag{8.61a}$$

$$\tau_{\text{p}} = \tau_{\text{y}}\,\widetilde{\text{sign}}(\dot{\gamma}_{\text{f.p}}) \tag{8.61b}$$

ratenunabhängig ist, definiert sie die Gleichgewichtsspannung $\tau^{\mathrm{eq}} = \tau_{\mathrm{p}}$. Die $\widetilde{\mathrm{sign}}$ Funktion ist eingeführt als (Boisly et al. 2014b; Gl. 15)

$$\widetilde{\mathrm{sign}}\,(x) = \begin{cases} -1 & : \quad x < 0 & \text{(8.62a)} \\ \xi & : \quad x = 0 \quad \text{mit } -1 < \xi < 1 & \text{(8.62b)} \\ 1 & : \quad x > 0\,. & \text{(8.62c)} \end{cases}$$

Analog zum Reibelement nach Boisly et al. (2014a; Gl. (10)) ist ξ durch Gleichungen (8.61a) und (8.61b) festgelegt und berücksichtigt $-\tau_{\mathrm{y}} < \tau_{\mathrm{p}} < \tau_{\mathrm{y}}$ wenn $\dot{\gamma}_{\mathrm{f.p}} = 0$ (Giesekus 1994; S. 213). Die innere Variable vom Verzerrungstyp $\gamma_{\mathrm{f.p}}$ entwickelt sich im Nachfließbereich entsprechend der Beziehung

$$\dot{\gamma}_{\mathrm{f.p}} = |\dot{\gamma}|\,\mathrm{sign}(\tau_{\mathrm{p}}) \qquad \text{wenn } \; F = 0 \text{ und } \dot{F} = 0\,. \tag{8.63}$$

Die Entwicklungsgleichung ist in Boisly et al. (2014b; Gl. (21)) unter Verwendung der Fließfunktion [3]

$$F(\tau_{\mathrm{p}}) = |\tau_{\mathrm{p}}| - \tau_{\mathrm{y}} \tag{8.64}$$

mittels der Auswertung der assoziierten Fließregel [4], den KARUSH-KUHN-TUCKER Bedingungen [5] und der Konsistenzbedingung [6] hergeleitet.

8.3.2 Quantitative Modellierung – Identifikation der Materialparameter

Identifizierung charakteristischer Punkte

Der Algorithmus zur Identifikation der Materialparameter des auf dem PRANDTL Element basierenden Gesamtmodells ist nahezu vergleichbar mit dem aus Abschnitt 8.2.2. Eine unwesentliche Änderung gegenüber dem auf dem rCROSS-BINGHAM-HOOKE Element basierenden Gesamtmodell resultiert aus der Tatsache, dass die scherverdünnenden Eigenschaften nun ausschließlich über das rCROSS-MAXWELL Element eingearbeitet werden. Daher gelten auch hier die charakteristischen Punkte aus Abbildung 8.5, Tabelle 8.1 sowie Gleichungen (8.26) bis (8.36).

Erster Block zur Parameteridentifikation

Wird in den Gleichungen (8.42) und (8.43) die Größe $G'_{\mathrm{cbh.0}}$ durch $G'_{\mathrm{p.0}}$ ersetzt, kann der erste Block zur Identifikationsprozedur des auf dem rCROSS-BINGHAM-HOOKE Element basierten Gesamtmodells auch hier angewendet werden. In diesem Sinn werden Gleichungen (8.37) bis (8.46) ebenfalls für das PRANDTL Element basierte Gesamtmodell ausgewertet.

Zweiter Block zur Parameteridentifikation

Die Identifizierung der viskosen Modellparameter unterscheidet sich von Abschnitt 8.2.2, weil die scherverdünnenden Eigenschaften hier ausschließlich durch das rCROSS-MAXWELL Element modelliert werden. Die additive Aufteilung von η_0 und η_∞, wie sie in den Gleichungen (8.50) und (8.53) für das rCROSS-BINGHAM-HOOKE Element auftritt, entfällt somit. Infolgedessen besitzt $G_2^{\mathrm{min.}\eta_0}$ für das

[3] (Haupt 2002; S. 227, 231), (Houlsby und Puzrin 2006; S. 18), (Lubliner 2008; S. 112), (Sedlacek 2009; S. 53), (Boisly et al. 2014b), (Boisly et al. 2014a)

[4] (Backhaus 1983; S. 252), (Kreißig 1992; S. 45), (Miehe 1992; S. 11, 14), (Haupt 1993; S. 144), (Lemaitre und Chaboche 1994; S. 195), (Altenbach 1994; S. 216), (Khan und Huang 1995; S. 144), (Kaliske 1995; S. 105), (Simo und Hughes 2000; S. 8, 81), (Kuhl 2000; S. 19), (Wriggers 2001; S. 57), (Haupt 2002; S. 451, 453, 461, 479, 483), (Hörmann 2002; S. 30), (Ottosen 2005; S. 233), (Leukart 2005; S. 23), (Houlsby und Puzrin 2006; S. 18, , 32, 102), (Bertram 2007; S. 230), (Lubliner 2008; S. 129), (Sedlacek 2009; S. 67), (Nasdala 2010; S. 174), (Merkel 2010; S. 292), (Kuna 2010; S. 402), (Puzrin 2012; S. 194, 219)

[5] (Simo et al. 1988; S. 2163), (Kaliske 1995; S. 105), (Simo und Hughes 2000), (Kjeldsen 2000), (Wriggers 2001; S. 56), (Hörmann 2002; S. 30), (Parisch 2003; S. 188), (Lubliner 2008; S. 123), (Luenberger und Ye 2008; S. 5, 342), (Sedlacek 2009; S. 55, 66, 137), (Nasdala 2010; S. 182), (Boisly et al. 2014a; Absch. A)

[6] (Krawietz 1986; S. 200), (Simo et al. 1988; S. 2163), (Kreißig 1992; S. 43), (Haupt 1993; S. 144), (Lemaitre und Chaboche 1994; S. 193), (Kaliske 1995; S. 105), (Schreiber 1997; S. 50), (Simo und Hughes 2000; S. 6, 77), (Lemaitre 2001; S. 9), (Wriggers 2001; S. 56), (Haupt 2002; S. 235, 461, 463), (Hörmann 2002; S. 30), (Parisch 2003; S. 189), (Houlsby und Puzrin 2006; S. 20), (Sedlacek 2009; S. 56), (Puzrin 2012; S. 192, 194, 216, 233)

PRANDTL Element basierte Gesamtmodell keine Bedeutung. Es verbleiben K_1 und η_∞ als die einzigen Parameter, die nicht im Rahmen des ersten Blocks identifiziert sind. Beide Parameter werden bei der Modellierung der Fließkurve unter Verwendung der in Abbildung 8.5(a) und Tabelle 8.1 ermittelten charakteristischen Punkte abgeschätzt.

Maßnahmen ab der zweiten Iteration des Identifikationsprozesses aufgrund von Abweichungen zwischen Modellvorhersagen und Messungen

Da der erste Block zur Parameteridentifikation des auf dem rCROSS-BINGHAM-HOOKE Element basierten Gesamtmodells mit dem des PRANDTL Element basierten Gesamtmodells übereinstimmt, kann die grundlegende Arbeitsweise des Identifikationsalgorithmus aus Abschnitt 8.2.2 übernommen werden. Das heißt, die Fließspannung und die kritische Schubverzerrung sind Steuergrößen der Identifikationsprozedur. Daraus ergeben sich für die Parameteridentifikation die in Abbildung 8.14 dargestellten Arbeitsschritte. Die Abschätzung für $G_2^{\min.\tau_{yd}}$, $G_2^{\max.G''}$ und $G_2^{\max.G'}$, entsprechend Tabelle 8.2, erfordern die Absenkung der Fließspannung, da $G_2^{\min.\tau_{yd}} > G_2^{\max.G''}$ und $G_2^{\min.\tau_{yd}} > G_2^{\max.G'}$. Analog zur Vorgehensweise in Abschnitt 8.2.2 wird versucht, die Fließspannung so gering wie möglich unterhalb den Wert der dynamischen Fließspannung abzusenken. Damit sich die Verringerung der Fließspannung nicht negativ auf die Güte der Modellierung der Fließkurve auswirkt, wird die Nullviskosität auf einen Wert oberhalb des in Tabelle 8.1 identifizierten Wertes angehoben. Als Konsequenz dessen wird auch der Plateauwert des Speichermoduls des rCROSS-MAXWELL Elements (Boisly et al. 2015; Gl. (80))

$$G'_{\mathrm{cm}.0} = \frac{G_1 \eta_0^2 \omega^2}{\eta_0^2 \omega^2 + G_1^2} \tag{8.65}$$

angehoben. Da sich der gesamte Speichermodul aus der Summe von G'_{cm} und G'_{p} zusammensetzt, muss G'_{p} gesenkt werden, um das Anheben von $G'_{\mathrm{cm}.0}$ zu kompensieren. Das kann nach Gleichung (8.37) unter der Annahme, dass die kritische Schubverzerrung konstant gehalten wird, ausschließlich durch eine weitere Reduktion der Fließspannung umgesetzt werden. Die Nullviskosität beeinflusst jedoch sowohl die Vorhersagen für Speicher- und Verlustmodul als auch für die Fließkurve. Somit gibt es keine weitere Möglichkeit die Anfangssteigung der Fließkurve zu beeinflussen, sobald η_0 fixiert ist. Daher werden τ_{y} und γ_{cr} solange variiert, bis sich das beste Modellierungsergebnis im Mittel für alle Materialfunktionen ergibt. Der innere Iterationszyklus über dem ersten Block endet, sobald die Fließspannung ausreichend gesenkt wurde und gute Modellierungsergebnisse für den Vorfließbereich des Speicher- und Verlustmoduls liefert. Die äußere Iterationsschleife über beide Blöcke endet, wenn der Anfangsanstieg der Fließkurve gut erfasst wird. Diese Schritte sind in Abbildung 8.14 zusammengefasst.

Modellierungsergebnis und abschließende Bemerkungen

Die identifizierten Materialparameter sind in Tabelle 8.5 aufgelistet. Aufgrund der Tatsache, dass η_0 über den Wert aus Tabelle 8.1 angehoben wurde, liegt der Wert für $1/K_1$ unter dem aus Tabelle 8.1. Die Viskosität $\eta_\infty = \eta_{\infty.1} + \eta_{\infty.2}$ ergibt sich mit den Werten aus Tabelle 8.4. Die verbleibenden Materialparameter hängen nicht direkt mit denen des rCROSS-BINGHAM-HOOKE Element basierten Gesamtmodells zusammen, da sich der Nachfließbereich des Verlustmoduls des PRANDTL Elements qualitativ von dem des rCROSS-BINGHAM-HOOKE Elements unterscheidet.

Tabelle 8.5: Identifizierte Materialparameter des Materialmodells aus Parallelschaltung eines PRANDTL und rCROSS-MAXWELL Elements nach Abbildung 8.13

	$B = 50\,\mathrm{mT}$	$B = 150\,\mathrm{mT}$	$B = 300\,\mathrm{mT}$
G_1 / Pa	$1.4 \cdot 10^5$	$7.5 \cdot 10^5$	$9.0 \cdot 10^5$
η_0 / Pa s	$2.28007 \cdot 10^4$	$1.0 \cdot 10^6$	$3.8 \cdot 10^6$
η_∞ / Pa s	460	1000	1880
K_1 / s	72	380	365
τ_{y} / Pa	40	350	900
G_2 / Pa	$4.0 \cdot 10^5$	$1.3 \cdot 10^6$	$1.6 \cdot 10^6$

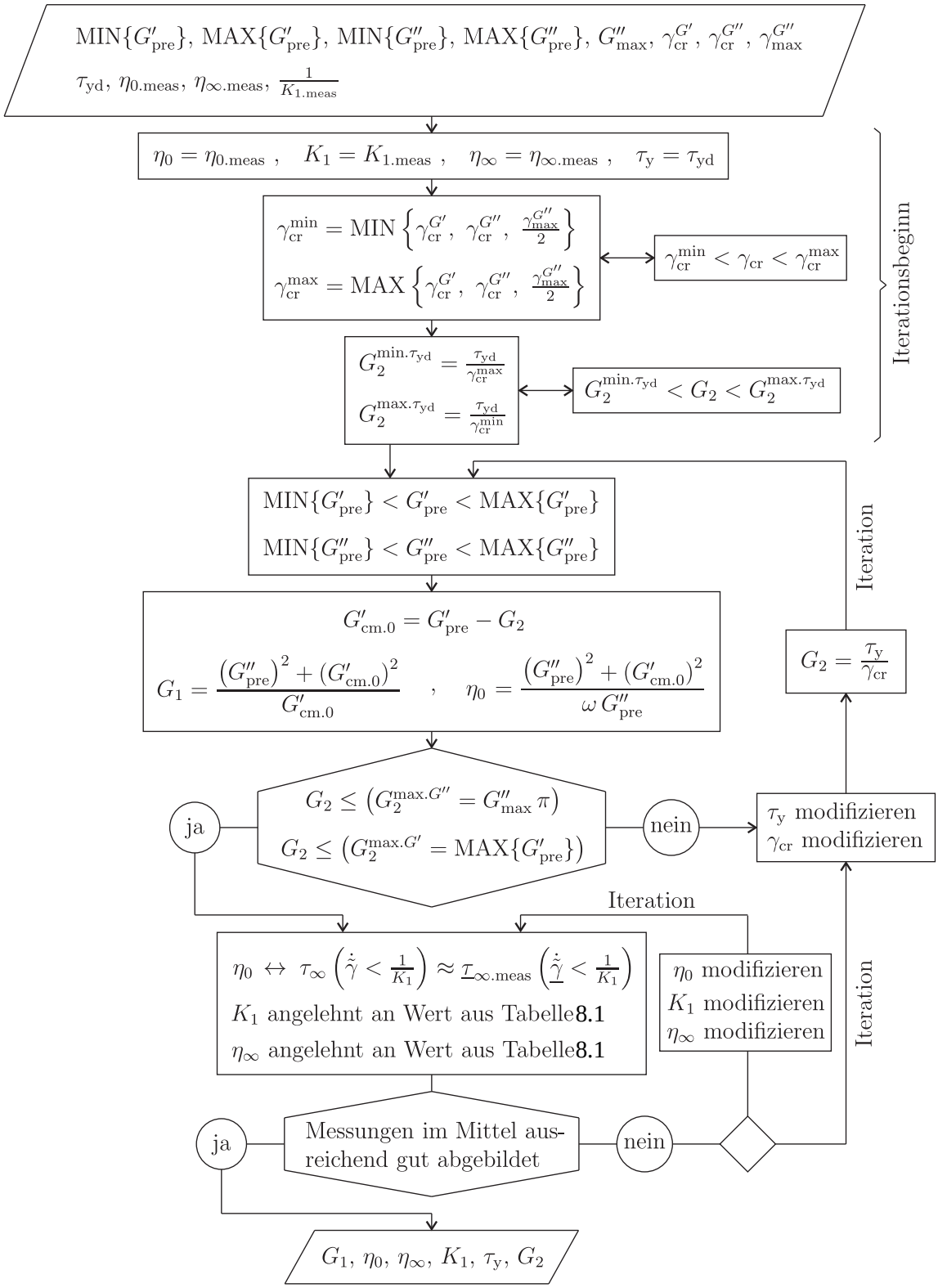
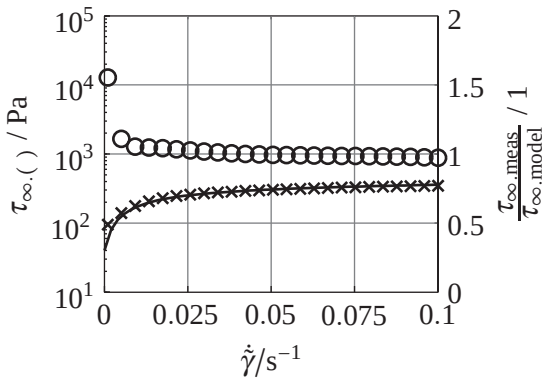


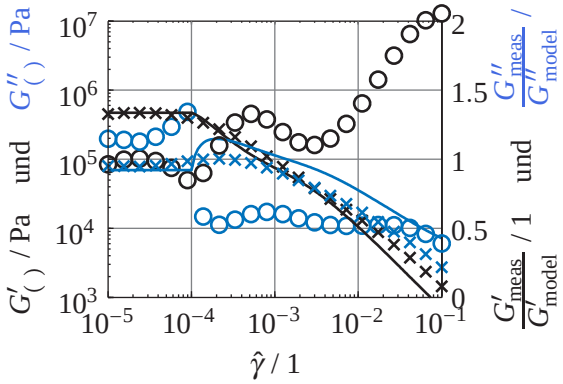
Abbildung 8.14: Iterativer Algorithmus zur Identifikation der Materialparameter des PRANDTL Element basierten Gesamtmodells nach Abbildung 8.13

8.3.3 Vergleich der Messungen mit Modellvorhersagen

Modellvorhersagen des auf dem PRANDTL Element basierten Gesamtmodells sind für die magnetische Induktion $B = 50\,\mathrm{mT}$ in Abbildung 8.15 dargestellt. Die Modellierungsergebnisse für die Fließkurve sind ähnlich gut wie die des rCROSS-BINGHAM-HOOKE Element basierten Gesamtmodells. Die Unterschiede für „kleine“ Verzerrungsraten sind mit der Absenkung der Fließspannung unter den Wert der dynamischen Fließspannung zu erklären. Ab dem dritten Messwert sind Modellvorhersage und Messergebnis praktisch



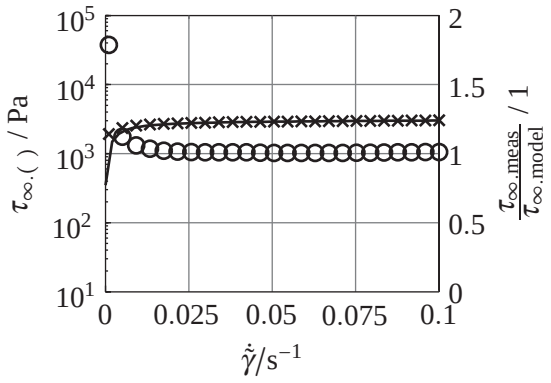
(a) Fließkurve $\underline{\tau}_{\infty.\mathrm{meas}}$: xxx, $\tau_{\infty.\mathrm{model}}$: —— und $\frac{\tau_{\infty.\mathrm{meas}}}{\tau_{\infty.\mathrm{model}}}$: ooo



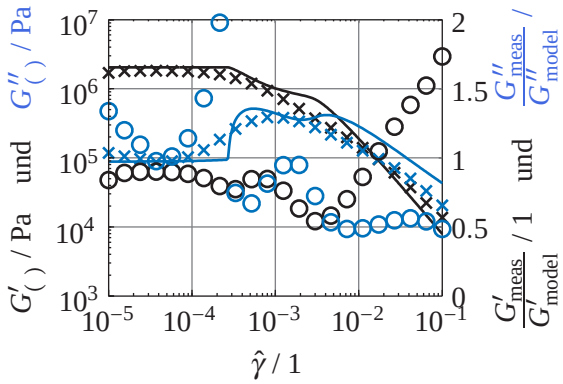
(b) Speicher- und Verlustmodul $\underline{G}'_{\mathrm{meas}}$: xxx, G'_{model}: ——, $\frac{G'_{\mathrm{meas}}}{G'_{\mathrm{model}}}$: ooo, $\underline{G}''_{\mathrm{meas}}$: xxx, G''_{model}: —— und $\frac{G''_{\mathrm{meas}}}{G''_{\mathrm{model}}}$: ooo für $\omega = 2\pi\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}$

Abbildung 8.15: Modellvorhersage des PRANDTL Element basierten Gesamtmodells aus Abbildung 8.13 mit $G_1 = 1.4 \cdot 10^5\,\mathrm{Pa}$, $\eta_0 = 2.28007 \cdot 10^4\,\mathrm{Pas}$, $\eta_\infty = 460\,\mathrm{Pas}$, $K_1 = 72\,\mathrm{s}$, $\tau_\mathrm{y} = 40\,\mathrm{Pa}$ und $G_2 = 4.0 \cdot 10^5\,\mathrm{Pa}$ nach Tabelle 8.5, im Vergleich zu Messergebnissen eines MRF bestehend aus $\Phi = 40\,\mathrm{vol\%}$ BASF$^{\mathrm{TM}}$ CIP CC Partikeln in der Trägerflüssigkeit MOTUL 300V (Abschnitt 8.1) bei $B = 50\mathrm{mT}$.

identisch. Die Modellvorhersagen für Speicher- und Verlustmodul sind in Abbildung 8.15(b) dargestellt. Da $\frac{G'_{\mathrm{meas}}}{G'_{\mathrm{model}}} \lesssim 2$, kann hinsichtlich der Modellierung des Speichermoduls im Vergleich zu den Modellvorhersagen des rCROSS-BINGHAM-HOOKE Element basierten Gesamtmodells eine Verbesserung verzeichnet werden. Die Güte der Modellvorhersagen des Verlustmoduls ist vergleichbar.
Die Modellierungsergebnisse für $B = 150\mathrm{mT}$ sind in Abbildung 8.16 gezeigt. Die Fließkurve ist ähnlich gut



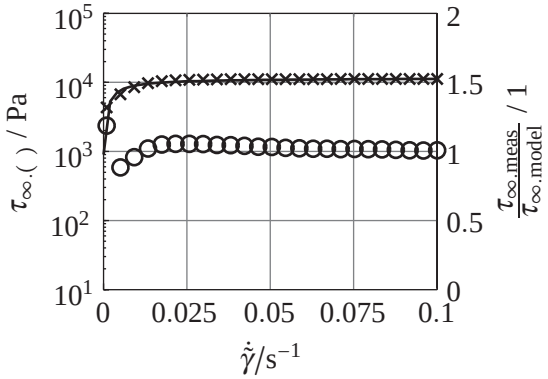
(a) Fließkurve $\underline{\tau}_{\infty.\mathrm{meas}}$: xxx, $\tau_{\infty.\mathrm{model}}$: —— und $\frac{\tau_{\infty.\mathrm{meas}}}{\tau_{\infty.\mathrm{model}}}$: ooo



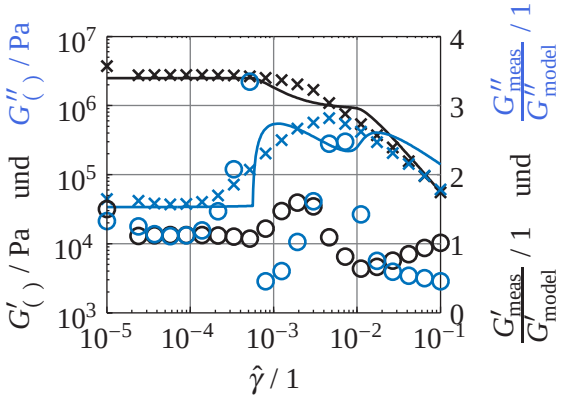
(b) Speicher- und Verlustmodul $\underline{G}'_{\mathrm{meas}}$: xxx, G'_{model}: ——, $\frac{G'_{\mathrm{meas}}}{G'_{\mathrm{model}}}$: ooo, $\underline{G}''_{\mathrm{meas}}$: xxx, G''_{model}: —— und $\frac{G''_{\mathrm{meas}}}{G''_{\mathrm{model}}}$: ooo für $\omega = 2\pi\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}$

Abbildung 8.16: Modellvorhersage des PRANDTL Element basierten Gesamtmodells aus Abbildung 8.13 mit $G_1 = 7.5 \cdot 10^5\,\mathrm{Pa}$, $\eta_0 = 1.0 \cdot 10^6\,\mathrm{Pas}$, $\eta_\infty = 1000\,\mathrm{Pas}$, $K_1 = 380\,\mathrm{s}$, $\tau_\mathrm{y} = 350\,\mathrm{Pa}$ und $G_2 = 1.3 \cdot 10^6\,\mathrm{Pa}$ nach Tabelle 8.5, im Vergleich zu Messergebnissen eines MRF bestehend aus $\Phi = 40\,\mathrm{vol\%}$ BASF$^{\mathrm{TM}}$ CIP CC Partikeln in der Trägerflüssigkeit MOTUL 300V (Abschnitt 8.1) bei $B = 150\mathrm{mT}$.

modelliert wie für $B = 50\,\mathrm{mT}$. Modellvorhersagen für Speicher- und Verlustmodul sind in Abbildung 8.16(b) zu sehen. Die Modellierungsgüte ist ungefähr vergleichbar mit der des rCROSS-BINGHAM-HOOKE Element basierten Gesamtmodells. Die Qualität der Vorhersage des Verlustmoduls ist marginal verschlechtert, die des Speichermoduls etwas verbessert. Allerdings ist festzustellen, dass die qualitativen Eigenschaften der Modellvorhersagen im Vergleich zu Abbildung 8.9(b) nicht ähnlich gut sind. Das liegt daran, dass die Vorhersage für den Verlustmodul sowohl ein absolutes als auch ein relatives Maximum in gleicher Größenordnung besitzt, welche in den Messergebnissen nicht zu erkennen sind. Das erste (absolute) Maximum tritt bei $\hat{\gamma} \approx 5 \cdot 10^{-4}$ auf und ist dem PRANDTL Element zuzuordnen. Das zweite (relative) Maximum wird durch das rCROSS-MAXWELL Element im MODE ω/3a hervorgerufen und befindet sich bei $\hat{\gamma} \approx 4 \cdot 10^{-3}$. Diese Maxima korrelieren mit den Knicken der Modellvorhersagen für den Speichermodul, die in den Messungen ebenfalls nicht vorhanden sind.
In Abbildung 8.17 sind die Ergebnisse für $B = 300\,\mathrm{mT}$ dargestellt. Die Modellvorhersagen für die Fließkurve liegen nahezu vollständig über den Messpunkten. Daher ist das Qualitätskriterium $\tau_{\infty.\mathrm{meas}}/\tau_{\infty.\mathrm{model}}$ in guter Näherung Eins. Die Modellvorhersagen für Speicher- und Verlustmodul zeigen dasselbe Verhalten, wie es für $B = 150\,\mathrm{mT}$ erkennbar ist: Die qualitativen Unterschiede zwischen Messung und Modellvor-



(a) Fließkurve $\underline{\tau}_{\infty.\mathrm{meas}}$: xxx, $\tau_{\infty.\mathrm{model}}$: —— und $\frac{\tau_{\infty.\mathrm{meas}}}{\tau_{\infty.\mathrm{model}}}$: ooo

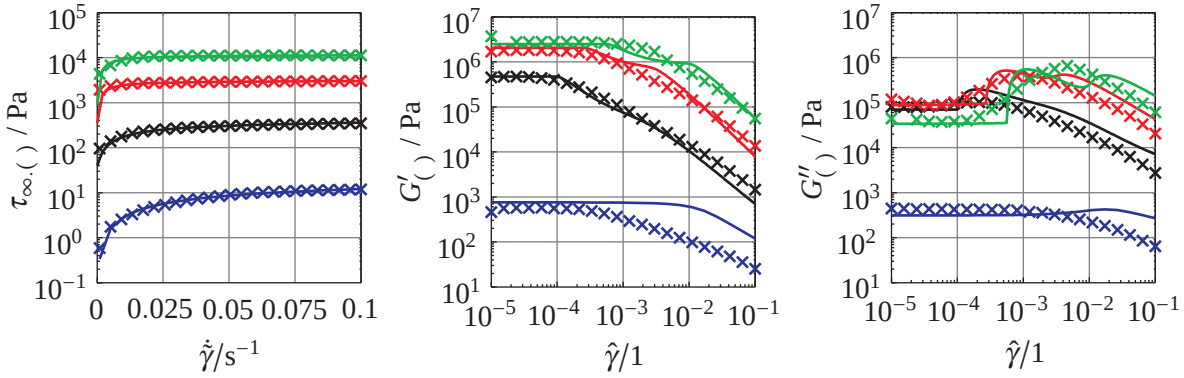


(b) Speicher- und Verlustmodul $\underline{G'}_{\mathrm{meas}}$: xxx, G'_{model}: ——, $\frac{G'_{\mathrm{meas}}}{G'_{\mathrm{model}}}$: ooo, $\underline{G''}_{\mathrm{meas}}$: xxx, G''_{model}: —— und $\frac{G''_{\mathrm{meas}}}{G''_{\mathrm{model}}}$: ooo für $\omega = 2\pi\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}$

Abbildung 8.17: Modellvorhersage des PRANDTL Element basierten Gesamtmodells aus Abbildung 8.13 mit $G_1 = 9.0 \cdot 10^5\,\mathrm{Pa}$, $\eta_0 = 3.8 \cdot 10^6\,\mathrm{Pas}$, $\eta_\infty = 1880\,\mathrm{Pas}$, $K_1 = 365\,\mathrm{s}$, $\tau_\mathrm{y} = 900\,\mathrm{Pa}$ und $G_2 = 1.6 \cdot 10^6\,\mathrm{Pa}$ nach Tabelle 8.5, im Vergleich zu Messergebnissen eines MRF bestehend aus $\Phi = 40\,\mathrm{vol\%}$ BASF$^{\mathrm{TM}}$ CIP CC Partikeln in der Trägerflüssigkeit MOTUL 300V (Abschnitt 8.1) bei $B = 3000\mathrm{mT}$.

hersage, das umfasst die Maxima des berechneten Verlustmoduls sowie die Knicke des vorhergesagten Speichermoduls, sind jedoch stärker ausgeprägt. Die Spannweite des Maximums des gemessenen Verlustmoduls, die sich über drei Dekaden erstreckt, ist wesentlich größer als die des PRANDTL Elements nach Abbildung 4 aus Boisly et al. (2014b). Daran ist zu erkennen, dass das PRANDTL Element allein nicht in der Lage ist, den gemessenen Verlustmodul abzubilden. Die Modellvorhersage könnte verbessert werden, indem das zweite Maximum, welches dem rCROSS-MAXWELL Element zuzuschreiben ist, in Richtung des ersten Maximums verschoben wird. Das könnte durch Verringerung der charakteristischen Schubverzerrungsrate $\dot{\gamma}_{\mathrm{c.2}}$ erreicht werden, wie in Abbildung 15(a) aus Boisly et al. (2015) zu erkennen ist. Die Verringerung von $\dot{\gamma}_{\mathrm{c.2}}$ könnte nach Boisly et al. (2015; Gl. (34)) mittels der Reduktion von η_0 und dem Anheben von K_1 realisiert werden. Da sich diese Maßnahmen jedoch negativ auf die Modellierung der Fließkurve auswirken, werden sie im Rahmen dieser Arbeit nicht umgesetzt. Somit verschlechtert sich das Qualitätskriterium $G''_{\mathrm{meas}}/G''_{\mathrm{model}}$ im Vergleich zu dem des rCROSS-BINGHAM-HOOKE Element basierten Gesamtmodells. Die vorhergesagte Güte des Speichermoduls $G'_{\mathrm{meas}}/G'_{\mathrm{model}}$ ist vergleichbar. Während sich die Modellvorhersagen des rCROSS-BINGHAM-HOOKE Element basierten Modells mit steigendem Magnetfeld verbessert haben, verschlechtern sich die Vorhersagen des PRANDTL Element basierten Gesamtmodells. Dem Vorteil des letzteren Modellierungsansatzes, die Zahl zu identifizierender Materialparameter zu reduzieren, steht der Nachteil einer qualitativ verschlechterten Modellvorhersage gegenüber.
Die Modellvorhersagen für alle Magnetfelder sind im Vergleich zu den Messergebnissen in Abbildung

8.18 zusammenfassend dargestellt. Die Ergebnisse für $B = 0\text{mT}$ sind aus Abschnitt 8.1.2 übernommen.



(a) Fließkurve $\underline{\tau}_{\infty.\text{meas}}$: xxx und $\tau_{\infty.\text{model}}$: —— (b) Speichermoduli $\underline{G'}_{\text{meas}}$: xxx und G'_{model}: —— (c) Verlustmoduli $\underline{G''}_{\text{meas}}$: xxx und G''_{model}: ——

Abbildung 8.18: Modellvorhersage des PRANDTL Element basierten Gesamtmodells aus Abbildung 8.13, im Vergleich zu Messergebnissen bei $B = 0\text{mT}$ ——, $B = 50\text{mT}$ ——, $B = 150\text{mT}$ —— und $B = 300\text{mT}$ —— eines MRF bestehend aus $\Phi = 40\,\text{vol\%}$ BASF$^{\text{TM}}$ CIP CC Partikeln in der Trägerflüssigkeit MOTUL 300V (Abschnitt 8.1). Materialparameter entsprechend Tabelle 8.5.

8.4 Modellierung des Materialverhaltens eines magnetorheologischen Fluids unter dem Einfluss eines äußeren Magnetfelds auf Basis des endochronen MAXWELL Elements

8.4.1 Qualitativer Modellierungsschritt – Entwicklung einer Modellstruktur

In den Abschnitten 8.2.3 und 8.3.3 erfolgte die Modellierung der Messergebnisse auf Basis von Flüssigkeiten mit Fließspannung. Damit verbunden ist ein scharfer Übergang von einem Vor- in einen Nachfließbereich. Somit steigt die Modellvorhersage des von der Verzerrungsamplitude abhängigen Verlustmoduls beim Erreichen der kritischen Schubverzerrung abrupt an, entgegen den experimentellen Ergebnissen aus Abbildung 2.5. Infolgedessen sind Modelle unter Verwendung von Flüssigkeiten mit Fließspannung nicht in der Lage den allmählichen Übergang des von der Schubverzerrungsamplitude abhängigen Verlustmoduls vollends zu modellieren. Dennoch sind Flüssigkeiten mit Fließspannung, in Abhängigkeit davon, wie kontinuierlich der gemessene Verlustmodul ansteigt, zur Modellierung mehr oder weniger gut geeignet.
Um zu prüfen, ob die Modellvorhersagen verbessert werden können, wenn die Flüssigkeit mit Fließspannung durch eine Flüssigkeit mit pseudo Fließspannung ersetzt wird, kommt im Folgenden das endochrone MAXWELL Element zur Anwendung. Es besitzt weder eine Fließfunktion noch eine Fließbedingung. Jede Änderung der Gesamtverzerrung, welche sofort mit dem Beginn der Belastung einsetzt, ist mit plastischem Fließen gekoppelt. Das endochrone MAXWELL Element ist somit in der Lage den allmählich ansteigenden, von der Verzerrungsamplitude abhängigen Verlustmodul zu modellieren (*Folgerung 19*). Die konstitutiven Beziehungen des endochronen MAXWELL Elements sind in Abschnitt 6.2 aufgeführt. Dem endochronen MAXWELL Element wird das rCROSS-MAXWELL Element aus Boisly et al. (2015), dessen eindimensionales Materialgesetzt in Abschnitt 8.1 beschrieben ist, parallel geschaltet. Es ergibt sich das in Abbildung 8.19 dargestellte Gesamtmodell. Der qualitative Aufbau des Gesamtmodells wird ebenfalls bei Keck (1998; Abb. 4.6), Kletschkowski et al. (2002a; Abb. 4), Kletschkowski et al. (2004; Abb. 4) und Kletschkowski et al. (2005; Abb. 3) verwendet. Die Gleichgewichtsrelation ist durch das endochrone MAXWELL Element gegeben, da dieses ratenunabhängige Eigenschaften besitzt. Das rCROSS-MAXWELL Element (Boisly et al. 2015; Absch. 6) modelliert die scherverdünnenden Eigenschaften. Es definiert den Überspannungsanteil des Gesamtmodells

$$\tau = \tau_{\text{cm}} + \tau_{\text{ch}} \tag{8.66}$$

$$\gamma = \gamma_{\text{s.cm}} + \gamma_{\text{d.cm}} = \gamma_{\text{s.ch}} + \gamma_{\text{q}}\ . \tag{8.67}$$

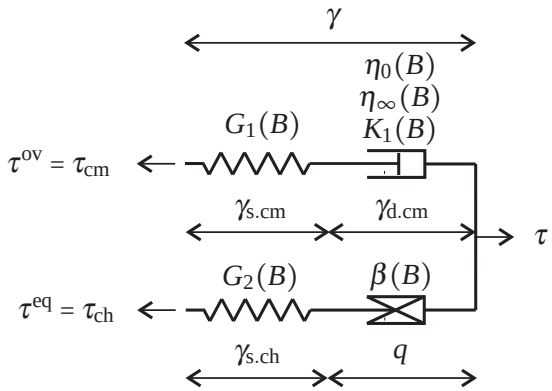


Abbildung 8.19: Rheologisches Modell auf Grundlage des endochronen MAXWELL Elements zur Modellierung des Materialverhaltens eines magnetorheologischen Fluids

Dem magnetorheologischen Effekt wird, wie bereits in den Abschnitten 8.2 und 8.3 umgesetzt ist, mittels vom Magnetfeld abhängigen Materialparametern Rechnung getragen.

8.4.2 Quantitative Modellierung – Identifikation der Materialparameter

Identifizierung charakteristischer Punkte

Das Gesamtmodell aus Abbildung 8.19 ist qualitativ gleichwertig zu dem aus Abbildung 8.13, welches auf dem PRANDTL Element basiert: Das Überspannungsmodell beider Modellansätze ist identisch und das endochrone MAXWELL Element ist das endochrone Analogon zum PRANDTL Element. Die Analogie beider Elemente ist auf die annähernd gleichwertige Interpretierbarkeit der pseudo Fließspannung β und der Fließspannung τ_y, hinsichtlich der Modellierung der Fließkurve sowie Speicher- und Verlustmodul, zurückzuführen. Daher können die charakteristischen Punkte aus Abbildung 8.5, Tabelle 8.1 und Gleichungen (8.26) bis (8.34) vollständig übernommen werden. Da die Fließkurven des PRANDTL und endochronen MAXWELL Elements identisch sind, kann die dynamische Fließspannung τ_{yd} ebenfalls zur ersten Abschätzung von β genutzt werden. Lediglich der Parameter $\gamma_{cr}^{G''}$ verliert seine Gültigkeit, weil der Verlustmodul des endochronen MAXWELL Elements nicht mehr abrupt ansteigt. Stattdessen sind das Minimum und Maximum der kritischen Schubverzerrung nach Abbildung 6.12 gegeben durch

$$\gamma_{cr}^{min} = \text{MIN}\left\{\gamma_{cr}^{G'},\ \frac{\gamma_{max}^{G''}}{1.5}\right\} \tag{8.68}$$

$$\gamma_{cr}^{max} = \text{MAX}\left\{\gamma_{cr}^{G'},\ \frac{\gamma_{max}^{G''}}{1.5}\right\}\ . \tag{8.69}$$

Erster Block zur Parameteridentifikation

Weil die Modellstrukturen des PRANDTL Element basierten Gesamtmodells und des auf dem endochronen MAXWELL Element basierten Gesamtmodells identisch sind, kann der Identifikationsalgorithmus entsprechend Gleichungen (8.26) bis (8.46) im Folgenden angewendet werden. Es müssen lediglich $G'_{cbh.0}$ durch $G'_{ch.0}$ und τ_y durch β formal erstetzt werden. Einzig und allein die Berechnung des elastischen Moduls G_2 bedarf einer Anpassung. Diese ist damit verbunden, dass das endochrone MAXWELL Element sofort mit dem Einsetzen der Belastung plastisch zu fließen beginnt. Daher entfällt der charakteristische Punkt $\gamma_{cr}^{G''}$, der dem abrupten Anstieg des Verlustmoduls zugeordnet ist. Infolgedessen kann Gleichung (8.37) nicht dirket zur Bestimmung von G_2 benutzt werden. Stattdessen wird entsprechend Abbildung 6.12 sowie Gleichungen (6.29) und (6.57) das Maximum des Verlustmoduls, $\gamma_{max}^{G''}$, genutzt. Es gilt

$$\gamma_{cr} = \frac{\beta}{G_2} = \frac{\gamma_{max}^{G''}}{1.5} \tag{8.70}$$

und man erhält zur Abschätzung des Elastizitätsmoduls

$$G_2 \approx 1.5\frac{\beta}{\gamma_{max}^{G''}}\ . \tag{8.71}$$

Zweiter Block zur Parameteridentifikation

Die Identifikation der Parameter K_1 und η_∞, welche mittels den bisherigen Arbeitsschritten noch nicht bestimmt sind, kann analog zum PRANDTL Element basierten Gesamtmodell erfolgen. Sie werden auf Grundlage der in Abbildung 8.5(a) und Tabelle 8.1 identifizierten charakteristischen Punkte der Fließkurve ermittelt.

Maßnahmen ab der zweiten Iteration des Identifikationsprozesses aufgrund von Abweichungen zwischen Modellvorhersagen und Messungen

Zur Bestimmung der Materialparameter des Gesamtmodells aus Abbildung 8.19 wird der Identifikationsalgorithmus des PRANDTL Element basierten Gesamtmodells (Abbildung 8.14) unter Berücksichtigung erklärter Anpassungen genutzt. Demnach sind die pseudo Fließspannung, β, und die Schubverzerrungsamplitude zum Maximum des Verlustmoduls, $\gamma_{\max}^{G''}$, die Steuergrößen des Identifikationsalgorithmus. Alle weiteren Materialparameter werden daraus abgeleitet. Es genügt demnach, in Abbildung 8.14 die kritische Schubverzerrung, γ_{cr}, entsprechend Gleichung (8.70) durch $\frac{\gamma_{\max}^{G''}}{1.5}$ und τ_{y} durch β zu ersetzen. Infolgedessen unterscheiden sich die Werte für $\gamma_{\mathrm{cr}}^{\min}$ und $\gamma_{\mathrm{cr}}^{\max}$ zu denen aus Abschnitt 8.2.2. Damit verbunden weichen auch die Werte für $G_2^{\min.\tau_{\mathrm{yd}}}$ und $G_2^{\max.\tau_{\mathrm{yd}}}$ von denen aus Abschnitt 8.2.2 ab. Die in Tabelle 8.2 für das rCROSS-BINGHAM-HOOKE Element identifizierten Werte für $G_2^{\max.G''}$ und $G_2^{\max.G'}$ besitzen weiterhin ihre Gültigkeit. Abschätzungen für diese Größen sind in Tabelle 8.6 hinterlegt. Für $B = 50\mathrm{mT}$ und $B = 150\mathrm{mT}$

Tabelle 8.6: Abschätzung oberer und unterer Grenzen für G_2 auf Basis der dynamischen Fließspannung (Gleichungen (8.68), (8.69), (8.39) und (8.40)), dem maximalen Verlustmodul (Gleichung (8.41)) und dem maximalen Speichermodul (Gleichung (8.44))

	$B = 50\mathrm{mT}$	$B = 150\mathrm{mT}$	$B = 300\mathrm{mT}$
$G_2^{\min.\tau_{\mathrm{yd}}}$ / Pa	$5.88 \cdot 10^5$	$3.40 \cdot 10^6$	$5.88 \cdot 10^5$
$G_2^{\max.\tau_{\mathrm{yd}}}$ / Pa	$1.46 \cdot 10^6$	$1.31 \cdot 10^7$	$2.26 \cdot 10^6$
$G_2^{\max.G''}$ / Pa	$3.19 \cdot 10^5$	$1.21 \cdot 10^6$	$2.06 \cdot 10^6$
$G_2^{\max.G'}$ / Pa	$4.70 \cdot 10^5$	$1.82 \cdot 10^6$	$3.71 \cdot 10^6$

kann man Tabelle 8.6 entnehmen, dass sich für das Minimum $G_2^{\min.\tau_{\mathrm{yd}}}$ ein größerer Wert ergibt als für die Maxima $G_2^{\max.G''}$ und $G_2^{\max.G'}$. Dieses Problem kann durch die Reduktion der pseudo Fließspannung behoben werden. Insofern reduziert sich die mittels der dynamischen Fließspannung erstabgeschätzte pseudo Fließspannung in weiteren Iterationen. Um das im Mittel beste Modellierungsergebnis sowohl für die Fließkurve als auch für Speicher- und Verlustmodul zu erzielen, wird versucht die Fließspannung so gering wie möglich zu reduzieren. Da zur Modellierung der Messungen bei $B = 300\,\mathrm{mT}$ die Forderungen $G_2^{\min.\tau_{\mathrm{yd}}} < G_2^{\max.G''}$ und $G_2^{\min.\tau_{\mathrm{yd}}} < G_2^{\max.G'}$ bereits erfüllt sind, muss die pseudo Fließspannung lediglich auf einen Wert korrigiert werden, der unwesentlich kleiner als die dynamische Fließspannung ist. Um auch den Anfangsbereich der Fließkurve gut abbilden zu können, muss die Reduktion der Fließspannung durch ein Anheben von η_0 kompensiert werden. Weil die scherverdünnenden Eigenschaften jedoch ausschließlich durch das rCROSS-MAXWELL Element modelliert werden, ist der Anfangsanstieg der Fließkurve für ein festes η_0 fix und nicht mehr veränderbar. Die Übereinstimmung zwischen Messung und Modellvorhersage, speziell für den Anfangsbereich der Fließkurve, stellt somit den letzten Arbeitsschritt eines Iterationszyklus dar. Daher werden β und $\gamma_{\max}^{G''}$ solange variiert, bis alle Messergebnisse im Mittel gut abgebildet sind. Dies ist zusammenfassend in Abbildung 8.20 dargestellt.

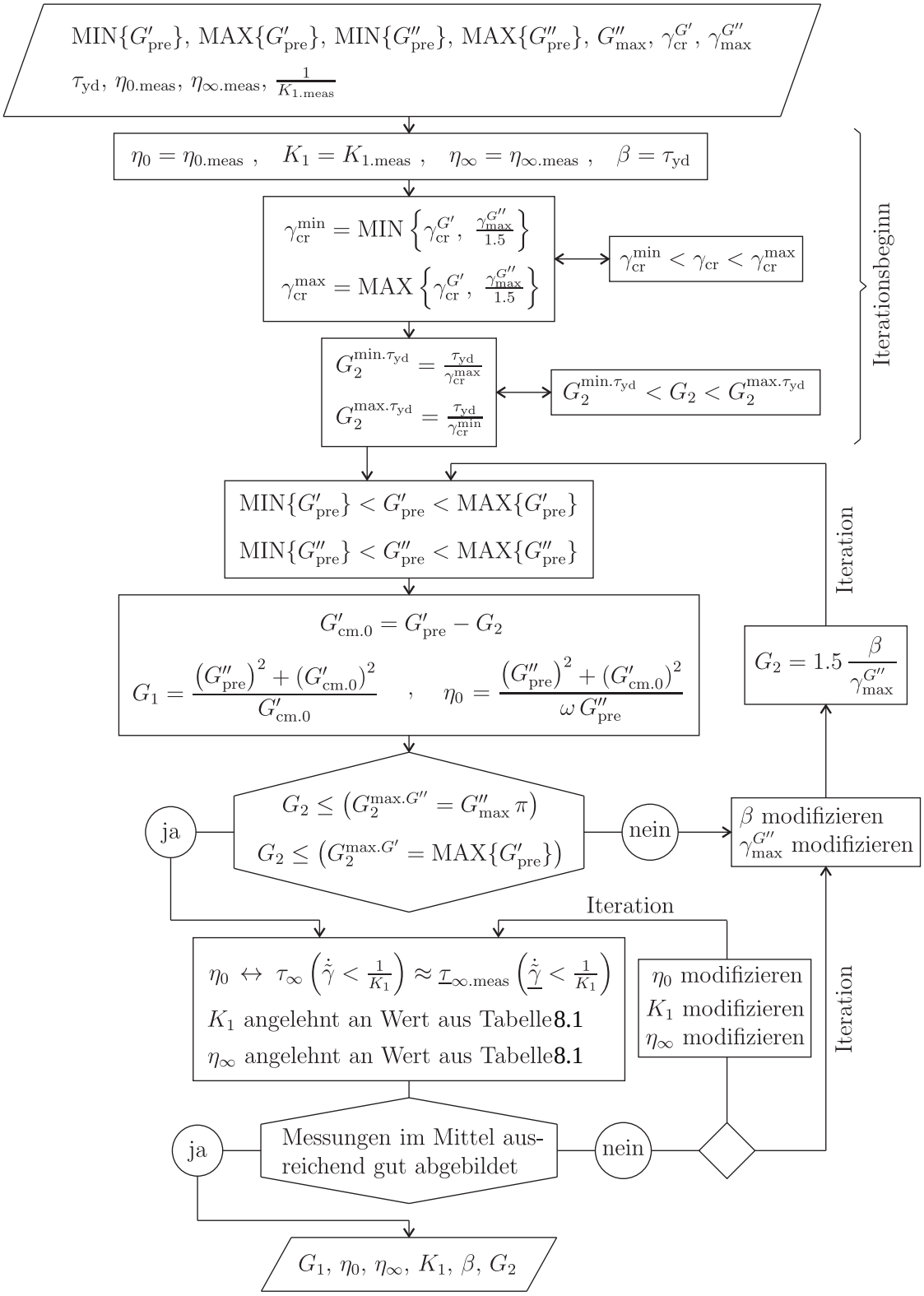


Abbildung 8.20: Iterativer Algorithmus zur Identifikation der Materialparameter des auf dem endochronen MAXWELL Element basierten Gesamtmodells nach Abbildung 8.19

Modellierungsergebnis und abschließende Bemerkungen

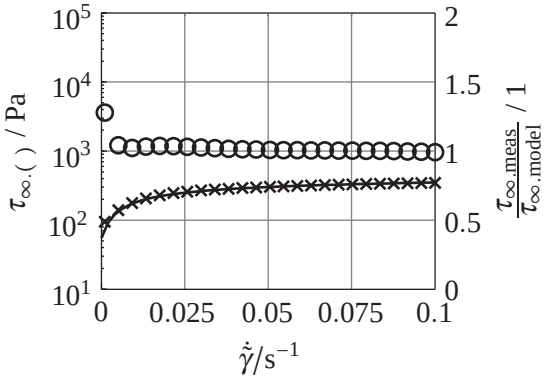
Die letztendlich identifizierten Materialparameter sind in Tabelle 8.7 hinterlegt. Die kritische Schubverzerrung $\gamma_{cr} = \frac{\beta}{G_2}$ und die pseudo Fließspannung sind größer als diejenigen des rCROSS-BINGHAM-HOOKE Element basierten Gesamtmodells aus Tabelle 8.4. Sie sind ebenfalls größer als die des PRANDTL Element basierten Gesamtmodells aus Tabelle 8.5. Da sowohl die kritische Schubverzerrung als auch die pseudo Fließspannung in guter Näherung proportional erhöht wurden, ist G_2 des endochronen MAXWELL Elements identisch mit dem des PRANDTL Elements. Folglich sind auch G_1 annähernd gleich. Die Werte für η_∞ des PRANDTL Elements können ebenfalls übernommen werden. Da die pseudo Fließspannung für Messungen bei $B = 300\,\mathrm{mT}$ gegenüber der dynamischen Fließspannung nur unwesentlich gesenkt werden musste, liegt folglich $\frac{1}{K_1}$ näher an dem in Tabelle 8.1 identifizierten Wert als für $B = 50\,\mathrm{mT}$ und $B = 150\,\mathrm{mT}$.

Tabelle 8.7: Identifizierte Materialparameter für das Materialmodell bestehend aus der Parallelschaltung eines endochronen MAXWELL und rCROSS-MAXWELL Elements nach Abbildung 8.19

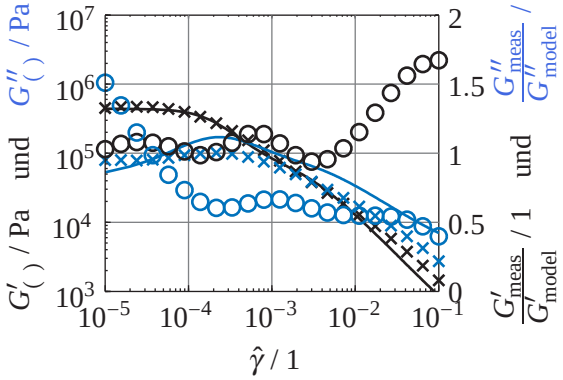
	$B = 50\,\mathrm{mT}$	$B = 150\,\mathrm{mT}$	$B = 300\,\mathrm{mT}$
G_1 / Pa	$9.0 \cdot 10^4$	$7.5 \cdot 10^5$	$8.0 \cdot 10^5$
η_0 / Pa s	$2.1 \cdot 10^4$	$1.1 \cdot 10^6$	$2.5 \cdot 10^6$
η_∞ / Pa s	460	1000	1880
K_1 / s	72	432	300
β / Pa	55	450	3200
G_2 / Pa	$3.8 \cdot 10^5$	$8.4 \cdot 10^5$	$1.35 \cdot 10^6$

8.4.3 Vergleich der Messungen mit Modellvorhersagen

Die Modellvorhersagen im Vergleich zu den Messungen für $B = 50\,\mathrm{mT}$ sind in Abbildung 8.21 dargestellt. Entsprechend der Vorgabe wird die Fließkurve sehr gut abgebildet. Lediglich der Anfangsbereich



(a) Fließkurve $\underline{\tau}_{\infty.\mathrm{meas}}$: xxx, $\tau_{\infty.\mathrm{model}}$: —— und $\frac{\tau_{\infty.\mathrm{meas}}}{\tau_{\infty.\mathrm{model}}}$: ooo

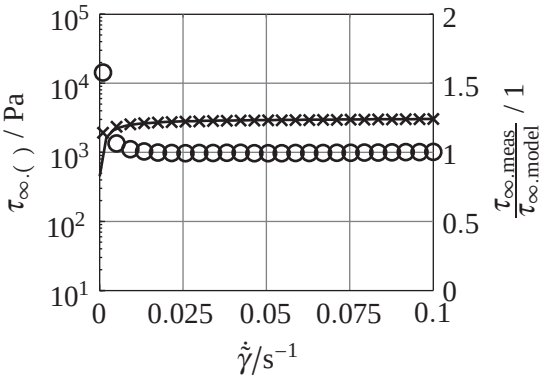


(b) Speicher- und Verlustmodul $\underline{G'}_{\mathrm{meas}}$: xxx, G'_{model}: ——, $\frac{G'_{\mathrm{meas}}}{G'_{\mathrm{model}}}$: ooo, $\underline{G''}_{\mathrm{meas}}$: xxx, G''_{model}: —— und $\frac{G''_{\mathrm{meas}}}{G''_{\mathrm{model}}}$: ooo für $\omega = 2\pi\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}$

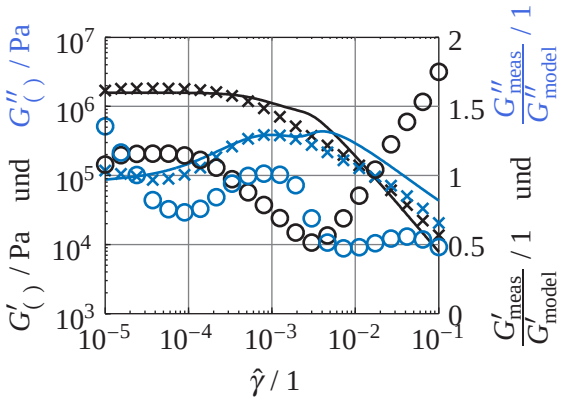
Abbildung 8.21: Modellvorhersage des auf dem endochronen MAXWELL Element basierten Gesamtmodells aus Abbildung 8.19 mit $G_1 = 9.0 \cdot 10^4\,\mathrm{Pa}$, $\eta_0 = 2.1 \cdot 10^4\,\mathrm{Pa\,s}$, $\eta_\infty = 460\,\mathrm{Pa\,s}$, $K_1 = 72\,\mathrm{s}$, $\beta = 55\,\mathrm{Pa}$ und $G_2 = 3.8 \cdot 10^5\,\mathrm{Pa}$ nach Tabelle 8.7, im Vergleich zu Messergebnissen eines MRF bestehend aus $\Phi = 40\,\mathrm{vol\%}$ BASF$^{\mathrm{TM}}$ CIP CC Partikeln in der Trägerflüssigkeit MOTUL 300V (Abschnitt 8.1) bei $B = 50\mathrm{mT}$.

der Messergebnisse ist unterbestimmt, da die pseudo Fließspannung unterhalb der dynamischen Fließspannung liegt. Die Modellvorhersagen für Speicher- und Verlustmodul haben sich im Vergleich zu denen des PRANDTL Element basierten Gesamtmodells verbessert. Das Qualitätskriterium $G'_{\mathrm{meas}}/G'_{\mathrm{model}}$ ist nun für die ersten drei Dekaden rund Eins. Das allmähliche Ansteigen des Verlustmoduls ist in Abbildung 8.21(b)

zu erkennen. Es erklärt den Abfall des Qualitätskriteriums $G''_{\text{meas}}/G''_{\text{model}}$ in der ersten Dekade, innerhalb dessen der Verlustmodul im Mittel sehr gut abgebildet wird.
Abbildung 8.22 zeigt den Vergleich zwischen Modellvorhersage und Messergebnis für $B = 150\,\text{mT}$. Es zeigt die gute Übereinstimmung für die Fließkurve in Abbildung 8.22(a). Die Modellvorhersage für den Speichermodul ist mit der des PRANDTL Elements vergleichbar. Das Qualitätskriterium $G'_{\text{meas}}/G'_{\text{model}}$ liegt zwischen 0.5 und 1.75. Jedoch werden die qualitativen Eigenschaften der Messungen des Speichermoduls



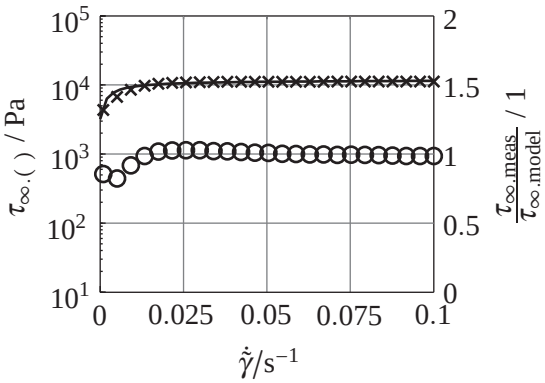
(a) Fließkurve $\underline{\tau}_{\infty.\text{meas}}$: xxx, $\tau_{\infty.\text{model}}$: —— und $\frac{\tau_{\infty.\text{meas}}}{\tau_{\infty.\text{model}}}$: ooo



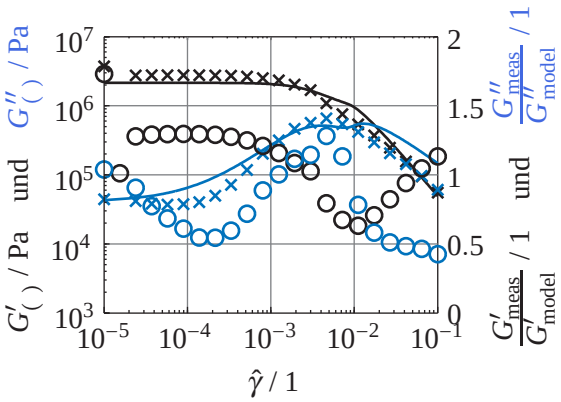
(b) Speicher- und Verlustmodul $\underline{G}'_{\text{meas}}$: xxx, G'_{model}: ——, $\frac{G'_{\text{meas}}}{G'_{\text{model}}}$: ooo, $\underline{G}''_{\text{meas}}$: xxx, G''_{model}: —— und $\frac{G''_{\text{meas}}}{G''_{\text{model}}}$: ooo für $\omega = 2\pi\frac{\text{rad}}{\text{s}}$

Abbildung 8.22: Modellvorhersage des auf dem endochronen MAXWELL Element basierten Gesamtmodells aus Abbildung 8.19 mit $G_1 = 7.5\cdot10^5\,\text{Pa}$, $\eta_0 = 1.1\cdot10^6\,\text{Pa s}$, $\eta_\infty = 1000\,\text{Pa s}$, $K_1 = 432\,\text{s}$, $\beta = 450\,\text{Pa}$ und $G_2 = 8.4\cdot10^5\,\text{Pa}$ nach Tabelle 8.7, im Vergleich zu Messergebnissen eines MRF bestehend aus $\Phi = 40\,\text{vol\%}$ BASF$^{\text{TM}}$ CIP CC Partikeln in der Trägerflüssigkeit MOTUL 300V (Abschnitt 8.1) bei $B = 150\text{mT}$.

mit dem endochronen MAXWELL Element wesentlich besser modelliert. Damit ist unter anderem gemeint, dass die Spannweite des Maximums des Verlustmoduls erfasst ist. Dies wird vom endochronen MAXWELL Element durch den allmählichen Anstieg des von der Verzerrungsamplitude abhängigen Verlustmoduls sichergestellt. Eine weitere Folge des allmählichen Anstiegs des Verlustmoduls ist, dass dessen Maximum näher an das Maximum des Verlustmoduls des rCROSS-MAXWELL Elements (MODE ω/3a) rückt. Somit



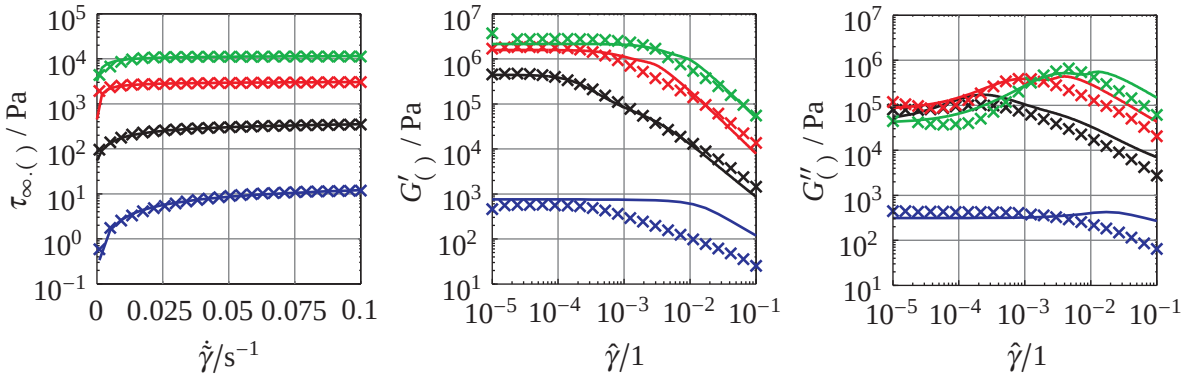
(a) Fließkurve $\underline{\tau}_{\infty.\text{meas}}$: xxx, $\tau_{\infty.\text{model}}$: —— und $\frac{\tau_{\infty.\text{meas}}}{\tau_{\infty.\text{model}}}$: ooo



(b) Speicher- und Verlustmodul $\underline{G}'_{\text{meas}}$: xxx, G'_{model}: ——, $\frac{G'_{\text{meas}}}{G'_{\text{model}}}$: ooo, $\underline{G}''_{\text{meas}}$: xxx, G''_{model}: —— und $\frac{G''_{\text{meas}}}{G''_{\text{model}}}$: ooo für $\omega = 2\pi\frac{\text{rad}}{\text{s}}$

Abbildung 8.23: Modellvorhersage des auf dem endochronen MAXWELL Element basierten Gesamtmodells aus Abbildung 8.19 mit $G_1 = 8.0\cdot10^5\,\text{Pa}$, $\eta_0 = 2.5\cdot10^6\,\text{Pa s}$, $\eta_\infty = 1880\,\text{Pa s}$, $K_1 = 300\,\text{s}$, $\beta = 3200\,\text{Pa}$ und $G_2 = 1.35\cdot10^6\,\text{Pa}$ nach Tabelle 8.7, im Vergleich zu Messergebnissen eines MRF bestehend aus $\Phi = 40\,\text{vol\%}$ BASF$^{\text{TM}}$ CIP CC Partikeln in der Trägerflüssigkeit MOTUL 300V (Abschnitt 8.1) bei $B = 300\text{mT}$.

kann das Maximum der Modellvorhersage des Verlustmoduls zu höheren Verzerrungsamplituden verschoben werden, ohne die im Mittel gute Modellierung im Bereich $\hat{\gamma} < \gamma_{cr}$ einzubüßen. Infolgedessen besitzt der Verlustmodul des Gesamtmodells ein ausgeprägtes Maximum und keine relativen und absoluten Maxima, so wie es für die Modellierung auf Basis des PRANDTL Elements der Fall ist.
Dasselbe Verhalten ist auch für die Messungen bei $B = 300\,\mathrm{mT}$ aus Abbildung 8.23(b) zu verzeichnen. Die verbesserte Modellvorhersage des Verlustmoduls zeigt sich hier noch deutlicher. Die Fließkurve und der Speichermodul werden nach wie vor gut abgebildet.
Zur besseren Übersicht sind die Messergebnisse aller Magnetfelder im Vergleich zu den Modellvorhersagen abschließend in Abbildung 8.24 dargestellt. Im Vergleich zu Abbildung 8.12 ist zu erkennen, dass die Messergebnisse des Verlustmoduls nicht im gleichen Maße überschätzt werden, wie es für das auf dem rCROSS-BINGHAM-HOOKE Element basierten Gesamtmodell der Fall ist.



(a) Fließkurven $\underline{\tau}_{\infty.\mathrm{meas}}$: xxx und $\tau_{\infty.\mathrm{model}}$: —— (b) Speichermoduli $\underline{G'}_{\mathrm{meas}}$: xxx und G'_{model}: —— (c) Verlustmoduli $\underline{G''}_{\mathrm{meas}}$: xxx und G''_{model}: ——

Abbildung 8.24: Modellvorhersage des endochronen MAXWELL Element basierten Gesamtmodells aus Abbildung 8.19, im Vergleich zu Messergebnissen bei $B = 0\,\mathrm{mT}$ ——, $B = 50\,\mathrm{mT}$ ——, $B = 150\,\mathrm{mT}$ —— und $B = 300\,\mathrm{mT}$ —— eines MRF bestehend aus $\Phi = 40\,\mathrm{vol\%}$ BASF$^{\mathrm{TM}}$ CIP CC Partikeln in der Trägerflüssigkeit MOTUL 300V (Abschnitt 8.1). Materialparameter entsprechend Tabelle 8.7.

8.5 Auswertung und Gültigkeitsbereich der Modellierungsansätze

Abschließend werden die drei vorgestellten Modellierungsansätze kurz gegenübergestellt und ausgewertet. Alle Parametersätze der drei vorgeschlagenen Gesamtmodelle besitzen denselben Gültigkeitsbereich, da sie unter Einbeziehung identischer Messergebnisse formuliert sind. Der Einfluss korrosiver Medien sowie weiterer Umweltbedingungen, wie beispielsweise der Luftfeuchte und der Strahlung, und die damit verbundenen Alterserscheinungen (Ulbricht 1976; S. 16) konnten in dieser Arbeit nicht untersucht werden. Im Rahmen der in dieser Arbeit betrachteten Zeitskalen sind diese Einschränkungen zweckmäßig und zulässig, da „der Ingenieur [...] stets einen Kompromiß zwischen einer möglichst wirklichkeitsnahen Approximation und einer einfachen, anwendungsfähigen Formulierung eingehen und sich auf die Beschreibung der wesentlichen Erscheinungen beschränken [wird]“ Ulbricht (1976; S. 10). Die Experimente wurden daher nicht unter gezielt eingestellten klimatischen Verhältnissen durchgeführt, sondern erfolgten unter Umgebungsbedingungen. Da Feuchte sowie Außentemperatur zum Zeitpunkt der Messung nicht aufgezeichnet wurden, können diesbezüglich keine Angaben gemacht werden. Ähnlich verhält es sich mit der Temperaturverteilung innerhalb der Magnetmesszelle des zur Messdurchführung verwendeten kommerziellen Rheometers MCR 501 der Firma Anton Paar. Die Temperaturverteilung wurde während der Experimente ebenfalls nicht aufgezeichnet.
Gültigkeit besitzen die Modelle und Parametersätze unter vergleichbaren Messaufbauten für

- eine magnetische Induktion im äußeren Magnetfeld von 0 bis 300 mT,
- verzerrungsgeregelte sinusförmige Anregungen im Bereich geometrisch linearer Theorie, $\hat{\gamma} \leq 0.1$, mit einer Kreisfrequenz von $\omega = 2\pi \frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}$, sowie im

- stationären Zustand bei Belastungen konstanter Scherraten innerhalb des Bereich $|\dot{\tilde{\gamma}}| \leq 0.1\frac{1}{s}$.

Die Modellierung erfolgte unter der Vorgabe einer bestmöglichen Abbildung der Fließkurve. Daher sind die Vorhersagen der Fließkurve für alle Modellierungsansätze gleichermaßen gut.
Ebenfalls ist die Modellierung des Vorfließbereichs des Speichermoduls weitestgehend unabhängig von der Wahl des zugrunde gelegten Materialmodells. Das Nachfließverhalten des Speichermoduls wird am besten durch die auf dem rCROSS-BINGHAM-HOOKE Element und auf dem endochronen MAXWELL Element basierten Gesamtmodellen abgebildet, da diese im Gegensatz zum PRANDTL Element basierten Gesamtmodell keine ausgeprägten lokalen und globalen Maxima besitzen.
Die qualitativen Eigenschaften der Messergebnisse des Verlustmoduls, wie beispielsweise der qualitative Kurvenverlauf sowie die Spannweite des Maximums, werden ebenfalls von den auf dem rCROSS-BINGHAM-HOOKE und endochronen MAXWELL Element basierten Gesamtmodellen besser abgebildet als von dem PRANDTL Element basierten Gesamtmodell.
Abschließend ist festzustellen, dass die Modellierungsstrategie auf Basis des rCROSS-BINGHAM-HOOKE Elements genau dann zu empfehlen ist, wenn die Priorität auf der bestmöglichen Modellierung des Vorfließbereichs des von der Verzerrungsamplitude abhängigen Verlustmoduls liegt. Das endochrone MAXWELL Element erreicht marginal bessere Modellierungsergebnisse im Nachfließbereich des von der Schubverzerrungsamplitude abhängigen Verlustmoduls. (*Folgerung 25*)
Der Iterationsalgorithmus ist nach persönlichem Ermessen beendet worden, nachdem das Modellierungsergebnis als „bestmöglich“ definiert wurde. Daher ist die Implementierung eines objektiven Abbruchkriteriums in folgenden Arbeiten zu empfehlen. Außerdem kann die Modellierung unter Verwendung alternativer rheologischer Modellansätze weiter verbessert werden. In diesem Sinn wäre interessant, welche Modellvorhersagen das SCHWEDOFF Element [7] aus Abbildung 8.25 liefern würde. Das SCHWEDOFF Element beschreibt kinematische Verfestigung mit Sättigung entsprechend dem ARMSTRONG-FREDERICK [8] Gesetz. Es wird ebenfalls zur Modellierung des Materialverhaltens von Gelen (Giesekus 1994; S. 252) und Gelantinelösung (Reiner 1968; S. 166) verwendet.

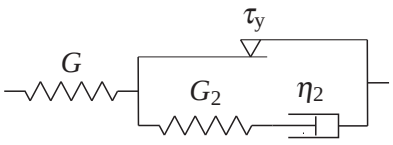


Abbildung 8.25: SCHWEDOFF Element

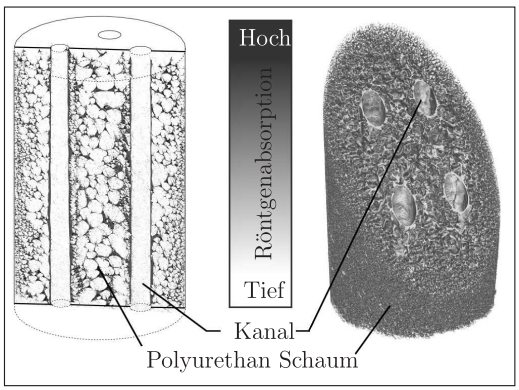
[7] (Reiner 1968; S. 167), (Bird et al. 1983; S. 13), (Krawietz 1986; S. 28), (Maugin 1992; S. 46), (Giesekus 1994; S. 252), (Bertram 2007; S. 44), (Shutov et al. 2011; S. 658)

[8] (Dettmer und Reese 2004; Abb. 1), (Bertram 2007; S. 225), (Shutov und Kreißig 2008; Abb. 1a), (Lion 2000a; Abb. 1), (Shutov et al. 2011)

9. Modellierung des Materialverhaltens eines magnetorheologischen Komposites

Im Folgenden wird das Materialverhalten eines magnetorheologischen Komposites (MRK) unter Druckbelastung innerhalb geometrisch linearer Theorie modelliert. Das Materialverhalten der magnetorheologischen Flüssigkeit wird dabei unter Verwendung der in Abschnitt 8.2 vorgestellten konstitutiven Beziehungen abgebildet. Das MRK besteht aus einer Polyurethan Schaumstoffmatrix mit vier Kanälen, die mit MRF befüllt sind. Die Schaumstoffmatrix ist in Abbildung 9.1(a) im Vergleich zu einem 1 Cent Stück dargestellt. Die entsprechende dreidimensionale Röntgen-Computertomographie Aufnahme (Abbildung 9.1(b)) wurde von DOHMEN [1] bereitgestellt. Die hierarchische Betrachtung des MRK auf Makro-, Meso-

(a) Polyurethan Schaumstoffmatrix nach Dohmen et al. (2014)



(b) Röntgen-Computertomographie der Polyurethan Schaumstoffmatrix nach Dohmen et al. (2014)

Abbildung 9.1: (a) Realer Probekörper der Polyurethan Schaumstoffmatrix im Vergleich zu einem 1 Cent Stück. (b) 3D Röntgen-Computertomographie Aufnahme der Schaumstoffmatrix von DOHMEN [1]. Die Polyurethan Schaumstoffmatrix besitzt eine Ausgangshöhe von $h_0 = 25\,\text{mm}$ und einen Durchmesser von $\varnothing = 15\,\text{mm}$. Die vier zur Befüllung mit MRF eingebrachten Kanäle besitzen je einen Durchmesser von $\varnothing_i = 2\,\text{mm}$.

und Mikroebene ist bereits in Abbildung 1.1 aufgezeigt. Die Herstellung der Schaumstoffmatrix sowie des MRK erfolgte am Institut für Leichtbau und Kunststofftechnik der Technischen Universität Dresden [1] und ist in Dohmen et al. (2014) beschrieben. Der Polyurethan Schaumstoffprobekörper besitzt eine Ausgangshöhe von $h_0 = 25\,\text{mm}$ und einen Durchmesser von $\varnothing = 15\,\text{mm}$. Die zur Befüllung mit MRF vorgesehenen Kanäle besitzen einen Durchmesser von $\varnothing_i = 2\,\text{mm}$.
Zur experimentellen Charakterisierung der magnetorheologischen Eigenschaften des MRK haben DOHMEN [1] und BORIN [2] eine mobile, rotationssymmetrische Magnetfeldeinheit um eine Zug-/Druckprüfmaschine der Firma *DYNA–MESS Prüfsysteme* konstruiert (Odenbach et al. 2014; Abb. 18). Die Richtung, entlang der die Prüfmaschine den Traversenweg u_z variieren und die aufgebrachte Kraft F_z regeln kann, sei im Folgenden als z-Richtung definiert. Die Magnetfeldrichtung innerhalb des Messraums verläuft parallel zur Kraftrichtung, d.h. in z-Richtung. Die Homogenität des äußeren, rotationssymmetrischen Magnetfelds wurde innerhalb des Messraums in Abhängigkeit der radialen Entfernung vermessen und beträgt 91% bei $r = 10\,\text{mm}$ (Odenbach et al. 2014; S. 28).

[1] Eike Dohmen; Technische Universität Dresden, Fakultät Maschinenwesen, Institut für Leichtbau und Kunststofftechnik

[2] Dmitry Borin; Technische Universität Dresden, Fakultät Maschinenwesen, Institut für Strömungsmechanik, Professur für Magnetofluiddynamik (Professor Odenbach)

Um das im Experiment gemessene, vom Magnetfeld abhängige Materialverhalten zu simulieren, wird der Druckversuch mit einem Finite Elemente Modell nachgebildet. Dies kann aufgrund des doppelt symmetrischen Aufbaus unter Berücksichtigung von Symmetriebedingungen mittels einem Viertel FE Modell erfolgen. Die Modellierungsstrategie des MR Kompositwerkstoffs ist in Abbildung 9.2 skizziert. Eingangsdaten

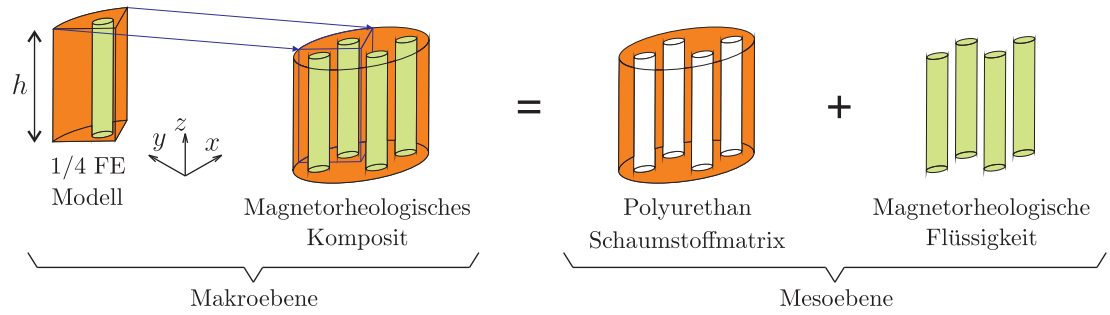


Abbildung 9.2: Modellierungsstrategie auf Grundlage mesoskopischer Eingangsdaten zur Simulation des Materialverhaltens des MRK auf Makroebene

des FE Modells sind Geometriedaten auf Mesoebene und die mesoskopischen Materialmodelle der Ausgangswerkstoffe inklusive identifizierter Materialparameter. Dazu zählen zum einen die phänomenologische Materialbeschreibung der Schaumstoffmatrix und zum anderen das Materialmodell der magnetorheologischen Flüssigkeit. Weil sich die Druckbelastung auf den Bereich geometrisch linearer Theorie beschränkt, kann das Materialverhalten mit dem technischen Spannungs- und Verzerrungsmaßen formuliert werden. Sie sind auf Seite 17 eingeführt und werden mit $\boldsymbol{\sigma} = \sigma_{ij}\,\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$ und $\boldsymbol{\varepsilon} = \varepsilon_{ij}\,\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$ bezeichnet.
Die Modellierung des Materialverhaltens der Schaumstoffmatrix sowie die Parameteridentifikation erfolgt in Abschnitt 9.1. Zur Simulation des Materialverhaltens des MRF kommt das in Abschnitt 8.2 beschriebene Materialmodell zur Anwendung. Aufgrund der kanalartigen Struktur der zur MRF Befüllung vorgesehenen Hohlräume und der Beschränkung auf Beanspruchungen im Rahmen geometrisch linearer Theorie, genügt es, das festkörperähnliche Teilmodell des MRF zu betrachten. Unter diesen Bedingungen wird das für die magnetorheologische Flüssigkeit zu berücksichtigende Teilmaterialmodell in Abschnitt 9.2 auf Grundlage der in Abschnitt 8.2 identifizierten Materialparameter abgeleitet. Die Berechnung der Materialantwort des MRK zu der gegebenen Drucklast erfolgt abschließend in Abschnitt 9.3.

9.1 Phänomenologische Modellierung des Materialverhaltens eines Polyurethan Schaumstoffs

Um das effektive (mesoskopische) Materialverhaltens des offenzelligen PU Schaumstoffs zu modellieren, wird in dieser Arbeit ein phänomenologischer Ansatz gewählt. Zur experimentellen Untersuchung des Materialverhaltens wurden Druckversuche bei zwei Traversengeschwindigkeiten $\dot{u}_z = -0.05\,\frac{\text{mm}}{\text{s}}$ und $\dot{u}_z = -0.1\,\frac{\text{mm}}{\text{s}}$ von DOHMEN [1] und BORIN [2] durchgeführt. Die Längsachse des Schaumstoffprobekörpers, welche nach Abbildung 1.1 identisch der Längsachse einer zylinderförmigen Hohlraumstruktur ist,

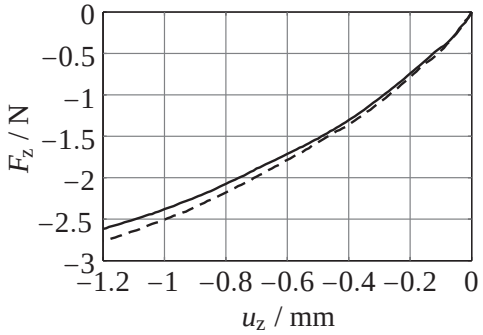


Abbildung 9.3: Druckversuch an der PU Schaumstoffmatrix für eine konstante Traversengeschwindigkeit $\dot{u}_z = -0.05\,\frac{\text{mm}}{\text{s}}$: —— und $\dot{u}_z = -0.1\,\frac{\text{mm}}{\text{s}}$: − − − bis $\text{MIN}\{u_z\} = -1.2\,\text{mm} \rightarrow \text{MIN}\{\varepsilon_{zz}\} \approx -0.05$

wurde entsprechend Abbildung 9.2 in z-Richtung angeordnet. In Abbildung 9.3 ist die Koordinate F_z der auf den Probekörper wirkenden mechanischen Kraft in Abhängigkeit vom Traversenweg der Zug-/Druckprüfmaschine u_z dargestellt. Die Kraft wird positiv als Zugkraft eingeführt. Negative Werte der Kraftkoordinate F_z beschreiben somit einen Druckzustand. Die Verschiebung u_z der Traverse der Zug-Druck-Prüfmaschine wird ebenfalls positiv in Zugrichtung definiert. Die technische Dehnung ergibt sich über $\varepsilon_{zz} = u_z/h_0$. Da die betragsmäßig größte Verschiebung bei $\mathrm{MIN}\{u_z\} = -1.2\,\mathrm{mm}$ auftritt, ergibt sich $\mathrm{MIN}\{\varepsilon_{zz}\} \approx -0.05$. Die Beanspruchung liegt somit im Bereich geometrisch linearer Theorie.
Die Messdaten aus Abbildung 9.3 sind Mittelwerte von Einzelmessungen. Die Streuungen sind um eine Größenordnung kleiner als die Differenz beider Messungen. Daher ist es zulässig, die Differenz beider Messungen als ratenabhängigen Effekt zu interpretieren. Zusätzlich sind für den Schaumstoff ratenabhängige Eigenschaften entsprechend Abschnitt 3.5.3 mithilfe von Relaxationsversuchen indirekt nachgewiesen. Auf den Nachweis der Existenz einer Gleichgewichtskurve, definiert im Sinne von Haupt (2002; Abb. 6.15), kann verzichtet werden, da diese Annahme für polymere Schaumstoffe weitläufig akzeptiert ist. Daher besitzt der Schaumstoff innerhalb der definierten Belastungsgrenzen ein linear viskoelastisches, festkörperähnliches Materialverhalten. Zur Modellierung des viskoelastischen Materialverhaltens des PU Schaumstoffs wird daher ein ZENER Modell nach Abbildung 9.4 unterstellt. Das ZENER Modell wird dreidimensional verallgemeinert, indem isotrope konstitutive Beziehungen für den deviatorischen Anteil und Kugelanteil formuliert werden. Der deviatorische Anteil der Spannung ist mit $\mathbf{s} = s_{ij}\,\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$ und der der

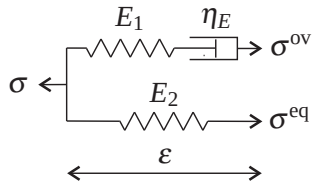


Abbildung 9.4: ZENER Modell zur Beschreibung des Materialverhaltens der PU Schaumstoffmatrix

Verzerrung mit $\mathbf{e} = e_{ij}\,\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$ bezeichnet. Die Spur der Deviatoren ergeben sich definitionsgemäß zu Null, $s_{ii} = 0$ und $e_{ii} = 0$. Die Gesamtspannung ergibt sich nach

$$\sigma_{kl} = \sigma^{eq}_{kl} + \sigma^{ov}_{kl} \tag{9.1}$$

$$\sigma^{ov}_{kl} = s^{ov}_{kl} + \frac{1}{3}\sigma^{ov}_{pp}\,\delta_{kl}\ . \tag{9.2}$$

Die Gesamtverzerrung setzt sich zusammen aus

$$\varepsilon_{kl} = e_{kl} + \frac{1}{3}\varepsilon_{pp}\delta_{kl}\ . \tag{9.3}$$

Der Überspannungsanteil ist beschrieben durch

$$\dot{s}^{ov}_{kl} + \frac{2G_1}{\eta_G}s^{ov}_{kl} = 2G_1\,\dot{e}_{kl} \tag{9.4}$$

$$\dot{\sigma}^{ov}_{pp} + \frac{3K_1}{\eta_K}\sigma^{ov}_{pp} = 3K_1\,\dot{\varepsilon}_{pp} \tag{9.5}$$

$$G_1 = \frac{E_1}{2(1+\nu)} \tag{9.6}$$

$$K_1 = \frac{E_1}{3(1-2\nu)} \tag{9.7}$$

$$\frac{2G_1}{\eta_G} = \frac{E_1}{\eta_E} \tag{9.8}$$

$$\frac{3K_1}{\eta_K} = \frac{E_1}{\eta_E}\ . \tag{9.9}$$

Der Gleichgewichtsanteil beträgt

$$\sigma^{eq}_{kl} = 2G_2 e_{kl} + K_2\varepsilon_{pp}\delta_{kl} \tag{9.10}$$

$$G_2 = \frac{E_2}{2(1+\nu)} \tag{9.11}$$

$$K_2 = \frac{E_2}{3(1-2\nu)}\ . \tag{9.12}$$

Als Freiwerte des Materialmodells werden E_1, η_E, E_2 und ν ausgewählt. Sie werden im Folgenden aus den beiden Druckversuchen identifiziert. Alle weiteren Materialparameter können über die oben eingeführten Beziehungen abgeleitet werden. Zur Bestimmung der Parameter wird zunächst die Summe der beiden Elastizitätsmoduli

$$E_1 + E_2 = \frac{\left.\frac{d\sigma_{zz}}{dt}\right|_{t=0}}{\dot{\varepsilon}} \tag{9.13}$$

ermittelt. Dazu wird die Spannung $\sigma_{zz} = F_z/A$ ermittelt, welche auf die Grundfläche A des Schaumstoffprobekörpers im unverformten Zustand bezogen ist. Die Anfangstangente $\frac{dF_z}{dt}\big|_{t=0}$ ist ebenfalls aus experimentellen Daten ablesbar. Anschließend werden E_1 und η_E solange variiert, bis beide Druckversuche abgebildet sind. Letztendlich erhält man

$$E_1 = 0.8\,\text{MPa} \tag{9.14}$$

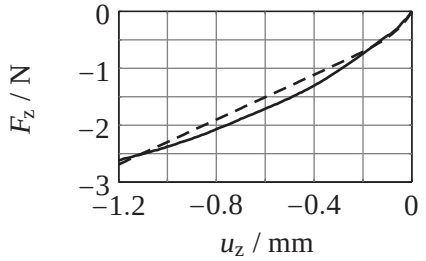
$$\eta_E = 0.8\,\text{MPa s} \tag{9.15}$$

$$E_2 = 0.3\,\text{MPa}\,. \tag{9.16}$$

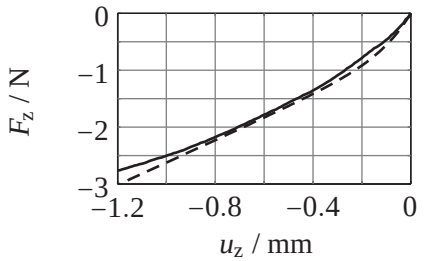
Die Querkontraktionszahl wird entsprechend Lakes (1987) sowie Gibson und Ashby (1997; Abb. 5.12)

$$\nu = 0.4 \tag{9.17}$$

angenommen. Die Modellvorhersagen im Vergleich zu den Messergebnissen sind in Abbildung 9.5 dargestellt.



(a) konstante Traversengeschwindigkeit $\dot{u}_z = -0.05\,\frac{\text{mm}}{\text{s}}$; Modellvorhersage: − − − , Messung: ——



(b) konstante Traversengeschwindigkeit $\dot{u}_z = -0.1\,\frac{\text{mm}}{\text{s}}$; Modellvorhersage: − − −, Messung: ——

Abbildung 9.5: Modellvorhersage des ZENER Modells mit $E_1 = 0.8\,\text{MPa}$, $\eta_E = 0.8\,\text{MPa s}$, $E_2 = 0.3\,\text{MPa}$ und $\nu = 0.4$, im Vergleich zu den Messergebnissen der Druckversuche an der PU Schaumstoffmatrix

9.2 Materialmodell eines magnetorheologischen Fluids unter Berücksichtigung geometrischer Restriktionen für die Simulation des Verhaltens eines magnetorheologischen Komposites

In Kapitel 8 sind konstitutive Gleichungen zur Modellierung des Materialverhaltens eines magnetorheologischen Fluids beschrieben. In den dafür zugrunde gelegten Experimenten konnte sich das MRF uneingeschränkt deformieren. Dies trifft jedoch für das in den Kanälen des MRK befindlichen MRF nicht zu. Das Verhalten des MRF unterliegt geometrischen Restriktionen. Für die Berechnung in Abschnitt 9.3 wird daher als Arbeitshypothese angenommen, dass in der magnetorheologischen Flüssigkeit kein fest-flüssig Übergang stattfindet, sondern dass die Materialeigenschaften des Vorfließbereichs während des gesamten Deformationsvorgangs dominieren. Der Vorfließbereich des Materialmodells aus Abbildung 8.4 besteht aus der HOOKEschen Feder $G_2(B)$ und dem parallel geschalteten rCROSS-MAXWELL Element. Zur groben Abschätzung des Verhaltens wird der Vorfließbereich linearisiert, d.h. nichtlineare Anteile des rCROSS-MAXWELL Elements werden vernachlässigt. Es geht somit in das ZENER Modell nach Abbildung

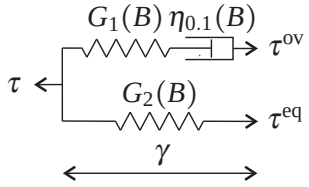


Abbildung 9.6: ZENER Modell zur Abschätzung des effektiv wirksamen Materialverhaltens der magnetorheologischen Flüssigkeit innerhalb eines Kanals des magnetorheologischen Komposits

9.6 über. (*Folgerung 26*) Um es für die FE Berechnung aufzubereiten, wird das ZENER Modell analog zu den Gleichungen (9.1) bis (9.12) dreidimensional verallgemeinert, indem isotrope konstitutive Beziehungen für den deviatorischen Anteil und Kugelanteil formuliert werden. Dies stellt aus zwei Gründen eine akzeptierbare, erste grobe Näherung dar. Zum einen induziert das äußere Feld der magnetischen Induktion, welches von der mobilen Magnetfeldeinheit innerhalb des Messraums in z-Richtung aufgebracht wird, in magnetisierbarem Material eine Vorzugsrichtung, die nicht nur die z-Komponente der magnetischen Anziehungskräfte beeinflusst. Zum anderen stimmten in den experimentellen Untersuchungen der Momentenvektor im Kegel-Platte Rheometer, der Kraftvektor in der Zug-/Druckprüfmaschine und der Vektor der magnetischen Induktion überein.
Zur Parametrisierung der konstitutiven Beziehungen werden die Materialparameter $G_2(B)$, $G_1(B)$ und $\eta_{0.1}(B)$ aus Tabelle 8.4 übernommen. Da in Abschnitt 9.3 der Druckversuch am MRK unter äußerer magnetischer Feldeinwirkung durchgeführt wird, deren magnetische Induktionen jedoch nicht in Tabelle 8.4 aufgeführt sind, werden die Materialparameter der fehlenden Magnetfelder durch lineare Interpolation berechnet. Die Materialparameter G_1, $\eta_{0.1}$ und G_2 des linearisierten Materialmodells sind abschließend in Tabelle 9.1 zusammengefasst. Weil für das MRF aus Abschnitt 2.2 die Volumenkonzentration der Car-

Tabelle 9.1: Materialparameter des ZENER Modells nach Abbildung 9.6 für diejenigen Magnetfelder unter denen die Druckversuche aus Abschnitt 9.3 durchgeführt werden (Dohmen et al. 2014); Das ZENER Modell resultiert aus der Linearisierung des Materialmodells für MRF aus Abschnitt 8.2.

B / mT	G_1 / Pa	$\eta_{0.1}$ / Pa s	G_2 / Pa
0	911	310	0
50	$2.99358 \cdot 10^5$	$1.3801 \cdot 10^4$	$4.93827 \cdot 10^5$
100	$2.48292 \cdot 10^5$	$1.7068 \cdot 10^4$	$1.400760 \cdot 10^6$
150	$1.97226 \cdot 10^5$	$2.0336 \cdot 10^4$	$2.307692 \cdot 10^6$
200	$1.69060 \cdot 10^5$	$1.6231 \cdot 10^4$	$2.558870 \cdot 10^6$
240	$146527 \cdot 10^5$	$1.2947 \cdot 10^4$	$2.759812 \cdot 10^6$

bonyleisen Partikel 40 vol% beträgt, wird die Querkontraktionszahl $\nu = 0.4$ in guter Näherung über das arithmetische Mittel der Querkontraktionszahlen von Carbonyleisen und der nahezu inkompressiblen Trägerflüssigkeit abgeschätzt. Somit können alle Materialparameter aus den Gleichungen (9.6) bis (9.9), (9.11) und (9.12) unter Berücksichtigung von $\eta_{0.1}(B) = \eta_G$ berechnet werden.

9.3 Simulation des Druckverhaltens eines magnetorheologischen Kompositesbei verschiedenen Stärken der äußeren magnetischen Induktion

Die Simulation der Druckversuche an dem MRK unter verschiedenen Magnetfeldern erfolgt mit dem Programmsystem MSC.Marc/Mentat®. Weil das MRK doppelt symmetrisch aufgebaut ist, genügen Berechnungen an einem Viertel FE Modell. Dieses sowie das globale raumfeste Koordinatensystem sind in Abbildung 9.7(a) dargestellt. Abbildung 9.7(b) zeigt für $B = 150\,\mathrm{mT}$ die aktuelle Konfiguration des MRK im Verhältnis zur Ausgangskonfiguration, welche durch das rote Drahtmodell angedeutet ist. Aufgetragen ist die numerische Modellvorhersage der Normalspannung σ_{zz}. Die symmetrischen Eigenschaften des MRK korrespondieren mit den Symmetriebedingungen

$$u_x(x = 0) = 0 \tag{9.18}$$
$$u_y(y = 0) = 0 \tag{9.19}$$

für das Viertel FE Modell. Weiterhin ist die Verschiebung am unteren Rand in z-Richtung verhindert

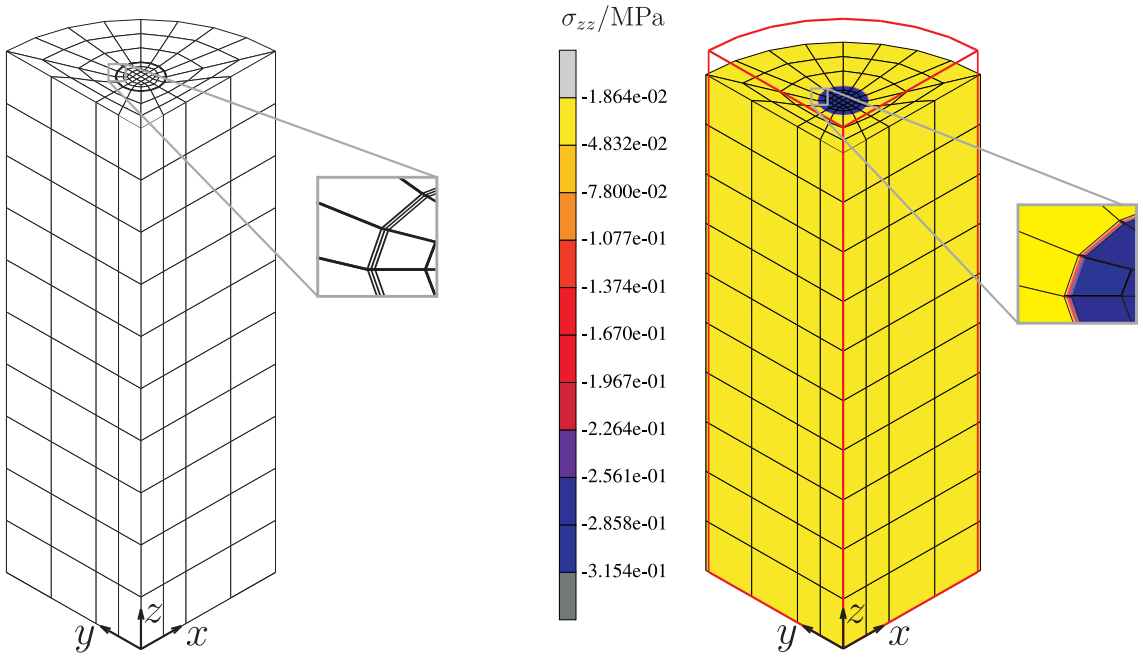
$$u_z(z = 0) = 0\ . \tag{9.20}$$

Die Anregung wird verschiebungsgesteuert auf dem oberen Rand mit konstanter Geschwindigkeit

$$u_z[z = h(t)] = \dot{u}_z\, t \tag{9.21}$$

$$\dot{u}_z = -0.1\,\frac{\text{mm}}{\text{s}} \tag{9.22}$$

aufgebracht. Der obere Rand ist in der Ausgangskonfiguration durch $h(t=0) = h_0$ beschrieben. In der Momentankonfiguration befindet er sich bei $h(t) = h_0 + u_z(z = h_0, t)$. Reibungseffekte an der Grund- und Deckfläche werden vernachlässigt. Beachtet man, dass die Deformation im Bereich geometrisch linearer Theorie liegt, ist diese Vereinfachung vertretbar. Das FE Modell ist ein rein mechanisches Modell. Der Einfluss des Magnetfeldes wird durch die vom Magnetfeld abhängigen Materialparametersätze aus Tabelle 9.1 berücksichtigt. Da das von DOHMEN [1] und BORIN [2] im Experiment realisierte äußere Magnetfeld in guter

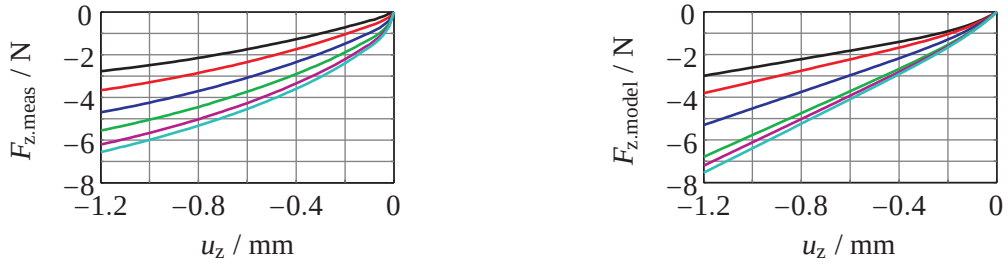


(a) 1/4 Finite Elemente Modell des MRK

(b) σ_{zz} bei $u_z = -1.22$mm für $B = 150$mT

Abbildung 9.7: (a) 1/4 Finite Elemente Modell zur Berechnung des Reaktionskraftverlaufs in Abhängigkeit der Verschiebung für die Verschiebungsgeschwindigkeit $\dot{u}_z = -0.1\frac{\text{mm}}{\text{s}}$. (b) Exemplarische Darstellung der Längsspannung für $B = 150\,\text{mT}$.

Näherung homogen war, ist diese Art der Modellierung zur Abschätzung der Druckkraft zulässig. Das Materialverhalten der polymeren Schaumstoffmatrix ist unabhängig vom äußeren Magnetfeld. Daher werden zur Simulation aller Druckversuche die in Abschnitt 9.1 identifizierten Materialparameter verwendet. Die Messergebnisse und Modellvorhersagen der Druckversuche für $B = \{0, 50, 100, 150, 200, 240\}\,\text{mT}$ sind in den Abbildungen 9.8(a) und 9.8(b) dargestellt. Die Größenordnungen der Messergebnisse und Modellvorhersagen stimmen gut überein. Die Zunahme der Druckkraft in Abhängigkeit von der magnetischen Induk-

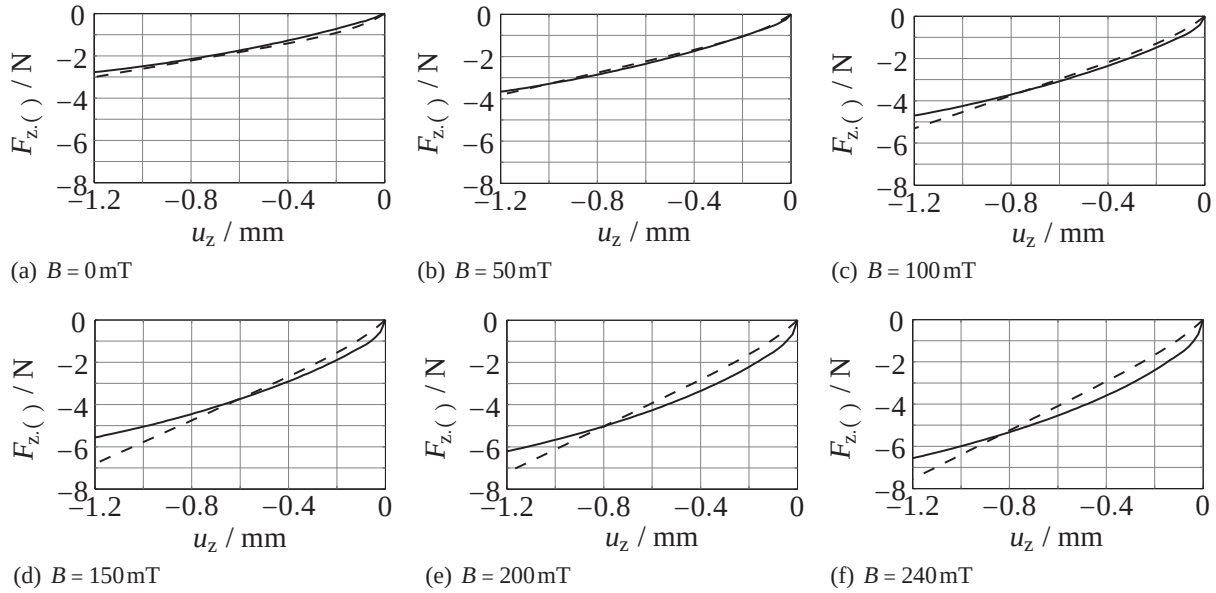


(a) Experimentelle Messergebnisse

(b) Numerische Modellvorhersagen

Abbildung 9.8: Druckversuche an dem MRK nach Abbildung 9.1(a) für $\dot{u}_z = -0.1\,\frac{\text{mm}}{\text{s}}$ bei $B = 0\,\text{mT}$ ——, $B = 50\,\text{mT}$ ——, $B = 100\,\text{mT}$ ——, $B = 150\,\text{mT}$ ——, $B = 200\,\text{mT}$ —— und $B = 240\,\text{mT}$ ——

tion B kann ebenfalls wiedergegeben werden. Lediglich die Krümmung der Messkurven wird vom Modell nicht vollends abgebildet. Dies ist in Abbildung 9.9 erkennbar. Es sind Messergebnisse und Modellvorhersagen für je einen Druckversuch bei entsprechendem Magnetfeld gegenübergestellt. Nichtsdestotrotz sind



(a) $B = 0\,\mathrm{mT}$ (b) $B = 50\,\mathrm{mT}$ (c) $B = 100\,\mathrm{mT}$

(d) $B = 150\,\mathrm{mT}$ (e) $B = 200\,\mathrm{mT}$ (f) $B = 240\,\mathrm{mT}$

Abbildung 9.9: Druckversuche an dem magnetorheologischen Komposit nach Abbildung 9.1(a) für $\dot{u}_z = -0.1\,\frac{\mathrm{mm}}{\mathrm{s}}$; Experimentelle Messergebnisse $F_{z.meas}$: ——— , Numerische Modellvorhersagen $F_{z.model}$: – – –

die Modellvorhersagen zufriedenstellend. Die Abweichungen zwischen Messungen und Modellvorhersagen sind in Abbildung 9.10 mittels des Verhältnisses $F_{z.meas}/F_{z.model}$ quantifiziert. Bis auf den Bereich unmittelbar nach der Lastaufbringung, liegt das Verhältnis zwischen $\frac{1}{2} < \frac{F_{z.meas}}{F_{z.model}} < 2$. Für Verschiebungen

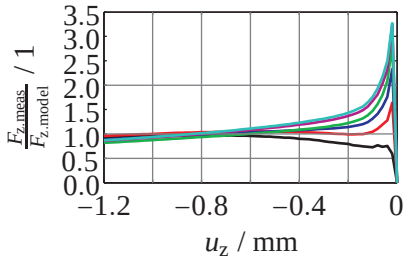
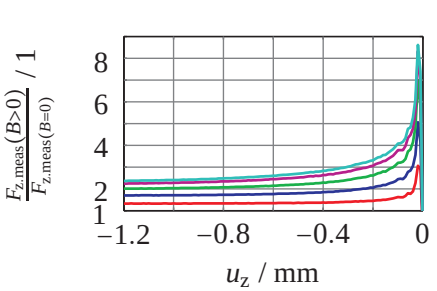


Abbildung 9.10: Verhältnis von Messung zu Simulation der Druckkraft für $B = 0\,\mathrm{mT}$ ——— , $B = 50\,\mathrm{mT}$ ——— , $B = 100\,\mathrm{mT}$ ——— , $B = 150\,\mathrm{mT}$ ——— , $B = 200\,\mathrm{mT}$ ——— und $B = 240\,\mathrm{mT}$ ———

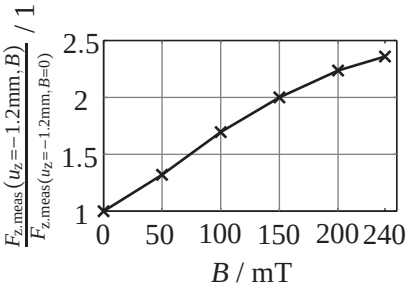
$u_z < -0.4\,\mathrm{mm}$ ist das Verhältnis nahezu Eins. Die für MRF unter oszillatorischer Schubbeanspruchung identifizierten Materialparameter liefern somit auch für monotone Druckversuche im Bereich geometrisch linearer Theorie brauchbare Modellvorhersagen, wenngleich der abgesicherte Anwendungsbereich des Modells streng genommen überschritten ist. Der gemessene *magnetorheologische Effekt*

$$E_{MR} = \frac{F_{z.meas}(B > 0)}{F_{z.meas}(B = 0)} \tag{9.23}$$

ist in Abbildung 9.11(a) für $B > 0$ dargestellt. Für $u_z < -0.6\,\mathrm{mm}$ ist er für alle Magnetfelder in guter Näherung konstant. Für diesen Bereich kann der MR Effekt in Abhängigkeit vom Magnetfeld aufgetragen werden. Stellvertretend dafür ist das Verhältnis der Druckkräfte bei der Verschiebung $u_z = -1.2\,\mathrm{mm}$, welches in Abbildung 9.11(b) dargestellt ist.



(a) Magnetorheologischer Effekt in Abhängigkeit von u_z für $B = 50\,mT$ ——, $B = 100\,mT$ ——, $B = 150\,mT$ ——, $B = 200\,mT$ —— und $B = 240\,mT$ ——



(b) Magnetorheologischer Effekt im Bereich $u_z < -0.6\,mm$

Abbildung 9.11: Quantifizierung des magnetorheologischen Effekts der Druckversuche

10. Zusammenfassung und Ausblick

Magnetorheologische Materialien werden in einer Vielzahl von Applikationen verwendet. In Abhängigkeit vom Ziel der Anwendung ist meist die Einbettung der magnetorheologischen Flüssigkeit in eine äußere Hülle erforderlich. Das in dieser Arbeit betrachtete magnetorheologische Komposit besteht aus einer polymeren Schaumstoffmatrix mit geradlinigen Kanälen, welche mit MRF befüllt sind. Ziel war unter anderem die Berechnung der makroskopischen Eigenschaften des magnetorheologischen Verbundwerkstoffs unter Druckbelastung im geometrisch linearen Bereich. Für diese Aufgabe hatte sich die phänomenologische Materialbeschreibung der Ausgangswerkstoffe als effektiv erwiesen, um die konstitutiven Eingangsdaten für ein Finite Elemente Modell bereitzustellen.
Für den hier betrachteten Verbundwerkstoff konnten mit der Mikro-, Meso- und Makroebene drei charakteristische Skalen definiert werden. Auf der Mikroskala sind Lufteinschlüsse und Stege der polymeren Schaumstoffmatrix optisch aufgelöst. Ebenfalls sind die in die Trägerflüssigkeit suspendierten magnetisierbaren Partikel der magnetorheologischen Flüssigkeit erkennbar. Die daraus resultierenden mikroskopischen Effekte werden auf der Mesoebene „verschmiert“ wahrgenommen. Im Hinblick auf die Modellierung des makroskopischen Materialverhaltens des MRK war es nicht erforderlich, die komplexen Prozesse auf der Mikroebene zu modellieren, um deren effektive mesoskopische Wirkung im Anschluss mittels Homogenisierungsverfahren zu bestimmen. Stattdessen wurden die effektiven Eigenschaften des Polyurethan Schaumstoffs und des MRF auf der Mesoebene mittels phänomenologischer Materialgesetze beschrieben.
Die Auswahl und Durchführung von Charakterisierungsexperimenten für die phänomenologische Materialbeschreibung war maßgeblich geprägt durch den fluiden Grundcharakter des MRF. Unter diesen Bedingungen haben sich scherrheologische Untersuchungen als Stand der Technik etabliert. Zur Materialcharakterisierung und zur Parameteridentifikation kamen sowohl monotone Versuche zur Bestimmung der Fließkurve als auch oszillatorische verzerrungsgesteuerte Experimente zur Ermittlung von Speicher- und Verlustmodul zur Anwendung. Auf dieser Grundlage wurden zur mesoskopischen Materialbeschreibung phänomenologische Materialmodelle motiviert, die sowohl die qualitativen als auch quantitativen Eigenschaften von MRF erfassen. Eine Voraussetzung für die gezielte Modellauswahl war die in Abschnitt 4 erarbeitete phänomenologische Klassifizierung von Materialen in drei Stoffklassen. Im Rahmen dieser Stoffklassifizierung wurden MRF, die zur Klasse von Materialien mit fest-flüssig Übergang zählen, eindeutig von Festkörpern und Flüssigkeiten abgegrenzt. Demnach müssen die zur Modellierung des Materialverhaltens von MRF infrage kommenden Materialmodelle eine Fließkurve und eine von Null verschiedene Gleichgewichtsspannung besitzen. Folglich beschränkte sich die Menge aller Materialmodelle zur Beschreibung der Gleichgewichtsspannung auf diejenigen, die eine Fließkurve besitzen. Hierfür kommen beispielsweise das PRANDTL Element nach Boisly et al. (2014b), das BINGHAM-HOOKE Element entsprechend Boisly et al. (2017), das rCROSS-BINGHAM-HOOKE Element aus Abschnitt 5 oder das endochrone MAXWELL Element aus Abschnitt 6 infrage.
Zum Aufstellen und Auswerten des aus Teilmodellen bestehenden Gesamtmodells, war es unerläßlich, die Vorhersagen der einzelnen Teilmodelle zu kennen. Erst mit Kenntnis der Modellantworten auf definierte Belastungen, konnten die Teilmodelle gezielt zu einem Gesamtmodell zusammengefügt werden, welches die im Experiment ermittelten Materialreaktionen abbildete. Daher wurden in den Abschnitten 5 und 6 zunächst die Modellvorhersagen des rCROSS-BINGHAM-HOOKE Elements und des endochronen MAXWELL Elements bestimmt. Dies umfasste die Ermittlung der Speicher- und Verlustmoduli sowie die Berechnung der Fließkurven. Ebenfalls wurden die normierten Intensitäten der Höherharmonischen bestimmt. Somit konnten die normierten Intensitäten als effektives Werkzeug zur Validierung der numerisch implementierten Teilmodelle verwendet werden. Ausgeprägte Knicke sowie Sprünge innerhalb normierter Intensitäten deuten meist auf unphysikalisches Verhalten hin und können infolge numerischer Probleme des imple-

mentierten Materialmodells entstehen. Für das PRANDTL Element, den rCROSS Dämpfer, das rCROSS-MAXWELL Element und das BINGHAM-HOOKE Element wurden die Modellvorhersagen für Speicher- und Verlustmoduli sowie für Höherharmonische und normierte Intensitäten bereits in Boisly et al. (2014b), Boisly et al. (2015) und Boisly et al. (2017) veröffentlicht. Daher sind sie nicht Teil dieser Arbeit.
Des Weiteren wurden für diese Materialfunktionen charakteristische Punkte identifiziert, dessen Absolutwerte und deren Lage mit Materialparametern des Modells in Verbindung gebracht werden konnten. Unter charakteristischen Punkten sind markante Punkte, wie beispielsweise das Maximum des Verlustmoduls gemeint, die man folglich in Experimenten problemlos identifizieren kann. Mit Kenntnis dieser charakteristischen Punkte war es möglich, Gleichungen zur Bestimmung der Materialparameter aufzustellen. Diese wurden iterativ und ohne Anwendung rein mathematisch basierter, nichtlinearer Optimierungsalgorithmen gelöst. Um für die Teilmodelle den Zusammenhang zwischen charakteristischen Punkten und Materialparametern bestimmen zu können, war es notwendig, das bereichsweise dominierende Materialverhalten zu ermitteln. Dafür erwiesen sich LISSAJOUS Diagramme als sehr nützliches Werkzeug. In diesem Sinn wurden die LISSAJOUS Diagramme des komplexeren Gesamtmodells mit den LISSAJOUS Diagrammen der weniger komplexen Teilmodelle, welche aus den Grenzfällen des Gesamtmodells resultierten, verglichen. Durch diese Grenzfallanalyse konnte das komplette Materialverhalten des komplexeren Gesamtmodells abschnittsweise auf weniger komplexere Modelle, für die analytische Ausdrücke der charakteristischen Punkte existierten, zurückgeführt werden. Das Analogieprinzip ermöglichte es, zunächst analytische Ausdrücke für die charakteristischen Punkte des komplexeren Gesamtmaterialmodells zu postulieren und anschließend numerisch zu verifizieren. Somit gewährleistete das Analogieprinzip die Identifikation der Materialparameter des konstitutiven Modells, dessen Antwortverhalten zu den aufgeprägten Belastungen nicht mehr rein analytisch berechenbar war. Da die untersuchten Gesamtmodelle zur Stoffklasse der Materialien mit fest-flüssig Übergang zählen, nahmen die Fließspannung sowie die pseudo Fließspannung bei der Parameteridentifikation eine besondere Rolle ein. Grund dafür ist, dass die Fließspannung das Materialverhalten in einen Vor- und Nachfließverhalten unterteilt. Daher wurden in Abschnitt 7 allgemein übliche Vorschläge zur Bestimmung der Fließspannung untersucht und exemplarisch für Flüssigkeiten mit Fließspannung sowie nichtlinear viskoelastische Flüssigkeiten ausgewertet. Unter Berücksichtigung der für die Modellierung des Verhaltens der magnetorheologischen Flüssigkeit zur Verfügung stehenden Messergebnisse, die aus Fließkurven sowie Speicher- und Verlustmoduli bestehen, wurde ebenfalls eine geeignete Methode zur Identifikation der Fließspannung vorgeschlagen. In diesem Sinn hatte es sich als zielführend herausgestellt, die dynamische Fließspannung sowie die kritische Schubverzerrung aus verzerrungsgesteuerten Amplitudensweeps einzubeziehen.
Die Modellierung des Materialverhaltens des MRF unter Scherbeanspruchung erfolgte in Abschnitt 8. Diese unterteilte sich in die Modellierung des Materialverhaltens ohne dem Einfluss und mit dem Einfluss eines äußeren Magnetfeldes. Bei Abwesenheit eines äußeren Magnetfeldes verhält sich die magnetorheologische Flüssigkeit wie eine normale Suspension. Zur Beschreibung dessen wurde das rCROSS-MAXWELL Element nach Boisly et al. (2015) verwendet. Für die Modellierung des Verhaltens bei Anwesenheit eines äußeren Magnetfeldes wurden drei verschiedene Modellansätze erarbeitet und gegenübergestellt. Die Modellansätze ergaben sich aus der Forderung, dass das ausgeprägte Maximum des Verlustmoduls auf plastisches Fließen zurückzuführen ist. Diese Forderung erfüllen im Allgemeinen rheologische Modelle mit Fließspannung und pseudo Fließspannung. Ausgangspunkt der Untersuchung stellte die Parallelschaltung aus einem rCROSS-BINGHAM-HOOKE Element und dem rCROSS-MAXWELL Element dar. Dieses Modell wurde auf eine Parallelschaltung aus PRANDTL Element und rCROSS-MAXWELL Element reduziert, um die Anzahl der Materialparameter zu verringern. Allerdings zeigte sich, dass das PRANDTL Element basierte Gesamtmodell nicht in der Lage ist, die qualitativen Eigenschaften der Messergebnisse zur Zufriedenheit des Autors abzubilden. Es musste geschlussfolgert werden, dass das ausgeprägte Maximum im Verlustmodul zunächst notwendig aber keinesfalls hinreichend dafür ist, eine zufriedenstellende Modellierung gewährleisten zu können. Beispielsweise ist die Spannweite des Maximums des Verlustmoduls für die Modellierungsgüte gleichermaßen wichtig. Der Verlustmodul des auf dem rCROSS-BINGHAM-HOOKE Element basierten Gesamtmodells besitzt die erforderliche Spannweite, der des PRANDTL Element basierten Gesamtmodells nicht. Infolgedessen ist die Modellvorhersage für den Verlustmodul des PRANDTL Element basierten Gesamtmodells abschnittsweise schlechter als die des rCROSS-BINGHAM-HOOKE Element basierten Gesamtsystems. Daher wurde das PRANDTL Element im dritten Modellvorschlag durch ein endochrones MAXWELL Element ersetzt. Die Anzahl der Materialparameter musste demnach nicht

erhöht werden. Der endochrone Modellierungsansatz ergab sich aus dem Ziel, das in den Messergebnissen festgestellte allmähliche Ansteigen des Verlustmoduls abbilden zu können. Da das endochrone MAXWELL Element eine Flüssigkeit mit pseudo Fließspannung ist, welche plastisches Fließen ohne Verwendung einer Fließfunktion und Fließbedingung modelliert, tritt das Ansteigen des Verlustmoduls nicht instantan sondern kontinuierlich ein. Die Vorhersagen für die Verlustmoduli des sich ergebenden Gesamtmodells, bestehend aus der Parallelschaltung eines endochronen MAXWELL Elements und eines rCROSS-MAXWELL Elements, waren im Bereich des Maximums zufriedenstellend. Im plateauartigen Anfangsbereich des Verlustmoduls fallen die Vorhersagen gegenüber denen des rCROSS-BINGHAM-HOOKE Element basierten Gesamtmodells etwas schlechter aus. Die Identifikation der Materialparameter erfolgte für alle drei Gesamtmodelle iterativ auf Basis charakteristischer Punkte. Der Abbruch der Identifikationsalgorithmen erfolgte nach subjektiven Gesichtspunkten. Da die Modellvorhersagen auf Basis der subjektiv identifizierten Materialparameter ausreichend gut mit den Messungen übereinstimmten, konnte in dieser Arbeit auf die Verwendung eines objektiven Abbruchkriteriums in Verbindung mit mehr oder weniger rein mathematisch arbeitenden nichtlinearen Optimierungsverfahren verzichtet werden. Die identifizierten Materialparameter wurden anschließend für die überschlägige Abschätzung der Druckkräfte am magnetorheologischen Komposit genutzt.

Die Simulation der Druckversuche am magnetorheologischen Komposit bei verschiedenen äußeren Magnetfeldern erfolgte in Abschnitt 9 mittels einem Viertel Finite Elemente Modell mit entsprechenden Symmetriebedingungen. Die Modellvorhersagen wurden mithilfe des Finite Elemente Programmsystems MSC.Marc/Mentat® numerisch ermittelt. Sowohl der polymeren Schaumstoffmatrix als auch der magnetorheologischen Flüssigkeit konnten unter der vorliegenden Belastung linear viskoelastische festkörperähnliche Materialeigenschaften unterstellt werden. Für das MRF stellt dies eine grobe Näherung dar, welche aufgrund der geometrischen Restriktionen auf Mesoebene motiviert sind. Ein ausgeprägtes Fließverhalten war somit, für das in die Kanäle der Schaumstoffmatrix eingebrachte MRF, nicht zu erwarten. Im Rahmen der auf den geometrisch linearen Bereich eingeschränkten Beanspruchung, ist das festkörperähnliche Verhalten des MRF dominant. Als Resultat dieser Arbeitshypothese reduzierte sich das in Abschnitt 8 ermittelte viskoplastische Materialverhalten auf den linear viskoelastischen Materialanteil, der bereits in kommerziell verfügbaren FE Programmen implementiert ist. Somit konnten die Druckkräfte im geometrisch linearen Bereich mittels des kommerziellen Finite Elemente Programmsystems MSC.Marc/Mentat® grob abgeschätzt werden. Es ergaben sich zufriedenstellende Ergebnisse.

Für weiterführende Projekte verbleiben einige Aufgabenstellungen, die im Rahmen dieser Arbeit nicht mehr bearbeitet werden konnten. Darunter zählt, die Fließspannung mittels Kriechversuchen zu untersuchen. Für das in dieser Arbeit verwendete und in Abschnitt 2.2 vorgestellte magnetorheologische Fluid wurde die Existenz einer Fließspannung, basierend auf dem Stand der Technik, durch physikalische Effekte auf der Mikroebene begründet und als Arbeitshypothese vorausgesetzt. Dennoch ist es für weiterführende Projekte ratsam, die Fließspannung des in dieser Arbeit verwendeten MRF direkt zu messen und mit der auf indirektem Weg identifizierten Fließspannung zu vergleichen. Um zu zeigen, dass die Fließspannung für MRF mittels Kriechversuchen direkt gemessen werden kann, muss jedoch zuvor nachgewiesen werden, dass MRF weder ver- noch entfestigendes plastisches Verhalten zeigen.

Ein weiterer Schwerpunkt für folgende Arbeiten bietet die Implementierung und Automatisierung des Identifikationsalgorithmus unter Verwendung von Optimierungsverfahren in Kombination eines objektiven Abbruchkriteriums, mit dem Ziel einen objektiv optimalen Parametersatz zu identifizieren. Die in dieser Arbeit identifizierten Parametersätze, welche subjektiv optimale Modellierungsergebnisse liefern, können dabei als Anfangsbedingung für die mehr oder weniger rein mathematisch arbeitenden Optimierungsverfahren genutzt werden.

Für die Simulation der Druckversuche am MRK sind die vom Magnetfeld abhängigen Materialeigenschaften mittels verschiedener Materialparamtersätze berücksichtigt. Dies ist im Rahmen der Simulation der Druckversuche zulässig, ermöglicht jedoch nicht, magnetisch stark inhomogene Lastfälle zu beschreiben. Um in Zukunft auch Modellvorhersagen für diese Lastfälle berechnen zu können, ist es erforderlich, die Aufgabe als mechanisches und magnetisches Feldproblem zu formulieren. Zusätzlich ist es notwendig, die in dieser Arbeit vorgeschlagenen eindimensionalen Materialmodelle dreidimensional zu verallgemeinern. Außerdem sind zur Modellierung des anisotropen Materialverhaltens magnetorheologischer Fluide experimentelle Untersuchungen unter variabler Magnetfeldrichtung erforderlich.

11. Folgerungen

Folgerung 1, Seite 20:
Zu Beginn der phänomenologischen Materialmodellierung einer unbekannten Materialprobe kann diese als Black-Box Operator interpretiert werden. Identifikationsexperimente und zusätzlich gemessene Materialfunktionen liefern Informationen zum qualitativen Materialverhalten. Sie stellen somit das Minimum des Materialverhaltens bereit, welches von einem Materialmodell abgebildet werden muss, um die im Rahmen der Modellierung geforderten Eigenschaften des Black-Box Operators erfassen zu können. Nach dem Abschluss der Materialmodellierung sind sämtliche, vom Umfang der Untersuchung abhängige Eigenschaften des Black-Box Operators identifiziert und modelliert. Es liegen ein Satz konstitutiver Gleichungen und identifizierte Materialparameter vor, die mit den Identifikationsexperimenten einhergehen und alle ermittelten Materialphänomene abbilden.

Folgerung 2, Seite 21:
Die phänomenologischen Materialmodellierung kann in zwei Stufen erfolgen. Im ersten Schritt werden eindimensionale Materialgleichungen entwickelt, die im zweiten Schritt dreidimensional verallgemeinert werden. Ziel der eindimensionalen phänomenologischen Materialmodellierung ist es, ein Gesamtmodell zu erarbeiten, welches alle gemessenen Materialfunktionen und Materialantworten abbilden kann. Im Rahmen der geometrisch linearen Theorie bietet es sich hierfür an, rheologische Elemente mittels Parallel- und Reihenschaltungen gezielt zu einem Gesamtmodell zu verknüpfen. Für verzerrungsgesteuerte Versuche eignet sich die Parallelschaltung rheologischer Elemente, sodass sich eine lineare Materialfunktion für das Gesamtmodell aus der Summe der entsprechenden Materialfunktionen aller rheologischer Teilmodelle ergibt. Zur gezielten Verschaltung rheologischer Teilmodelle ist es daher notwendig, dass die entsprechenden Materialfunktionen der rheologischer Teilmodelle bereits bekannt sind.

Folgerung 3, Seite 21, 79:
Infolge der Modellierung nichtlinearer Materialeffekte resultieren in der Regel Materialmodelle, deren Materialfunktionen nicht mehr geschlossen analytisch bestimmt werden können. Stattdessen müssen die Materialfunktionen numerisch berechnet werden. Dies setzt die numerische Implementierung des Materialmodells voraus. Um numerische Probleme innerhalb des relevanten Lastbereiches ausschließen zu können, muss die numerische Implementierung validiert werden. Eine Möglichkeit zur Validierung des numerisch implementierten Gesamtmodells bietet die Grenzfallanalyse. Das Gesamtmodell wird dazu durch geeignete Wahl der Materialparameter auf einen konstitutiven Grenzfall reduziert. Erzwungenermaßen verhält sich die numerische Implementierung des Gesamtmodells wie ein weniger komplexes rheologisches Modell. Existieren für diesen rheologischen Grenzfall bereits verifizierte (analytische) Referenzlösungen, kann die numerische Implementierung des Gesamtmodells überprüft werden. Die Übereinstimmung zwischen der numerisch ermittelten Modellantwort und der entsprechenden Referenzlösung ist jedoch lediglich notwendig, aber keinesfalls hinreichend für eine fehlerfreie numerische Implementierung.

Folgerung 4, Seite 22:
Ist der erste Schritt der zweistufigen phänomenologischen Modellierungsstrategie abgeschlossen, so liegt ein eindimensionales Materialmodell vor, das in der Lage ist, die gemessenen Materialfunktionen qualitativ abzubilden. Um zu überprüfen, in welchem Maße das Materialmodell die gemessenen Materialfunktionen quantitativ erfassen kann, müssen die Modellvorhersagen für konkrete Materialparameter berechnet und den Messungen gegenübergestellt werden. Dazu bedarf es zunächst der Identifikation

der Materialparameter. Meist werden Materialparameter nichtlinearer Gesamtmodelle mittels mehr oder weniger rein mathematisch arbeitenden, nichtlinearen Optimierungsalgorithmen bestimmt. Aufgrund der Nichtlinearität des Gesamtproblems, hängt das Identifikationsergebnis somit von der Wahl der Anfangsbedingungen ab. Daher ist es zwingend erforderlich, physikalisch sinnvolle Anfangsbedingungen für die zu identifizierenden Materialparameter vorzugeben. Dies stellt sich in der Praxis genau dann als nichttriviale Aufgabe heraus, umso weniger der Einfluss der Materialparameter auf die Modellvorhersagen bekannt ist. Im Sinne der gesamtheitlichen Betrachtung des Modellierungsprozesses, mit dem Ziel bestmögliche und physikalisch sinnvolle Simulationsergebnisse vorherzusagen, ist die Untersuchung des Einflusses der Materialparameter auf Modellvorhersagen zielführend und ratsam.

Folgerung 5, Seite 22, 89, 98, 113, 139:
Eine geeignete Art und Weise den Einfluss von Materialparametern auf Modellvorhersagen zu studieren, ist es den Zusammenhang zwischen Materialparametern und charakteristischen Punkten in Materialfunktionen herzustellen. Charakteristische Punkte sind exklusive Punkte von Materialfunktionen, deren numerische Werte ohne Weiteres experimentell ermittelt werden können. Ein charakteristischer Punkt ist beispielsweise das Maximum des Verlustmoduls, dessen Lage und Absolutwert in Messergebnissen problemlos abgelesen werden kann. Zur Bestimmung des Zusammenhangs zwischen Materialparametern und charakteristischen Punkten ist die analytische Beschreibung der Materialfunktionen dienlich. Sie ermöglicht eine detailierte Kurvendiskussion der Materialfunktionen. Jedoch ist es für beliebig nichtlineare Materialmodelle nicht immer möglich, die Materialfunktionen analytisch zu beschreiben. Existieren allerdings qualitativ verwandte Materialmodelle oder konstitutive Grenzfälle des Gesamtmodells, deren charakteristische Punkte bereits analytisch beschrieben sind, so können diese analog auch auf das beliebig nichtlineare Gesamtmodell übertragen werden (Analogieprinzip). Die Identifikation von Materialparametern auf der Grundlage von charakteristischen Punkten liefert physikalisch sinnvolle Ergebnisse. Sie können daher ebenfalls als Anfangsbedingung für die in *Folgerung 4* beschriebenen mehr oder weniger rein mathematisch arbeitenden, nichtlinearen Optimierungsalgorithmen verwendet werden.

Folgerung 6, Seite 22:
Die analytische Berechnung von Materialfunktionen stellt einen entscheidenden Mehrwert gegenüber der rein numerischen Berechnung von Materialfunktionen dar. Sie ist der numerischen Berechnung deshalb vorzuziehen. Analytisch beschriebene Materialfunktionen rheologischer Modelle ermöglichen zum einen die Validierung numerisch implementierter Materialmodelle und zum anderen die analytische Beschreibung charakteristischer Punkte.

Folgerung 7, Seite 31:
Die Gleichgewichtsrelation eines Materialmodells kann nicht in jedem Fall mittels Relaxations- und Kriechversuchen bestimmt werden. Für Flüssigkeiten stellt sich während eines Kriechversuchs keine konstante Verzerrung ein, sodass nach Haupt (2002; S. 260) kein Gleichgewichtszustand erreicht wird. Hingegen für starre Flüssigkeiten mit Fließspannung, wie beispielsweise dem Reib- und BINGHAM Element, kann die Gleichgewichtsrelation mittels Relaxationsversuchen nicht eindeutig bestimmt werden. Daher wird die Gleichgewichtsrelation über Relaxation ODER Kriechen ermittelt, wobei ODER entsprechend Tabelle 4.1 als logischer Operator zu interpretieren ist.

Folgerung 8, Seite 31:
Die Modellierung von Materialverhalten beinhaltet neben der Materialklassifizierung ebenso die Stoffklassifizierung. Die Materialklassifizierung nach Haupt (2002; S. 270, 272) erfolgt in Abhängigkeit von der Gestalt der Gleichgewichtsrelation und Eigenschaften hinsichtlich der Ratenabhängigkeit und sieht die vier Materialklassen: Elastizität, Plastizität, Viskoelastizität und Viskoplastizität vor. Die Gleichgewichtsrelation dient neben der Fließkurve als Klassifizierungskriterium zur Einteilung eines Materials in eine der drei Stoffklassen: Festkörper, Flüssigkeit und Material mit fest-flüssig Übergang.

Folgerung 9, Seite 32, 34, 36, 36:
Die Gleichgewichtsrelation ist ein signifikantes Klassifizierungskriterium sowohl zur Einteilung eines Materialverhaltens in eine Materialklasse als auch in eine Stoffklasse. Sie kann mithilfe von Relaxations-

oder Kriechversuchen bestimmt werden. Da die Gleichgewichtsrelation nicht immer ohne Restzweifel experimentell bestimmt werden kann, ergibt sich eine messbedingte Unsicherheit für das Klassifizierungsergebnis. Die für die theoretische Bestimmung der Gleichgewichtsrelation eines Materialmodells durchgeführte Grenzfallbetrachtung $t \to \infty$ ist aufgrund des praktisch beschränkten experimentellen Fensters nicht umsetzbar. Nach dem Abbruch von Relaxations- oder Kriechversuchen verbleibt die Frage, ob die Haltezeit „ausreichend lang“ gewählt wurde.
Hinsichtlich der Anwendung des Materialmodells für Simulationsrechnungen ergeben sich daher Restriktionen. Unter dem Gesichtspunkt, dass konstitutive Gleichungen meist zur Lösung ingenieurtechnischer Problemstellungen formuliert werden, ist es ausreichend Materialmodelle aufzustellen, die im Rahmen vordefinierter Temperatur-, Feuchte-, Last- und Zeitbereiche Gültigkeit besitzen. Im Hinblick auf die Lösung praktischer Probleme ist es wichtig, Rahmenbedingungen zu definieren, unter denen Materialmodelle formuliert und angewendet werden sollen. Dass Materialmodelle außerhalb von Anwendungrenzen keine Gültigkeit besitzen, ist ein fester, unvermeidbarer Bestandteil des Modellierungsprozesses. Somit ist ein Klassifizierungsergebnis in eine Material- und Stoffklasse nicht absolut, sondern hängt vom experimentellen Fenster ab. Wird beispielsweise im Experiment eine Gleichgewichtshysterese ermittelt, ist es trotzdem denkbar ein erweitertes MAXWELL Modell mit nicht existierender Gleichgewichtsspannung und ausgeprägtem Langzeitrelaxationsverhalten zur Modellierung zu postulieren. Wird ein Material unter vorgegebenen Temperatur-, Feuchte-, Last- und Zeitbereichen als Festkörper klassifiziert, so kann sich das Klassifizierungsergebnis bei davon abweichenden Vorgaben dennoch ändern. Dass der Übergang von Festkörper zu Flüssigkeit fließend ist, kann bei Vertretern von Soft Matter (weicher Materie) beobachtet werden. Daher gehören Vertreter von Soft Matter vielmals zur Stoffklasse der Materialien mit fest-flüssig Übergang.

Folgerung 10, Seite 40, 113, 114, 193, 195:
Ratenunabhängigkeit kann mithilfe des PIPKIN Diagramms und harmonischen Materialfunktionen, das heißt dem Speicher- und Verlustmodul sowie Höherharmonischen, identifiziert werden. Sind die LISSAJOUS Diagramme des PIPKIN Diagramms sowie die harmonischen Materialfunktionen unabhängig von der Kreisfrequenz, liegt ratenunabhängiges Materialverhalten zugrunde. Dies umfasst nach Haupt (2002; S. 270 ff.) entweder elastisches oder plastisches Materialverhalten. Elastisches Materialverhalten liegt vor, wenn LISSAJOUS Diagramme frequenzunabhängig und die Graphen der ersten LISSAJOUS Diagramme offene Linien sind. Bei plastischem Materialverhalten sind die LISSAJOUS Diagramme ebenfalls frequenzunabhängig und es existieren für das erste LISSAJOUS Diagramm Graphen geschlossener Linien.

Folgerung 11, Seite 42:
Die Materialklassifikation nach Haupt (2002; S. 270 ff.) teilt Materialverhalten in vier Materialklassen auf: Elastizität, Plastizität, Viskoelastizität und Viskoplastizität. Die Einteilung von Materialverhalten beziehungsweise Materialmodellen beruht auf zwei Klassifizierungskriterien: der Gleichgewichtsrelation und Ratenabhängigkeit. Jedoch ist die Existenz bleibender Verformungen nach Entlastung notwendig aber keinesfalls hinreichend für plastisches Materialverhalten. Bleibende Verformungen können ebenfalls bei viskoelastischen Materialien auftreten.

Folgerung 12, Seite 43, 44, 45, 68, 72, 82, 109, 139:
Die Fließkurve ist eine ungerade Zuordnung zwischen konstanten Schubverzerrungsraten $\dot{\tilde{\gamma}}$ und stationären Spannungen τ_∞. Eine Möglichkeit die Fließkurve experimentell zu bestimmen, besteht darin $i = 1 \ldots n$ Scherraten $\dot{\tilde{\gamma}}_i$ über je eine Haltezeit von Δt vorzugeben, und die entsprechenden Spannungen $\tau^i_{\infty.\mathrm{meas}}$ am Ende der Haltezeiten zu messen. Um sicherzustellen, dass die Spannungen $\tau^i_{\infty.\mathrm{meas}}$ den stationären Zustand beschreiben, ist die Dauer der Haltezeit Δt „ausreichend lang“ zu wählen. Während der Haltezeit klingen elastische Materialeffekte ab. Die Fließkurve misst daher lediglich viskose Effekte sowie reibungsbehaftete Materialeffekte aufgrund einer Fließspannung. Für Flüssigkeiten mit Fließspannung oder Flüssigkeiten mit pseudo Fließspannung beinhaltet die Fließkurve daher viskose und plastische Materialeigenschaften. Die Fließkurve ist somit für Materialien mit fest-flüssig Übergang eine geeignete Materialfunktion, um viskose und plastische Eigenschaften zu identifizieren und von elastischen Eigenschaften zu separieren. Die Definition einer *Viskosität* ist dafür allerdings nicht zwingend erforderlich. Die Viskosität ist eine Materialfunktion und kann daher nicht direkt gemessen werden. Stattdessen hängt sie vielmehr von der Art

der Definition ab. Üblicherweise wird die Viskosität als dynamische Viskosität $\eta_{\mathrm{dyn}} = \frac{\tau_\infty(\dot{\gamma})}{\dot{\gamma}}$ eingeführt. Alternativ dazu kann die Viskosität auch als differentielle Viskosität $\eta_{\mathrm{diff}} = \frac{d\tau_\infty(\dot{\gamma})}{d\dot{\gamma}}$ definiert werden. In beiden Fällen ergibt sich die Viskosität in Abhängigkeit der Scherrate als gerade Materialfunktion. Ausgehend vom Koordinatenursprung beschreibt die dynamische Viskosität die Sekante an die Fließkurve. Damit verbunden ergibt sich für die dynamische Viskosität eine entscheidende Einschränkung hinsichtlich der Anwendbarkeit auf Flüssigkeiten mit Fließspannung und Flüssigkeiten mit pseudo Fließspannung. Für diese Stoffklasse divergiert die dynamische Viskosität gegen Unendlich,∞, wenn $\dot{\gamma} \to 0^+$. Sie divergiert gegen minus Unendlich, $-\infty$, wenn $\dot{\gamma} \to 0^-$. Außerdem reduziert sich die physikalische Aussagekraft der dynamischen Viskostiät, je ausgeprägter nichtlineare viskose Effekte sind. Dies kann beispielsweise für Scherverdünnung und Scherverdickung beobachtet werden. Für die differentielle Viskosität existieren diese Einschränkungen und Nachteile nicht, da sie im Gegensatz zur dynamischen Viskosität die Tangente an die Fließkurve beschreibt.

Folgerung 13, Seite 47, 89:
Charakteristische Punkte von höherharmonischen Materialfunktionen, wie beispielsweise normierte Intensitäten und höherharmonische FOURIER Koeffizienten, können neben Speicher- und Verlustmodul ebenfalls zur Parameteridentifikation genutzt werden. Wenngleich die physikalische Interpretation der Höherharmonischen noch Gegenstand der Forschung ist, können Modellvorhersagen den Messergebnissen gegenübergestellt werden. Ein Materialmodell bildet genau dann das Verhalten der zugrunde liegenden Materialprobe ab, wenn es neben Speicher- und Verlustmodul auch den Verlauf höherharmonischer Materialfunktionen erfasst.

Folgerung 14, Seite 59, 85:
Da das vollständige PIPKIN Diagramm einer Materialprobe beziehungsweise eines Materialmodells das volle Spektrum existierender LISSAJOUS Diagramme beinhaltet, ist es eine mögliche Darstellungsform den rheologischen Fingerabdruck zu visualisieren. Einzelne LISSAJOUS Diagramme sind für komplexeres Materialverhalten beziehungsweise komplexere Materialmodelle kein geeignetes Mittel, um das rheologische Verhalten zu klassifizieren. Beispielsweise können einzelne LISSAJOUS Diagramme des rCROSS-MAXWELL Elements Boisly et al. (2015; Abb. 20, 21) nahezu identisch denen eines rCROSS-BINGHAM-HOOKE Elements sein. Daher gibt allein das „vollständige“ Spektrum aller LISSAJOUS Diagramme im PIPKIN Raum Aufschluss über das Materialverhalten.

Folgerung 15, Seite 63, 91, 126:
In der Literatur wird unter anderem mittels sinusförmiger verzerrungsgeregelter Anregung zwischen festkörper- und flüssigkeitsähnlichem Verhalten unterschieden. Dies erfolgt in Abhängigkeit der Größenverhältnisse zwischen Speicher- und Verlustmodul. Festkörperähnliches Verhalten wird genau dann postuliert, wenn der Speichermodul größer ist als der Verlustmodul, $G' > G''$. Im Fall von $G'' > G'$ spricht man von flüssigkeitsähnlichem Verhalten. Dieses Kriterium ist jedoch keinesfalls allgemeingültig. Beispielsweise zeigt das rCROSS-MAXWELL Element nach Boisly et al. (2015) einen Übergang von $G' > G''$ zu $G'' > G'$, obwohl es keine Fließspannung besitzt, die einen festkörperähnlichen Vorfließbereich von dem flüssigkeitsähnliches Nachfließbereich abgrenzen könnte. Das rCROSS-MAXWELL Element ist eine nichtlinear viskoelastische Flüssigkeit, deren Übergang von $G' > G''$ zu $G'' > G'$ allein auf ratenabhängige Eigenschaften und viskose Nichtlinearitäten zurückzuführen ist. Selbst für Flüssigkeiten mit Fließspannung, wie beispielsweise dem PRANDTL Element (Boisly et al. 2014b), BINGHAM-HOOKE Element (Boisly et al. 2017) und rCROSS-BINGHAM-HOOKE Element (Abschnitt 5), fallen der Schnittpunkt $G' = G''$ und der phänomenologische fest-flüssig Übergang nicht zusammen. Der fest-flüssig Übergang einer Flüssigkeit mit Fließspannung tritt beim Erfüllen der Fließbedingung (Yielding) ein, der mit einem abrupten Anstieg des Verlustmoduls und dem Abfallen des Speichermoduls einhergeht.

Folgerung 16, Seite 68, 70, 71:
Die Materialtheorie beschäftigt sich mit der Modellierung des Verhaltens von Materialien verschiedenster Konsistenzen. Im klassischen Sinn beinhaltet dies die Modellierung des Verhaltens von Flüssigkeiten und Festkörper. Im Rahmen der phänomenologischen Betrachtung ist es jedoch sinnvoll, eine weitere

Stoffklasse einzuführen, welche den fließenden Übergang von Flüssigkeiten zu Festkörpern repräsentiert. Zu dieser Stoffklasse zählen typische Vertreter von Soft Matter (weicher Materie), die bei Raumtemperatur einen belastungsinduzierten fest-flüssig Übergang aufweisen. Diese Zwischenstoffklasse wird daher als Material mit fest-flüssig Übergang bezeichnet. Somit kann das Materialverhalten in drei Stoffklassen unterteilt werden, die sich mittels zweier Klassifizierungskriterien, der Fließkurve und der Gleichgewichtsrelation, eindeutig unterscheiden lassen. Die Gleichgewichtsrelation ergibt sich mittels Relaxation ODER Kriechen, wobei ODER entsprechend Tabelle 4.1 als logischer Operator zu interpretieren ist.
Festkörper besitzen eine Gleichgewichtsrelation, die verschieden von Null ist. Das heißt, dass sich entweder aus Relaxationsversuchen von Null verschiedene Gleichgewichtsspannungen ergeben oder infolge von Kriechversuchen von Null verschiedene Gleichgewichtsverzerrungen auftreten. Kriechversuche und Relaxationsexperimente liefern identische Ergebnisse für die Gleichgewichtsrelation. Eine Fließkurve kann für Festkörper nicht bestimmt werden.
Für Flüssigkeiten hingegen kann eine Fließkurve ermittelt werden. Jedoch ist es nicht möglich eine Gleichgewichtsrelation mittels Kriechversuchen zu messen, da sich für Flüssigkeiten hierfür keine konstante Verzerrung einstellt. Die Bestimmung der Gleichgewichtsrelation gelingt für Flüssigkeiten lediglich unter Verwendung von Relaxationsversuchen, wonach sich eine Gleichgewichtsspannung von identisch Null ergibt.
Materialien mit fest-flüssig Übergang besitzen sowohl eine Fließkurve als auch eine von Null verschiedene Gleichgewichtsrelation. Als elastische Flüssigkeiten mit Fließspannung sei folgend eine Flüssigkeit mit Fließspannung bezeichnet, die einen elastischen Vorfließbereich besitzt, wie es beispielsweise für das PRANDTL Element (Boisly et al. 2014b) oder das BINGHAM-HOOKE Element Boisly et al. (2017) der Fall ist. Im Vorfließbereich von elastischen Flüssigkeiten mit Fließspannung ist die infolge von Relaxations- und Kriechversuchen identifizierte Gleichgewichtsrelation identisch. Dies gilt allerdings nicht im Nachfließbereich. Infolge eines Kriechversuches fließen Flüssigkeiten mit Fließspannung im Nachfließbereich uneingeschränkt, ohne dass sich eine konstante Verzerrung einstellt. Für elastische Flüssigkeiten mit Fließspannung kann die von Null verschiedene Gleichgewichtsrelation im Nachfließbereich ausschließlich mittels Relaxationsversuchen bestimmt werden. Dieser Umstand begründet die Definition der Gleichgewichtsrelation mittels Relaxation ODER Kriechen.
Für starr plastische Flüssigkeiten mit Fließspannung, wie beispielsweise dem Reibelement (Boisly et al. 2014a) und dem BINGHAM Element, ist die Bestimmung der Gleichgewichtsrelation im Vorfließbereich mittels Relaxation allerdings nicht möglich. Hierfür ist die Gleichgewichtsrelation ausschließlich mittels Kriechversuchen eindeutig definiert.

Folgerung 17, Seite 76 :
Für Flüssigkeiten und Flüssigkeiten mit Fließspannung müssen die eindimensionalen konstitutiven Gleichungen sowohl für positive als auch negative Scherraten gültig sein, wenn sie zur Modellierung des Materialverhaltens für vorerst nicht näher eingeschränkte Belastungen zulässig sein sollen. Dies ist zwingend erforderlich, um sicherzustellen, dass die Fließkurve eine ungerade Funktion der Scherrate ist. Andernfalls liefert die Berechnung harmonischer Materialfunktionen, wie beispielsweise dem Speicher- und Verlustmodul, keine sinnvollen Ergebnisse.

Folgerung 18, Seite 104:
Viskoelastische Materialmodelle besitzen ratenabhängige Eigenschaften. Bei Anwendung des Korrespondenzprinzips können diese in einen Satz ratenunabhängiger konstitutiver Gleichungen überführt werden. Damit verbunden ist die Einführung einer Bogenlänge, welche die Zeit als pseudo Zeitmaßstab ersetzt. Das mit dem MAXWELL Element korrespondierende ratenunabhängige rheologische Modell wird daher als endochrones MAXWELL Element bezeichnet. Die direkte Anwendung des Korrespondenzprinzips ist empfehlenswert, damit die Materialparameter eines endochronen Materialmodells mit ratenunabhängigen Materialmodellen vergleichbarer Modellstruktur verglichen und analog interpretiert werden können. Infolgedessen kann beispielsweise der Materialparameter β, der neben dem elastischen Modul G der zweite Materialparameter des endochronen MAXWELL Elements ist, im Vergleich zum PRANDTL Element als pseudo Fließspannung interpretiert werden. Die direkte Anwendung des Korrespondenzprinzips ermöglicht somit die Anwendung des Analogieprinzips. Daher können charakteristische Punkte des endochronen MAXWELL Elements auf Basis charakteristischer Punkte des MAXWELL

Elements und PRANDTL Elements identifiziert werden. Würden für das endochrone MAXWELL Element analytisch gegebene Materialfunktionen existieren, wäre eine Kurvendiskussion infolge der Anwendung des Analogieprinzips überflüssig. Aufgrund der Nichtlinerität kann für das endochrone MAXWELL Element allerdings lediglich der Verlustmodul analytisch berechnet werden. Insofern ermöglicht erst die direkte Anwendung des Korrespondenzprinzips die Umsetzung des Analogieprinzips und folglich die Identifikation charakteristischer Punkte.

Folgerung 19, Seite 114, 152:
Flüssigkeiten mit pseudo Fließspannung beginnen ab Lastbeginn zu fließen. Da sie keine Fließfunktion mit zugeordneter Fließbedingung besitzen, die das Materialverhalten in einen Vor- und Nachfließbereich aufteilt, fließen Flüssigkeiten mit pseudo Fließspannung in jedem Lastinkrement. Daher teilen sich Speicher- und Verlustmodul ebenfalls nicht in einen Vor- und Nachfließbereich auf. Als Konsequenz dessen erfolgt das Ansteigen des von der Verzerrungsamplitude abhängigen Verlustmoduls nicht abrupt sondern kontinuierlich.

Folgerung 20, Seite 117, 118, 124
Die Bestimmung der Fließspannung, dem Materialparameter eines Reibelements (Boisly et al. 2014a), nimmt eine zentrale Rolle innerhalb der Identifikation der Materialparameter einer Flüssigkeit mit Fließspannung ein. Für jungfräuliches Material ist der Beginn des plastischen Fließens durch die Fließspannung definiert. Während der Lastgeschichte kann der Fließbeginn zusätzlich von inneren Variablen abhängen. Ein Zeichen dafür kann sein, dass ein charakteristischer Punkt, mit dessen Hilfe die Fließspannung identifiziert wird, von der Lastgeschichte abhängt. Daher ist es nicht immer ohne Weiteres möglich, die Fließspannung mit fixen Messpunkten in Verbindung zu bringen. Mit Zunahme der Komplexität des Materialverhaltens steigt der Aufwand zur Bestimmung der Fließspannung. Messverfahren zur direkten Bestimmung der Fließspannung mithilfe fixer Messpunkte, die in Sonderfällen für „weniger komplexe“ Materialmodelle gültig sind, können auf „komplexeres“ Materialverhalten nicht mehr angewendet werden. Im Allgemeinen kann die Fließspannung ausschließlich im Rahmen eines iterativen Identifikationsprozesses zur Bestimmung aller Materialparameter identifiziert werden.

Folgerung 21, Seite 120, 124:
Ist die Existenz der Fließspannung begründet, und erfüllt die Materialprobe Voraussetzungen, so kann die Fließspannung mittels einer Verzerrungsrampe als diejenige Spannung identifiziert werden, ab der die Spannungsantwort nicht länger einem linearen Verlauf folgt. Diese Identifikationsmethode ist anwendbar, wenn der Vorfließbereich des Materials linear elastisch ist. Sie ist auch dann zulässig, wenn der Vorfließbereich linear viskoelastisch und zusätzlich die Rate der Verzerrungsrampe so gering ist, dass ratenabhängige Effekte vernachlässigbar sind. Besitzt die Gleichgewichtsrelation des Vorfließbereichs allerdings eine ausgeprägte nichtlinear elastische Kennlinie, so kann die Verzerrungsrampe nicht zur Bestimmung der Fließspannung genutzt werden. Dies gilt analog auch bei der Bestimmung der Fließspannung unter Anwendung einer Spannungsrampe mit kleinst möglicher Spannungsrate.

Folgerung 22, Seite 127:
Amplitudensweeps für verzerrungsgesteuerte sinusförmige Anregungen können für Flüssigkeiten mit Fließspannung, die weder ver- noch entfestigen, zur indirekten Bestimmung der Fließspannung genutzt werden, insofern die Existenz der Fließspannung bereits motiviert ist.
Infolge des fest-flüssig Übergangs, der für Flüssigkeiten mit Fließspannung beim Erfüllen der Fließbedingung einsetzt, steigt der Verlustmodul abrupt an, und der Speichermodul beginnt abzufallen. Die bei der Erfüllung der Fließbedingung auftretende Schubverzerrung wird als Fließverzerrung bezeichnet. Sie ist kein Materialparameter. Die Fließverzerrung muss daher nicht zwingenderweise konstant sein. Im Allgemeinen hängt sie von den Lastparametern der sinusförmigen Anregung, das heißt von der Schubverzerrungsamplitude *und* der Kreisfrequenz, ab. Diese Tatsache ist beispielsweise für ein SCHOFIELD-SCOTT-BLAIR Element nachvollziehbar. Ist man in Kenntnis der den viskoelastischen Vorfließbereich beschreibenden Materialparameter, und sind die mit einer Fließverzerrung korrespondierenden Schubverzerrungsamplitude und Kreisfrequenz bekannt, kann die Fließspannung identifiziert werden. Sie entspricht dem Spannungsmaximum derjenigen Spannungsantwort, für die der fest-flüssig

Übergang während eines verzerrungsgeregelten Amplitudensweeps erstmals zu beobachten ist.
Die Identifikation der Fließspannung mithilfe verzerrungsgeregelter Amplitudensweeps setzt im Allgemeinen die Kenntnis aller den Vorfließbereich beschreibenden Materialparameter voraus. Dies kann man sich mithilfe einer Parallelschaltung aus SCHOFIELD-SCOTT-BLAIR Element und MAXWELL Element erklären. In diesem Fall kann die Fließspannung nicht über das Maximum derjenigen Spannungsantwort bestimmt werden, die sich zu einer verzerrungsgeregelten Anregung einstellt, bei der Fließen erstmalig einsetzt. Somit ist die Identifikation der Fließspannung in den gesamten Prozess der Parameteridentifikation eingebunden und erfolgt iterativ.

Folgerung 23, Seite 128:
Relaxationsversuche können für weder ver- noch entfestigende Flüssigkeiten mit Fließspannung zur Bestimmung der Fließspannung genutzt werden. Hierfür sind „ausreichend große“ Relaxationsniveaus sicherzustellen, die dem Erfüllen der Fließbedingung genügen. Um Relaxationsniveaus identifizieren zu können, bei denen die Fließbedingung erfüllt ist, werden gestaffelte Relaxationsversuche aufgebracht. Die Spannung am Relaxationsabbruchpunkt für Relaxationsniveaus, bei denen die Erfüllung der Fließbedingung verzeichnet werden kann, ist bei ausreichend langen Relaxationshaltezeiten in guter Näherung identisch und entspricht der Fließspannung. Für zu kleine Relaxationsniveaus, bei denen die Fließbedingung nicht erfüllt ist, liegt die Spannung am Relaxationsabbruchpunkt unterhalb der Fließspannung.

Folgerung 24, Seite 130:
Für weder ver- noch entfestigende Flüssigkeiten mit Fließspannung können Kriechversuche zur Bestimmung der Fließspannung genutzt werden. Als Materialantwort zu konstant gehaltenen Spannungsniveaus wird die Verzerrung ermittelt. Die statische Fließspannung wird als das größtmögliche Spannungsniveau identifiziert, für das die Verzerrungsantwort asymptotisch gegen einen Grenzwert konvergiert. Hierfür eignet sich die Abfolge von Kriechversuchen ausgehend von einem minimalen Spannungsniveau mit betragsmäßig steigenden Kriechniveaus. Sobald die Verzerrungsantwort einen stationären Zustand mit konstanter Verzerrungsrate erreicht, ist die Fließspannung überschritten. Alternativ kann die statische Fließspannung auch als das kleinstmögliche Spannungsniveau identifiziert werden, für das die Verzerrung nicht asymptotisch gegen einen Grenzwert konvergiert. Zur Bestimmung dessen eignet sich die Abfolge von Kriechversuchen ausgehend von einem maximalen hinzu geringeren Spannungsniveaus. Sobald die Verzerrungsantwort einen stationären Zustand mit konstanter Verzerrung erreicht, ist die Fließspannung unterschritten. Beide Versuchsfolgen führen im Idealfall auf die gleiche Fließspannung. Die generelle Schwierigkeit bei der Handhabe dieser Methode liegt darin, zu entscheiden ob sich unter der vorgegebenen Kriechhaltezeit Δt der stationäre Zustand mit konstanter Verzerrung beziehungsweise konstanter Verzerrungsrate bereits eingestellt hat oder nicht. Die Wahl der Kriechhaltezeit hat somit einen entscheidenden Einfluss auf das Messergebnis.

Folgerung 25, Seite 159:
Eine magnetorheologische Flüssigkeit ist eine Suspension aus magnetisierbaren Partikeln, dessen Materialeigenschaften über eine äußere Stimulierung, dem Magnetfeld, beeinflusst werden können. Dieses Phänomen wird als magnetorheologischer Effekt bezeichnet und ermöglicht eine schnelle und reversibele Anpassung der viskosen, elastischen und plastischen Eigenschaften. Eine magnetorheologische Flüssigkeit ist ein typischer Vertreter von sogennanter Soft Matter (weiche Materie). Daher ist die magnetorheologische Flüssigkeit aus Sicht der phänomenologischen Materialtheorie ein Material mit fest-flüssig Übergang. Dieser fest-flüssig Übergang erfolgt bei konstanter Raumtemperatur und wird durch mechanische Belastung induziert. Weiterhin ist das Verhalten einer magnetorheologischen Flüssigkeit ratenabhängig. Sie besitzt außerdem scherverdünnende Eigenschaften. Demzufolge müssen viskoplastische Materialmodelle formuliert werden, um das Verhalten magnetorheologischer Flüssigkeiten abbilden zu können.

Folgerung 26, Seite 165:
Magnetorheologische Komposite sind Verbundwerkstoffe mit magnetisch schaltbaren Materialeigenschaften. Sie bestehen aus einem Matrixwerkstoff, in den magnetisch schaltbares Material integriert wird. Um den Einfluss sowie den schaltbaren Bereich des magnetorheologischen Effektes so groß wie möglich

auszulegen, eignen sich Matrixwerkstoffe mit „geringer“ Steifigkeit. In diesem Zusammenhang kann die Steifigkeit als „gering“ angenommen werden, wenn sie maximal in derselben Größenordnung wie die der magnetorheologischen Flüssigkeit liegt. Schaumstoff als viskoelastischer Matrixwerkstoff erfüllt diese Eigenschaft. Daher bietet die Befüllung der kanalartigen Hohlraumstrukturen eines schaumstoffartigen Matrixwerkstoffs mit magnetorheologischer Flüssigkeiten eine Möglichkeit zur Fertigung eines magnetorheologischen Komposits. Da die magnetorheologische Flüssigkeit in eine Matrix definierter Geometrie eingebettet ist, wird ihr Materialverhalten im Wesentlichen von den linear viskoelastischen Eigenschaften des Vorfließbereichs dominiert.

A. Anhang

A.1 Definition des LAGRANGEschen und EULERschen Verzerrungstensors

Im Folgenden werden der LAGRANGEsche und EULERsche Verzerrungstensor auf Grundlage des materiellen und räumlichen Deformationsgradienten definiert. Entsprechend der Bemerkung auf Seite 26 werden $\mathbf{x}(\mathbf{X}\cdot\mathbf{e}_M,t)$ und $\mathbf{X}(\mathbf{x}\cdot\mathbf{e}_m,t)$ rein formal durch $\mathbf{x}(\mathbf{X},t)$ und $\mathbf{X}(\mathbf{x},t)$ ersetzt. Der *materielle Deformationsgradient* [1, 2] ist definiert als

$$\mathbf{F}(\mathbf{X},t) = \left[\nabla_{\mathbf{X}} \otimes \mathbf{x}(\mathbf{X},t)\right]^{\top} = F_{kN}(\mathbf{X},t)\mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_N = \frac{\partial x_k(\mathbf{X},t)}{\partial X_N}\mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_N = x_{k,N}(\mathbf{X},t)\mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_N \ . \tag{A.1}$$

Da der materielle Deformationsgradient zwischen der Referenz- und Momentankonfiguration vermittelt, wird er auch als Zweifeld-Tensor bezeichnet [3]. Hierbei ist die Transponierte eines Tensors zweiter Stufe [4] in symbolischer Schreibweise verwendet, die durch

$$\mathbf{A}^{\top} = \left[A_{KL}\mathbf{e}_K \otimes \mathbf{e}_L\right]^{\top} = A_{KL}\mathbf{e}_L \otimes \mathbf{e}_K = A_{LK}\mathbf{e}_K \otimes \mathbf{e}_L \tag{A.2}$$

gegeben ist. Der materielle Bezug des Deformationsgradienten in Gleichung (A.1) wird unter anderem durch [5, 6]

$$\nabla_{\mathbf{X}} \otimes (\ ) = \frac{\partial (\ )_{(\ )}}{\partial X_N}\mathbf{e}_N \otimes \mathbf{e}_{(\ )} = (\ )_{(\ ),N}\mathbf{e}_N \otimes \mathbf{e}_{(\ )} \tag{A.3}$$

deutlich. Der Basisvektor des Nablaoperators steht in Anlehnung an die Definition des dyadischen Produktes [7], welches nicht kommutativ ist [8], an erster Stelle [9].

Um im Anschluss eine geometrische Linearisierung durchführen zu können, ist es hilfreich den materiellen Deformationsgradienten durch den materiellen Verschiebungsgradienten [10]

$$\mathbf{H}(\mathbf{X},t) = \left[\nabla_{\mathbf{X}} \otimes \mathbf{u}(\mathbf{X},t)\right]^{\top} = u_{k,L}(\mathbf{X},t)\mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_L = u_{k,L}(\mathbf{X},t)Q_{kK}\mathbf{e}_K \otimes \mathbf{e}_L = u_{K,L}(\mathbf{X},t)\mathbf{e}_K \otimes \mathbf{e}_L \tag{A.4}$$

zu beschreiben. Dazu wird zunächst die Bahnlinie eines materiellen Teilchens entsprechend Gleichung (3.13) mittels der Verschiebung beschrieben. Die Umrechnung der Basisvektoren $\mathbf{e}_K$ und $\mathbf{e}_k$ erfolgt über

---

[1] (Giesekus 1994; S. 12), (Kaliske 1995; S. 24, 27, 29, 31, 35), (Schröder 1996; S. 5, 12), (Holzapfel 2000; S. 65), (Haupt 2002; S. 23), (Parisch 2003; S. 63), (Bertram 2008; S. 95), (Altenbach 2012; S. 79, 80)

[2] Er wird auch als *Deformationsgradient relativ zur Referenzkonfiguration* bezeichnet [(Ogden 1984; S. 84), (Liu 2002; S. 2), (Silber und Steinwender 2005; S. 46)].

[3] (Ogden 1984; S. 84, 91), (Wilmanski 1998; S. 21), (Betten 2001; S. 34), (Liu 2002; S. 2), (Parisch 2003; S. 64, 89), (Silber und Steinwender 2005; S. 46), (Bertram 2008; S. 106), (Altenbach 2012; S. 79)

[4] (Ogden 1984; S. 17), (Altenbach 2012; S. 34)

[5] (Krawietz 1986; S. 94), (Giesekus 1994; S. 612), (Betten 2001; S. 33, 307), (Silber und Steinwender 2005; S. 46, 50, 446), (Altenbach 2012; S. 44)

[6] Es sei vereinbahrt, dass der Nabla-Operator ∇ stets nach rechts wirke [(Brummund), (Ho-Kim und Pham 1998; S. 32, 59, 87)]. In diesm Sinn soll die Vereinbahrung $\left[\nabla_{\mathbf{X}} \otimes \mathbf{u}\right]^{\top} = \mathbf{u} \otimes \nabla_{\mathbf{X}}$, wie sie in der Literatur gelegentlich angewendet wird (Altenbach 2012; S. 44), nicht benutzt werden.

[7] (Liu 2002; S. 241), (Parisch 2003; S. 19), (Spencer 2004; S. 19), (Altenbach 2012; S. 28)

[8] (Ogden 1984; S. 15), (Giesekus 1994; S. 612), (Holzapfel 2000; S. 10), (Silber und Steinwender 2005; S. 429)

[9] Es sei erwähnt, dass in der Literatur auch die Verwendung von $\nabla_{\mathbf{X}} \otimes (\ ) = \frac{\partial (\ )}{\partial X_N}\mathbf{e}_{(\ )} \otimes \mathbf{e}_N$ [(Holzapfel 2000; S. 45), (Parisch 2003; S. 41), (Wriggers 2001; S. 460)] üblich ist.

[10] (Kaliske 1995; S. 25), (Holzapfel 2000; S. 73), (Liu 2002; S. 9), (Silber und Steinwender 2005; S. 50)

die Transformationskoeffizienten Q_{kK} und Q^{-1}_{Kk} [11, 12]

$$\mathbf{e}_k = Q_{kK}\,\mathbf{e}_K \tag{A.6}$$
$$\mathbf{e}_K = Q^{-1}_{Kk}\,\mathbf{e}_k = Q_{kK}\,\mathbf{e}_k \tag{A.7}$$
$$Q_{kK} = Q^{-1}_{Kk} = \mathbf{e}_k \cdot \mathbf{e}_K = \mathbf{e}_K \cdot \mathbf{e}_k \tag{A.8}$$
$$Q_{lL,M} = 0 \tag{A.9}$$
$$Q^{-1}_{Ll,m} = 0\,. \tag{A.10}$$

Die Matrix der Transformationskoeffizienten $\underline{\underline{Q}}$ ist orthogonal (Spencer 2004; S. 17) und besitzt die Eigenschaften [13]

$$Q_{kK}Q_{kL} = Q^{-1}_{Kk}Q_{kL} = Q^{-1}_{Kk}Q^{-1}_{Lk} = \delta_{KL} \tag{A.11}$$
$$Q_{kL}Q_{lL} = Q_{kL}Q^{-1}_{Ll} = Q^{-1}_{Lk}Q^{-1}_{Ll} = \delta_{kl}\,. \tag{A.12}$$

Das KRONECKER Symbol ist definiert als

$$\delta_{kl} = \begin{cases} 1 & : \quad k = l \\ 0 & : \quad k \neq l \end{cases} \tag{A.13a, A.13b}$$

$$\delta_{KL} = \begin{cases} 1 & : \quad K = L \\ 0 & : \quad K \neq L\,. \end{cases} \tag{A.14a, A.14b}$$

Die Koordinatenschreibweise des Verschiebungsvektors in LAGRANGEscher Formulierung, ausgehend von Gleichung (3.13), ergibt sich zu

$$u_K(\mathbf{X},t)\,\mathbf{e}_K = \left[x_k(\mathbf{X},t)\,Q_{kK} - X_K\right]\mathbf{e}_K \tag{A.15}$$
$$u_k(\mathbf{X},t)\,\mathbf{e}_k = \left[x_k(\mathbf{X},t) - X_K Q^{-1}_{Kk}\right]\mathbf{e}_k\,. \tag{A.16}$$

Daher ist die Trajektorie eines materiellen Punktes bezüglich des $\mathbf{e}_k$ Koordinatensystems mittels

$$x_k(\mathbf{X},t)\,\mathbf{e}_k = \left[X_K Q^{-1}_{Kk} + u_k(\mathbf{X},t)\right]\mathbf{e}_k = \left[X_K Q^{-1}_{Kk} + u_K(\mathbf{X},t)Q^{-1}_{Kk}\right]\mathbf{e}_k = \left[X_K + u_K(\mathbf{X},t)\right]\mathbf{e}_K \tag{A.17}$$

beschrieben. Wird Gleichung (A.17) entsprechend mit $\frac{\partial(\,)}{\partial X_N}\,\mathbf{e}_{(\,)} \otimes \mathbf{e}_N$ differenziert, so erhält man den materiellen Deformationsgradienten [14]

$$\mathbf{F}(\mathbf{X},t) = \mathbf{1} + \mathbf{H} \tag{A.18}$$
$$F_{kN}(\mathbf{X},t)\,\mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_N = \left[\delta_{KN}Q^{-1}_{Kk} + u_{k,N}(\mathbf{X},t)\right]\mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_N \tag{A.19}$$
$$= \left[\delta_{KN}Q^{-1}_{Kk} + u_{K,N}(\mathbf{X},t)Q^{-1}_{Kk}\right]\mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_N = \left[\delta_{KN} + u_{K,N}(\mathbf{X},t)\right]\mathbf{e}_K \otimes \mathbf{e}_N \tag{A.20}$$

unter Verwendung des zweistufigen Einheitstensors [15]

$$\mathbf{1} = \delta_{kl}\mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l = \delta_{kl}Q_{kK}\mathbf{e}_K \otimes \mathbf{e}_l = \delta_{kl}Q_{lL}\mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_L = \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_k \tag{A.21}$$
$$\mathbf{1} = \delta_{KL}\mathbf{e}_K \otimes \mathbf{e}_L = \delta_{KL}Q^{-1}_{Kk}\mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_L = \delta_{KL}Q^{-1}_{Ll}\mathbf{e}_K \otimes \mathbf{e}_l = \mathbf{e}_K \otimes \mathbf{e}_K\,. \tag{A.22}$$

[11] (Prager 1961a; S. 14), (Ogden 1984; S. 6 ff.), (Betten 1987; Gl. (2.10)), (Kreißig und Benedix 2002; S. 5 ff.), (Parisch 2003; S. 26), (Spencer 2004; S. 16 ff.)

[12] Wenn die Koordinatensysteme der Referenz- und Momentankonfiguration mittels

$$Q_{kK} = \delta_{kK} \tag{A.5}$$

identisch gewählt werden, ergibt sich die Matrix der Transformationskoeffizienten zum KRONECKER Symbol und es nimmt die Rolle eines Shifters ein [(Eringen 1962; S. 9), (Eringen 1980; S. 9), (Eringen und Maugin 1990a; S. 9)].

[13] (Prager 1961a; S. 15), (Ogden 1984; Gl. (1.1.32)), (Betten 1987; Gl. (2.11)), (Eringen und Maugin 1990b; S. 678), (Kreißig und Benedix 2002; S. 6), (Greve 2003; S. 40), (Parisch 2003; S. 29), (Spencer 2004; S. 17), (Bertram 2008; S. 32)

[14] (Liu 2002; S. 9), (Silber und Steinwender 2005; S. 51)

[15] (Giesekus 1994; S. 592), (Holzapfel 2000; S. 11, 37), (Greve 2003; S. 5), (Parisch 2003; S. 29), (Spencer 2004; S. 64), (Truesdell und Noll 2004; S. 18, 48)

In analoger Weise lässt sich nach Truesdell und Toupin (1960; S. 245 ff.), Eringen (1962; S. 10) und (Eringen 1980; S. 10) unter Verwendung von

$$\nabla_{\mathbf{x}} \otimes (\,) = \frac{\partial (\,)_{(\,)}}{\partial x_n} \mathbf{e}_n \otimes \mathbf{e}_{(\,)} = (\,)_{(\,),n} \mathbf{e}_n \otimes \mathbf{e}_{(\,)} \tag{A.23}$$

der *räumliche* [16] beziehungsweise *inverse Deformationsgradient* [17]

$$\mathbf{F}^{-1}(\mathbf{x},t) = \left[\nabla_{\mathbf{x}} \otimes \mathbf{X}(\mathbf{x},t)\right]^{\top} = F^{-1}_{Kn}(\mathbf{x},t)\mathbf{e}_K \otimes \mathbf{e}_n = \frac{\partial X_K(\mathbf{x},t)}{\partial x_n}\mathbf{e}_K \otimes \mathbf{e}_n = X_{K,n}(\mathbf{x},t)\mathbf{e}_K \otimes \mathbf{e}_n \tag{A.24}$$

einführen. Hierbei kennzeichnet $(\,)^{-1}$ die Inverse eines zweistufigen Tensors. Der räumliche Deformationsgradient kann durch einen räumlichen Verschiebungsgradienten [18]

$$\mathbf{h}(\mathbf{x},t) = \left[\nabla_{\mathbf{x}} \otimes \mathbf{u}(\mathbf{x},t)\right]^{\top} = u_{K,l}(\mathbf{x},t)\mathbf{e}_K \otimes \mathbf{e}_l = u_{K,l}(\mathbf{x},t)Q^{-1}_{Kk}\mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l = u_{k,l}(\mathbf{x},t)\mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l \tag{A.25}$$

beschrieben werden. Dazu wird zunächst ausgehend von Gleichung (3.14) die EULERsche Beschreibung des Verschiebungsfeldes

$$u_k(\mathbf{x},t)\,\mathbf{e}_k = \left[x_k - X_K(\mathbf{x},t)\,Q^{-1}_{Kk}\right]\mathbf{e}_k \tag{A.26}$$

$$u_K(\mathbf{x},t)\,\mathbf{e}_K = \left[x_k Q_{kK} - X_K(\mathbf{x},t)\right]\mathbf{e}_K \tag{A.27}$$

formuliert. Daraus ergeben sich diejenigen materiellen Punkten, welche einen festen Ort $\mathbf{x}$ passieren [19]

$$X_K(\mathbf{x},t)\,\mathbf{e}_K = \left[x_k Q_{kK} - u_K(\mathbf{x},t)\right]\mathbf{e}_K = \left[x_k Q_{kK} - u_k(\mathbf{x},t)Q_{kK}\right]\mathbf{e}_K = \left[x_k - u_k(\mathbf{x},t)\right]\mathbf{e}_k\ . \tag{A.28}$$

Über Differentiation $\frac{\partial (\,)}{\partial x_n}\mathbf{e}_{(\,)} \otimes \mathbf{e}_n$ erhält man letztlich den räumlichen Deformationsgradienten in Abhängigkeit des räumlichen Verschiebungsgradienten [20]

$$\mathbf{F}^{-1}(\mathbf{x},t) = \mathbf{1} - \mathbf{h} \tag{A.29}$$

$$F^{-1}_{Kn}(\mathbf{x},t)\,\mathbf{e}_K \otimes \mathbf{e}_n = \left[\delta_{kn}Q_{kK} - u_{K,n}(\mathbf{x},t)\right]\mathbf{e}_K \otimes \mathbf{e}_n \tag{A.30}$$

$$= \left[\delta_{kn}Q_{kK} - u_{k,n}(\mathbf{x},t)Q_{kK}\right]\mathbf{e}_K \otimes \mathbf{e}_n = \left[\delta_{kn} - u_{k,n}(\mathbf{x},t)\right]\mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_n\ . \tag{A.31}$$

Die Umrechnung des materiellen und räumlichen Verschiebungsgradienten gelingt mit der Kettenregel [21]

$$\mathbf{h} = u_{K,l}\mathbf{e}_K \otimes \mathbf{e}_l = u_{K,n}x_{n,L}(\mathbf{X},t)X_{L,l}(\mathbf{x},t)\mathbf{e}_K \otimes \mathbf{e}_l = u_{K,L}F^{-1}_{L,l}(\mathbf{x},t)\mathbf{e}_K \otimes \mathbf{e}_l = \mathbf{H}\cdot\mathbf{F}^{-1} \tag{A.32}$$

$$\mathbf{H} = u_{k,L}\mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_L = u_{k,N}X_{N,l}(\mathbf{x},t)x_{l,L}(\mathbf{X},t)\mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_L = u_{k,l}F_{l,L}(\mathbf{X},t)\mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_L = \mathbf{h}\cdot\mathbf{F}\ . \tag{A.33}$$

Auf Grundlage der materiellen Deformations- und Verschiebungsgradienten ist der LAGRANGEsche Verzerrungstensor [22]

$$\mathbf{E}(\mathbf{X},t) = \frac{1}{2}\left(\mathbf{F}^{\top}\cdot\mathbf{F} - \mathbf{1}\right) = E_{KL}(\mathbf{X},t)\mathbf{e}_K \otimes \mathbf{e}_L = \frac{1}{2}\left(F_{kK}F_{kL} - \delta_{KL}\right)\mathbf{e}_K \otimes \mathbf{e}_L \tag{A.34}$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{X},t) = \frac{1}{2}\left(\mathbf{H} + \mathbf{H}^{\top} + \mathbf{H}^{\top}\cdot\mathbf{H}\right) = E_{KL}(\mathbf{X},t)\mathbf{e}_K \otimes \mathbf{e}_L = \frac{1}{2}\left(u_{K,L} + u_{L,K} + u_{N,K}u_{N,L}\right)\mathbf{e}_K \otimes \mathbf{e}_L \tag{A.35}$$

[16] (Malvern 1969; S. 157), (Giesekus 1994; S. 12), (Holzapfel 2000; S. 66), (Parisch 2003; S. 64), (Altenbach 2012; S. 80)

[17] (Schröder 1996; S. 12), (Holzapfel 2000; S. 71), (Betten 2001; S. 34), (Wriggers 2001; S. 22), (Greve 2003; S. 12)

[18] (Kaliske 1995; S. 25), (Holzapfel 2000; S. 73), (Liu 2002; S. 9), (Silber und Steinwender 2005; S. 50)

[19] (Hamel 1956; S. 10), (Eringen 1980; S. 7), (Holzapfel 2000; S. 59), (Parisch 2003; S. 63), (Spencer 2004; S. 35), (Altenbach 2012; S. 72)

[20] (Liu 2002; S. 2), (Silber und Steinwender 2005; S. 51)

[21] (Holzapfel 2000; S. 74), (Haupt 2002; S. 36)

[22] (Eringen 1962; S. 13), (Malvern 1969; S. 161), (Eringen 1980; S. 15), (Ogden 1984; S. 90), (Hahn 1985; S. 40), (Eringen und Maugin 1990a; S. 7), (Schröder 1996; S. 12), (Wilmanski 1998; S. 30), (Maugin 1999; S. 59), (Betten 2001; S. 38), (Altenbach 2012; S. 96)

definiert. Der EULERsche Verzerrungstensor [23] ergibt sich aus dem räumlichen Deformations- und Verschiebungsgradienten

$$\mathbf{e}(\mathbf{x},t) = \frac{1}{2}(\mathbf{1} - \mathbf{F}^{-\top}\cdot\mathbf{F}^{-1}) = e_{kl}(\mathbf{x},t)\mathbf{e}_k\otimes\mathbf{e}_l = \frac{1}{2}\left(\delta_{kl} - F^{-1}_{Kk}F^{-1}_{Kl}\right)\mathbf{e}_k\otimes\mathbf{e}_l \tag{A.36}$$

$$\mathbf{e}(\mathbf{x},t) = \frac{1}{2}(\mathbf{h} + \mathbf{h}^{\top} - \mathbf{h}^{\top}\cdot\mathbf{h}) = e_{kl}(\mathbf{x},t)\mathbf{e}_k\otimes\mathbf{e}_l = \frac{1}{2}\left(u_{k,l} + u_{l,k} - u_{n,k}u_{n,l}\right)\mathbf{e}_k\otimes\mathbf{e}_l\ . \tag{A.37}$$

Der LAGRANGEsche Verzerrungstensor ist mit dem EULERschen Verzerrungstensor über die *pull back* Operation [24]

$$\mathbf{E}(\mathbf{X},t) = \mathbf{F}^{\top}(\mathbf{X},t)\cdot\mathbf{e}(\mathbf{x},t)\cdot\mathbf{F}(\mathbf{X},t) \tag{A.38}$$

$$E_{KL}(\mathbf{X},t)\mathbf{e}_K\otimes\mathbf{e}_L = F_{kK}(\mathbf{X},t)\mathbf{e}_K\otimes\mathbf{e}_k\cdot e_{kl}(\mathbf{x},t)\mathbf{e}_k\otimes\mathbf{e}_l\cdot F_{lL}(\mathbf{X},t)\mathbf{e}_l\otimes\mathbf{e}_L = F_{kK}e_{kl}F_{lL}\mathbf{e}_K\otimes\mathbf{e}_L \tag{A.39}$$

und umgekehrt über die *push forward* Operation [25]

$$\mathbf{e}(\mathbf{x},t) = \mathbf{F}^{-\top}(\mathbf{x},t)\cdot\mathbf{E}(\mathbf{X},t)\cdot\mathbf{F}^{-1}(\mathbf{x},t) \tag{A.40}$$

$$e_{kl}(\mathbf{x},t)\mathbf{e}_k\otimes\mathbf{e}_l = F^{-1}_{Kk}(\mathbf{x},t)\mathbf{e}_k\otimes\mathbf{e}_K\cdot E_{KL}(\mathbf{X},t)\mathbf{e}_K\otimes\mathbf{e}_L\cdot F^{-1}_{Ll}(\mathbf{x},t)\mathbf{e}_L\otimes\mathbf{e}_l = F^{-1}_{Kk}E_{KL}F^{-1}_{Ll}\mathbf{e}_k\otimes\mathbf{e}_l \tag{A.41}$$

verknüpft. Die geometrische Linearisierung beider Verzerrungsmaße ist in Anhang A.2 vermerkt. Durch Gleichung (A.72) wird gezeigt, dass man im Rahmen der geometrisch linearen Theorie nicht zwischen materiellen und räumlichen Koordinaten zu unterscheiden braucht [26]. Das geht einher mit Gleichung (A.78), wonach der materielle und der räumliche Verschiebungsgradient ineinander übergehen [27]. Daher stimmen auch der linearisierte LAGRANGEsche Verzerrungstensor (Gleichung (A.70)) und der linearisierte EULERsche Verzerrungstensor (Gleichung (A.71)) überein, was in Gleichung (A.76) beschrieben ist.

Da das Materialverhalten von ratenabhängigen Stoffen von der Rate der Verzerrung abhängt, sei diese im Folgenden unter Verwendung der *materiellen Ableitung* angegeben. Die materielle Ableitung $\mathring{\mathbf{A}}$ ist die zeitliche Ableitung einer physikalischen Größe eines materiellen Punktes. Daher wird beim materiellen Ableiten die Koordinate $\mathbf{X}$ konstant gehalten. Für Größen, die bereits in Abhängigkeit materieller Punkte $\mathbf{X}$ definiert sind, ist die partielle Ableitung $\dot{(\,)} = \frac{\partial(\,)}{\partial t}$ gleich der materiellen Ableitung [28]

$$\mathring{\mathbf{A}}(\mathbf{X},t) = \frac{\partial\mathbf{A}(\mathbf{X},t)}{\partial t} = \dot{\mathbf{A}}(\mathbf{X},t)\ . \tag{A.42}$$

Im Falle eines $(\,)$-stufigen EULERschen Tensorfeldes $\mathbf{A}(\mathbf{x},t) = A_{(\,)}(\mathbf{x},t)\mathbf{e}_{(\,)}$, wobei $\mathbf{e}_{(\,)}$ die $(\,)$-stufige Einheitsdyade $\mathbf{e}_1\otimes\ldots\otimes\mathbf{e}_{(\,)}$ beschreibt, kann die materielle Ableitung mittels der partiellen Ableitung und der Kettenregel berechnet werden [29,30]

$$\mathring{\mathbf{A}}(\mathbf{x},t) = \dot{\mathbf{A}}(\mathbf{x},t) + \left[\nabla_{\mathbf{x}}\otimes\mathbf{A}(\mathbf{x},t)\right]^{\top}\cdot\mathbf{v} \tag{A.43}$$

$$\mathring{A}_{(\,)}(\mathbf{x},t)\mathbf{e}_{(\,)} = \frac{\partial A_{(\,)}(\mathbf{x},t)}{\partial t}\mathbf{e}_{(\,)} + \frac{\partial A_{(\,)}(\mathbf{x},t)}{\partial x_k}v_l\,\mathbf{e}_{(\,)}\otimes\mathbf{e}_k\cdot\mathbf{e}_l = \left[\frac{\partial A_{(\,)}}{\partial t} + A_{(\,),k}v_k\right]\mathbf{e}_{(\,)}\ . \tag{A.44}$$

[23] (Eringen 1962; S. 13), (Malvern 1969; S. 161), (Becker und Bürger 1975; S. 53), (Eringen 1980; S. 15), (Ogden 1984; S. 91), (Hahn 1985; S. 40), (Eringen und Maugin 1990a; S. 7), (Schröder 1996; S. 12), (Wilmanski 1998; S. 30), (Betten 2001; S. 39)

[24] (Miehe 1992; S. 34 ff.), (Keck 1998; S. 13), (Parisch 2003; S. 69, 70), (Holzapfel 2000; S. 83), (Wriggers 2001; S. 29, 30, 32), (Belytschko et al. 2001; S. 295), (Kardelky 2004; S. 132), (Silber und Steinwender 2005; S. 60)

[25] (Miehe 1992; S. 34 ff.), (Keck 1998; S. 13), (Parisch 2003; S. 69, 79), (Holzapfel 2000; S. 82), (Wriggers 2001; S. 29, 33), (Belytschko et al. 2001; S. 295), (Kardelky 2004; S. 132), (Silber und Steinwender 2005; S. 60, 121)

[26] (Eringen 1980; S. 20), (Krawietz 1986; S. 146), (Maugin 1992; S. 31), (Holzapfel 2000; S. 399), (Kästner 2010; S. 6)

[27] (Truesdell und Toupin 1960; S. 308), (Spencer 2004; S. 78), (Altenbach 2012; S. 120)

[28] (Eringen 1962; S. 62), (Betten 2001; S. 29), (Haupt 2002; S. 22), (Parisch 2003; S. 90), (Greve 2003; S. 4), (Spencer 2004; S. 37)

[29] (Eringen 1962; S. 62), (Malvern 1969; S. 141), (Becker und Bürger 1975; S. 13), (Ogden 1984; S. 123), (Schwarzl 1990; S. 294), (Eringen und Maugin 1990a; S. 12), (Macosko 1994; S. 46, 146), (Giesekus 1994; S. 15), (Holzapfel 2000; S. 66), (Betten 2001; S. 30), (Liu 2002; S. 15), (Haupt 2002; S. 21), (Greve 2003; S. 4), (Parisch 2003; S. 90), (Spencer 2004; S. 38), (Silber und Steinwender 2005; S. 41 ff.), (Altenbach 2012; S. 76, 84)

[30] Die materielle und partielle Zeitableitung eines EULERschen Tensors stimmen nicht überein (Backhaus 1983; S. 96).

Damit ergibt sich der LAGRANGEsche Deformationsgeschwindigkeitstensor [31] bequem durch die partielle Ableitung des LAGRANGEschen Verzerrungstensors [32]

$$\mathbf{D}(\mathbf{X},t) = \mathring{E}(\mathbf{X},t) = \dot{\mathbf{E}}(\mathbf{X},t) = D_{KL}(\mathbf{X},t)\mathbf{e}_K \otimes \mathbf{e}_L = \mathring{E}_{KL}(\mathbf{X},t)\mathbf{e}_K \otimes \mathbf{e}_L = \dot{E}_{KL}(\mathbf{X},t)\mathbf{e}_K \otimes \mathbf{e}_L \ . \tag{A.45}$$

Um den EULERschen Deformationsgeschwindigkeitstensor berechnen zu können, wird zunächst der Geschwindigkeitsgradient [33]

$$\mathbf{L}(\mathbf{x},t) = \left[\nabla_{\mathbf{x}} \otimes \mathbf{v}(\mathbf{x},t)\right]^{\top} = \mathring{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{F}^{-1} \tag{A.46}$$

$$L_{kl}(\mathbf{x},t)\mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l = \frac{\partial v_k(\mathbf{x},t)}{\partial x_l}\mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l = \mathring{F}_{kK} F^{-1}_{Kl}\, \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l \tag{A.47}$$

aus dem EULERschen Geschwindigkeitsfeld berechnet. Letzteres ergibt sich aus der materiellen Ableitung des EULERschen Verschiebungsfeldes

$$\mathbf{v}(\mathbf{x},t) = \mathring{\mathbf{u}}(\mathbf{x},t) = v_k(\mathbf{x},t)\mathbf{e}_k = \mathring{u}_k(\mathbf{x},t)\mathbf{e}_k = \left[\frac{\partial u_k(\mathbf{x},t)}{\partial t} + u_{k,l}(\mathbf{x},t)\, v_l(\mathbf{x},t)\right]\mathbf{e}_k \ . \tag{A.48}$$

Damit bestimmt sich der EULERsche Deformationsgeschwindigkeitstensor durch [34]

$$\mathbf{d}(\mathbf{x},t) = \frac{1}{2}\left[\mathbf{L}(\mathbf{x},t) + \mathbf{L}^{\top}(\mathbf{x},t)\right] = d_{kl}(\mathbf{x},t)\mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l = \frac{1}{2}\left[L_{kl}(\mathbf{x},t) + L_{lk}(\mathbf{x},t)\right]\mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l \ . \tag{A.49}$$

Er ist mit der materiellen Ableitung des EULERschen Verzerrungstensors $\mathring{\mathbf{e}}(\mathbf{x},t) = \mathring{e}_{kl}(\mathbf{x},t)\mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l$ (Eringen 1962; S. 79) und dem EULERschen Verzerrungstensor selbst über [35]

$$\mathbf{d}(\mathbf{x},t) = \mathring{\mathbf{e}} + \mathbf{L}^{\top} \cdot \mathbf{e} + \mathbf{e} \cdot \mathbf{L} = d_{kl}(\mathbf{x},t)\mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l = \left(\mathring{e}_{kl} + L_{nk}e_{nl} + e_{kn}L_{nl}\right)\mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l \tag{A.50}$$

verknüpft. Es ist zu erkennen, dass d_{ij} nicht identisch ist mit der materiellen Ableitung von e_{ij} (Eringen und Maugin 1990a; S. 13). Der LAGRANGEsche Deformationsgeschwindigkeitstensor ist mit dem EULERschen Deformationsgeschwindigkeitstensor über die *pull back* Operation [36]

$$\mathbf{D}(\mathbf{X},t) = \mathbf{F}^{\top}(\mathbf{X},t) \cdot \mathbf{d}(\mathbf{x},t) \cdot \mathbf{F}(\mathbf{X},t) \tag{A.51}$$

$$D_{KL}(\mathbf{X},t)\mathbf{e}_K \otimes \mathbf{e}_L = F_{kK}(\mathbf{X},t)\mathbf{e}_K \otimes \mathbf{e}_k \cdot d_{kl}(\mathbf{x},t)\mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l \cdot F_{lL}(\mathbf{X},t)\mathbf{e}_l \otimes \mathbf{e}_L = F_{kK}d_{kl}F_{lL}\mathbf{e}_K \otimes \mathbf{e}_L \tag{A.52}$$

und umgekehrt über die *push forward* Operation [37]

$$\mathbf{d}(\mathbf{x},t) = \mathbf{F}^{-\top}(\mathbf{x},t) \cdot \mathbf{D}(\mathbf{X},t) \cdot \mathbf{F}^{-1}(\mathbf{x},t) \tag{A.53}$$

$$d_{kl}(\mathbf{x},t)\mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l = F^{-1}_{Kk}(\mathbf{x},t)\mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_K \cdot D_{KL}(\mathbf{X},t)\mathbf{e}_K \otimes \mathbf{e}_L \cdot F^{-1}_{Ll}(\mathbf{x},t)\mathbf{e}_L \otimes \mathbf{e}_l = F^{-1}_{Kk}D_{KL}F^{-1}_{Ll}\mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l \tag{A.54}$$

verbunden. Der linearisierte LAGRANGEsche Deformationsgeschwindigkeitstensor (Gleichung (A.81)) und der linearisierte EULERsche Deformationsgeschwindigkeitstensor (Gleichung (A.99)) stimmen für geometrisch lineare Theorie überein (Gleichung (A.103)).

[31] Der LAGRANGEsche Deformationsgeschwindigkeitstensor wird weniger oft angewendet (Schwarzl 1990; S. 300).

[32] (Eringen 1962; S. 71, 79)

[33] (Ogden 1984; S. 123), (Krawietz 1986; S. 101), (Macosko 1994; S. 68), (Giesekus 1994; S. 16), (Holzapfel 2000; S. 95), (Haupt 2002; S. 43), (Parisch 2003; S. 91), (Greve 2003; S. 6), (Spencer 2004; S. 85), (Altenbach 2012; S. 112)

[34] (Eringen 1962; S. 70), (Krawietz 1986; S. 101), (Schwarzl 1990; S. 300), (Eringen und Maugin 1990a; S. 12), (Holzapfel 2000; S. 97), (Betten 2001; S. 65), (Liu 2002; S. 21), (Haupt 2002; S. 45), (Parisch 2003; S. 91), (Greve 2003; S. 24), (Betten 2005; S. 39), (Altenbach 2012; S. 112)

[35] (Eringen 1962; S. 79), (Eringen und Maugin 1990a; S. 13), (Holzapfel 2000; S. 102), (Haupt 2002; S. 48), (Betten 2005; S. 39), (Altenbach 2012; S. 112)

[36] (Eringen 1962; S. 71, 79), (Ogden 1984; S. 123), (Eringen und Maugin 1990a; S. 13), (Holzapfel 2000; S. 101), (Haupt 2002; S. 48), (Parisch 2003; S. 97), (Altenbach 2012; S. 112)

[37] (Schwarzl 1990; S. 301), (Haupt 2002; S. 48), (Altenbach 2012; S. 112)

A.2 Geometrische Linearisierung des LAGRANGEschen und EULERschen Verzerrungstensors

Im Rahmen geometrisch linearer Theorie ist der Verschiebungsvektor wesentlich kleiner als eine charakteristische Länge ℓ_0 des zu betrachteten materiellen Körpers [38]

$$\|\mathbf{u}\| = \|u_K \mathbf{e}_K\| = \|u_k \mathbf{e}_k\| = \sqrt{u_K\, u_K} = \sqrt{u_k\, u_k} \ll \ell_0 \ . \tag{A.55}$$

Aufgrund der Beschränkung auf kleine Verschiebungsgradienten ist der Absolutwert $|\ |$ jeder Koordinate des Verschiebungsgradienten viel kleiner als die Zahl Eins [39]

$$|\mathbf{H}| = |u_{K,L}|\mathbf{e}_K \otimes \mathbf{e}_L = |u_{k,L}|\mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_L \ll 1\ \mathbf{e}_K \otimes \mathbf{e}_L \tag{A.56}$$

$$|\mathbf{h}| = |u_{k,l}|\mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l = |u_{K,L}|\mathbf{e}_K \otimes \mathbf{e}_l \ll 1\ \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l \ . \tag{A.57}$$

Daher ist die Norm $\|\ \|$ des Verschiebungsgradienten ebenfalls viel kleiner als die Zahl Eins [40]

$$\|\mathbf{H}\| = \sqrt{u_{K,L}\, u_{K,L}} = \sqrt{u_{k,L}\, u_{k,L}} \ll 1 \tag{A.58}$$

$$\|\mathbf{h}\| = \sqrt{u_{k,l}\, u_{k,l}} = \sqrt{u_{K,l}\, u_{K,l}} \ll 1 \ . \tag{A.59}$$

Infolgedessen können die quadratischen Terme

$$\|\mathbf{H}^{\mathsf{T}} \cdot \mathbf{H}\| = \|u_{M,K} u_{M,L} \mathbf{e}_K \otimes \mathbf{e}_L\| = \sqrt{u_{M,K}\, u_{M,L}\, u_{N,K}\, u_{N,L}} = \sqrt{u_{m,K}\, u_{m,L}\, u_{n,K}\, u_{n,L}} \ll \|\mathbf{H}\| \tag{A.60}$$

$$\|\mathbf{h}^{\mathsf{T}} \cdot \mathbf{h}\| = \|u_{m,k} u_{m,l} \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l\| = \sqrt{u_{m,k}\, u_{m,l}\, u_{n,k}\, u_{n,l}} = \sqrt{u_{M,k}\, u_{M,l}\, u_{N,k}\, u_{N,l}} \ll \|\mathbf{h}\| \tag{A.61}$$

im Vergleich zu den linearen Termen vernachlässigt werden [41].

Im Folgenden wird gezeigt, dass die Referenz- und Momentankonfiguration für geometrisch lineare Theorie zusammenfallen. Das wird exemplarisch für den LAGRANGEschen und EULERschen Verzerrungstensor entsprechend Gleichung (A.39) gezeigt. Dazu sei in beiden Formulierungen der materielle Punkt $X_K \mathbf{e}_K$ ausgewertet. In der EULERschen Formulierung ist diese Forderung erfüllt, wenn der Raumpunkt $x_m \mathbf{e}_m$ die Koordinaten entsprechend der Bahnlinie des zu betrachtenten materiellen Punktes $x_m(\mathbf{X},t)\mathbf{e}_m$ nach Gleichung (A.17) einnimmt. Daher geht Gleichung (A.39) über in

$$E_{KL}(\mathbf{X},t)\mathbf{e}_K \otimes \mathbf{e}_L = F_{kK}(\mathbf{X},t)\mathbf{e}_K \otimes \mathbf{e}_k \cdot e_{kl}\left[\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{X},t),t\right]\mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l \cdot F_{lL}(\mathbf{X},t)\mathbf{e}_l \otimes \mathbf{e}_L \ . \tag{A.62}$$

Die Einheitsdyade $\mathbf{e}_K \otimes \mathbf{e}_L$ (Spencer 2004; S. 19) kann auf beiden Seiten ausgeklammert werden. Zur übersichtlichen Darstellung werden daher im Folgenden lediglich die Koordinaten mitgeführt. In Bezug auf Gleichungen (A.20), (A.35) und (A.37) werden der materielle Deformationsgradient sowie der LAGRANGEsche Verzerrungstensor durch den materiellen Verschiebungsgradienten ausgedrückt, und der EULERsche Verzerrungstensor durch den räumlichen Verschiebungsgradienten

$$\frac{1}{2}\left(u_{K,L} + u_{L,K} + u_{M,K}\, u_{M,L}\right) = \left(\delta_{MK} Q^{-1}_{Mk} + u_{k,K}\right)\frac{1}{2}\left(u_{k,l} + u_{l,k} - u_{m,k}\, u_{m,l}\right)\left(\delta_{NL} Q^{-1}_{Nl} + u_{l,L}\right) \ . \tag{A.63}$$

Wegen Gleichungen (A.56) und (A.57) können quadratische Terme gegenüber linearen Termen vernachlässigt werden

$$\frac{1}{2}\left(u_{K,L} + u_{L,K} + \cancel{u_{M,K}\, u_{M,L}}\right) = \frac{1}{2}\left(u_{k,l} + u_{l,k} - \cancel{u_{m,k}\, u_{m,l}}\right)\left(Q^{-1}_{Kk} Q^{-1}_{Ll} + u_{k,K}\, u_{l,L} + Q^{-1}_{Ll}\, u_{k,K} + u_{l,L} Q^{-1}_{Kk}\right) \tag{A.64}$$

$$= \frac{1}{2}\left(u_{k,l} + u_{l,k}\right)\left(Q^{-1}_{Kk}\, Q^{-1}_{Ll}\right) + \frac{1}{2}\left[\cancel{u_{k,l}\, u_{k,K}\, u_{l,L}} + \cancel{u_{k,l}\, u_{k,K}}\, Q^{-1}_{Ll} + \cancel{u_{k,l}\, u_{l,L}}\, Q^{-1}_{Kk}\right] \tag{A.65}$$

$$+ \frac{1}{2}\left[\cancel{u_{l,k}\, u_{k,K}\, u_{l,L}} + \cancel{u_{l,k}\, u_{k,K}}\, Q^{-1}_{Ll} + \cancel{u_{l,k}\, u_{l,L}}\, Q^{-1}_{Kk}\right] \tag{A.66}$$

$$E^{\mathrm{lin}}_{KL}(\mathbf{X},t) = Q^{-1}_{Kk}\, e^{\mathrm{lin}}_{kl}\left[\mathbf{x}(\mathbf{X},t),t\right] Q^{-1}_{Ll} \ . \tag{A.67}$$

[38] (Haupt 2002; S. 53), (Kästner 2010; S. 6)

[39] (Truesdell und Toupin 1960; S. 303), (Malvern 1969; S. 161), (Mälmeisters 1977; S. 81), (Silber und Steinwender 2005; S. 67), (Spencer 2004; S. 78), (Ottosen 2005; S. 23)

[40] (Haupt 2002; S. 53), (Greve 2003; S. 22), (Kästner 2010; S. 6)

[41] (Malvern 1969; S. 161), (Mälmeisters 1977; S. 81), (Betten 2001; S. 42), (Greve 2003; S. 23), (Ottosen 2005; S. 23), (Silber und Steinwender 2005; S. 67)

Dabei wurde berücksichtigt, dass

$$\mathbf{H}^{\top}\cdot\mathbf{h}\cdot\mathbf{1}\neq\mathbf{H}^{\top}\cdot\mathbf{H} \qquad \text{(A.68)} \qquad \underline{u_{k,K}\,u_{k,l}\,Q^{-1}_{Ll}}\neq u_{k,K}\,u_{k,L}\ . \qquad \text{(A.69)}$$

Die Umrechnungen des materiellen und räumlichen Verschiebungsgradienten erfolgen nach Gleichungen (A.32) und (A.33). Die nach der geometrischen Linearisierung verbleibenden Terme definieren die linearisierten Verzerrungsmaße [42, 43]

$$\mathbf{E}^{\mathrm{lin}}=E^{\mathrm{lin}}_{KL}(\mathbf{X},t)\mathbf{e}_K\otimes\mathbf{e}_L=\frac{1}{2}\left[u_{K,L}(\mathbf{X},t)+u_{L,K}(\mathbf{X},t)\right]\mathbf{e}_K\otimes\mathbf{e}_L=\frac{1}{2}\left(\mathbf{H}+\mathbf{H}^{\top}\right) \qquad \text{(A.70)}$$

$$\mathbf{e}^{\mathrm{lin}}=e^{\mathrm{lin}}_{kl}\left[\mathbf{x}(\mathbf{X},t),t\right]\mathbf{e}_k\otimes\mathbf{e}_l=\frac{1}{2}\left\{u_{k,l}\left[\mathbf{x}(\mathbf{X},t),t\right]+u_{l,k}\left[\mathbf{x}(\mathbf{X},t),t\right]\right\}\mathbf{e}_k\otimes\mathbf{e}_l=\frac{1}{2}\left(\mathbf{h}+\mathbf{h}^{\top}\right)\ . \qquad \text{(A.71)}$$

Letztlich muss nur noch gezeigt werden, dass der materielle Punkt **X** und der räumliche Punkt **x** gleichgesetzt werden können, sodass keine Notwendigkeit besteht zwischen räumlichen und materiellen Koordinaten zu unterscheiden (Haupt 2002; S. 57). Dazu wird der linearisierte EULERsche Verzerrungstensor für kleine Verschiebungen in Bezug auf Gleichung (A.17) mittels der TAYLOR Reihe um den Raumpunkt (Altenbach 2012; S. 120)

$$\mathbf{x}=\mathbf{x}(\mathbf{X},t_{\mathrm{R}})=\mathbf{X} \qquad \text{(A.72)}$$

approximiert. Daher nimmt das Argument von $\mathbf{e}^{\mathrm{lin}}$ den Wert $\mathbf{x}\cdot\mathbf{e}_m=x_m=\mathbf{X}\cdot\mathbf{e}_m=X_KQ_{mK}$ an und man erhält (Altenbach 2012; S. 120)

$$e^{\mathrm{lin}}_{kl}\left[\mathbf{x}(\mathbf{X},t),t\right]=e^{\mathrm{lin}}_{kl}\left[\mathbf{x}(\mathbf{X},t),t\right]\Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{X}}+\frac{\partial\,e^{\mathrm{lin}}_{kl}\left[\mathbf{x}(\mathbf{X},t),t\right]}{\partial x_m}\Bigg|_{\mathbf{x}=\mathbf{X}}\underbrace{\left[\mathbf{x}(\mathbf{X},t)\cdot\mathbf{e}_m-\mathbf{X}\cdot\mathbf{e}_m\right]}_{=\mathbf{u}\cdot\mathbf{e}_m}+\ldots \qquad \text{(A.73)}$$

$$\approx e^{\mathrm{lin}}_{kl}\left[\mathbf{x}=\mathbf{X},t\right]\ . \qquad \text{(A.74)}$$

Im Zuge der Einschränkung auf kleine Verschiebungen kann nach Gleichung (A.55) der zweite Term der TAYLOR Reihe gegenüber dem ersten Term vernachlässigt werden. Dadurch wird deutlich, dass **X** das einzige Argument der beiden linearisierten Verzerrungsmaße ist. Infolgedessen sind die linke und rechte Seite von Gleichung (A.67) identisch [44] und man erhält

$$\mathbf{E}^{\mathrm{lin}}(\mathbf{X},t)\approx\mathbf{e}^{\mathrm{lin}}(\mathbf{x},t)=:\boldsymbol{\varepsilon} \qquad \text{(A.75)} \qquad E^{\mathrm{lin}}_{KL}(\mathbf{X},t)\approx Q^{-1}_{Kk}\,e^{\mathrm{lin}}_{kl}(\mathbf{x},t)\,Q^{-1}_{Ll}=:\varepsilon_{KL}\ . \qquad \text{(A.76)}$$

Die linearisierten Verzerrungsmaße gehen in das technische Verzerrungsmaß

$$\boldsymbol{\varepsilon}=\frac{1}{2}\left(u_{k,l}+u_{l,k}\right)\mathbf{e}_k\otimes\mathbf{e}_l=\frac{1}{2}\left(u_{K,L}+u_{L,K}\right)\mathbf{e}_K\otimes\mathbf{e}_L \qquad \text{(A.77)}$$

über und es ist nicht notwendig zwischen **x** und **X** zu unterscheiden. Somit ist gezeigt, dass die Referenz- und Momentankonfiguration für geometrisch lineare Theorie in guter Näherung zusammenfallen [45]. Daher braucht man nicht zwischen LAGRANGEschen und EULERschen Verzerrungstensor zu unterscheiden [46]. Damit verbunden ist ebenfalls, dass der materielle und räumliche Verschiebungsgradient nahezu identisch sind [47]

$$\mathbf{H}\approx\mathbf{h}\ . \qquad \text{(A.78)}$$

[42] (Truesdell und Toupin 1960; S. 306), (Eringen 1962; S. 16), (Eringen 1980; S. 19), (Betten 2001; S. 40), (Betten 2005; S. 38)

[43] Der linearisierte LAGRANGEsche Verzerrungstensor ist in Becker und Bürger (1975; S. 49), Mälmeisters (1977; S. 81), Krawietz (1986; S. 145), Maugin (1992; S. 31 ff.), Giesekus (1994; S. 47), Kaliske (1995; S. 28), Haupt (2002; S. 56), Liu (2002; S. 10), Greve (2003; S. 22), Parisch (2003; S. 83), Silber und Steinwender (2005; S. 67 ff.) und Bertram (2008; S. 110) aufgeführt, der linearisierte EULERsche Verzerrungstensor in (Altenbach 2012; S. 121).

[44] (Truesdell und Toupin 1960; Gl. (57.10)), (Eringen 1980; S. 20), (Betten 2005; S. 38)

[45] (Truesdell und Toupin 1960; S. 308), (Eringen 1980; S. 20), (Krawietz 1986; S. 146), (Eringen und Maugin 1990a; S. 10), (Maugin 1992; S. 31), (Holzapfel 2000; S. 399), (Kästner 2010; S. 6)

[46] englisches Originalzitat: „Thus in the infinitesimal deformation theory the distinction between the Lagrangian and Eulerian strains disappear“ (Eringen 1980; S. 20), (Eringen und Maugin 1990a; S. 10), (Betten 2001; S. 40).

[47] (Truesdell und Toupin 1960; S. 308), (Spencer 2004; S. 78), (Altenbach 2012; S. 120)

A.3 Linearisierung des LAGRANGEschen und EULERschen Deformationsgeschwindigkeitstensors für geometrisch linearen einfachen Schub

Im Folgenden werden Deformationsgeschwindigkeitstensoren für geometrisch linearen einfachen Schub ausgewertet. Der LAGRANGEsche Deformationsgeschwindigkeitstensor kann über die materielle Ableitung des LAGRANGEschen Verzerrungstensors berechnet werden. Die Linearisierung erfolgt unter Berücksichtigung kleiner Verschiebungsgradienten entsprechend Gleichung (A.58), aus dem sich

$$\left\| \mathbf{H}^{\mathrm{T}} \cdot \mathring{\mathbf{H}} \right\| = \left\| u_{M,K} \mathring{u}_{M,L} \, \mathbf{e}_K \otimes \mathbf{e}_L \right\| = \sqrt{u_{M,K} \mathring{u}_{M,L} \, u_{N,K} \mathring{u}_{N,L}} \ll \left\| \mathring{\mathbf{H}} \right\| \tag{A.79}$$

und folglich

$$\mathbf{D}^{\mathrm{lin}} = \mathring{\mathbf{E}}^{\mathrm{lin}} = \dot{\mathbf{E}}^{\mathrm{lin}} \tag{A.80}$$

$$D_{KL}^{\mathrm{lin}} = \mathring{E}_{KL}^{\mathrm{lin}} = \dot{E}_{KL}^{\mathrm{lin}} \tag{A.81}$$

ergeben [48, 49].

Um den EULERschen Deformationsgeschwindigkeitstensor für geometrisch lineare Theorie bereitzustellen, wird unter Berücksichtigung von Gleichungen (A.20) und (A.31) zunächst

$$\mathbf{1} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^{-1} = (\mathbf{1} + \mathbf{H}) \cdot (\mathbf{1} - \mathbf{h}) \tag{A.82}$$

$$\delta_{kl} \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l = \left(\delta_{KM} Q_{Kk}^{-1} + u_{k,M} \right) \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_M \cdot \left(\delta_{nl} Q_{nN}^{-1} - u_{N,l} \right) \mathbf{e}_N \otimes \mathbf{e}_l = \left(Q_{Nk}^{-1} + u_{k,N} \right) \left(Q_{lN} - u_{N,l} \right) \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l \tag{A.83}$$

ausgewertet und man erhält

$$\mathbf{H} \cdot \mathbf{1} - \mathbf{H} \cdot \mathbf{h} - \mathbf{h} = \mathbf{0} \tag{A.84}$$

$$u_{k,N} Q_{lN} - u_{k,N} u_{N,l} - u_{k,l} = 0 \, . \tag{A.85}$$

Dabei ist analog zu Gleichung (A.69) zu beachten, dass

$$\mathbf{H} \cdot \mathbf{1} \neq \mathbf{h} \tag{A.86}$$

$$u_{k,N} Q_{lN} \neq u_{k,l} \, . \tag{A.87}$$

Die materielle Ableitung von Gleichung (A.84)

$$\mathring{\mathbf{H}} \cdot \mathbf{1} - \mathring{\mathbf{H}} \cdot \mathbf{h} = \mathring{\mathbf{h}} + \mathbf{H} \cdot \mathring{\mathbf{h}} \tag{A.88}$$

$$\mathring{u}_{k,N} Q_{lN} - \mathring{u}_{k,N} u_{N,l} = \mathring{u}_{k,l} + u_{k,N} \mathring{u}_{N,l} \tag{A.89}$$

wird anschließend zur Linearisierung des Geschwindigkeitsgradienten [50] benötigt.

Der Geschwindigkeitsgradient kann unter Verwendung von Gleichungen (A.47) und (A.89) mittels der materiellen und räumlichen Verschiebungsgradienten beschrieben werden

$$\mathbf{L} = \mathring{\mathbf{H}} \cdot \mathbf{1} - \mathring{\mathbf{H}} \cdot \mathbf{h} = \mathring{\mathbf{h}} + \mathbf{H} \cdot \mathring{\mathbf{h}} \tag{A.90}$$

$$L_{kl} = \mathring{u}_{k,N} Q_{lN} - \mathring{u}_{k,N} u_{N,l} = \mathring{u}_{k,l} + u_{k,N} \mathring{u}_{N,l} \, . \tag{A.91}$$

Im Rahmen kleiner Verschiebungsgradienten, wie in Gleichungen (A.56) und (A.57) unterstellt ist, können jeweils die zweiten Summanden

$$\left\| \mathbf{H} \cdot \mathring{\mathbf{h}} \right\| = \left\| u_{k,N} \mathring{u}_{N,l} \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l \right\| = \sqrt{u_{k,N} \mathring{u}_{N,l} \, u_{k,M} \mathring{u}_{M,l}} \ll \left\| \mathring{\mathbf{h}} \right\| \tag{A.92}$$

$$\left\| \mathring{\mathbf{H}} \cdot \mathbf{h} \right\| = \left\| \mathring{u}_{k,N} u_{N,l} \mathbf{e}_k \otimes \mathbf{e}_l \right\| = \sqrt{\mathring{u}_{k,N} u_{N,l} \, \mathring{u}_{k,M} u_{M,l}} \ll \left\| \mathring{\mathbf{H}} \cdot \mathbf{1} \right\| \tag{A.93}$$

gegenüber den Ersten vernachlässigt werden. Damit ergibt sich der geometrisch linearisierte Geschwindigkeitsgradient

$$\mathbf{L}^{\mathrm{lin}} \approx \mathring{\mathbf{H}} \cdot \mathbf{1} \approx \mathring{\mathbf{h}} \tag{A.94}$$

$$L_{kl}^{\mathrm{lin}} \approx \mathring{u}_{k,N} Q_{lN} \approx \mathring{u}_{k,l} \, . \tag{A.95}$$

Aufgrund der Tatsache, dass der materielle Verschiebungsgradient **H** von den materiellen Koordinaten **X** abhängt, ist die materielle Ableitung nach Gleichung (A.42) identisch der partiellen Zeitableitung. Die materielle Ableitung des räumlichen Verschiebungsgradienten besteht nach Gleichung (A.43) aus der Summe der partiellen Ableiung und einem zweiten Summanden. Für einfachen Schub ergibt sich der zweite Summand exakt zu Null, da der räumliche Verschiebungsgradient nach Gleichung (3.21)

[48] (Malvern 1969; S. 342)

[49] Der linearisierte LAGRANGEsche Deformationsgeschwindigkeitstensor ergibt sich direkt aus dem linearisierten LAGRANGEschen Verzerrungstensor (Gleichung (A.70)).

[50] (Haupt 2002; S. 56)

ortsunabhängig und somit $u_{k,lm} = 0$ ist. Folglich kann die materielle Ableitung exakt durch die partielle Zeitableitung ersetzt werden [51]

$$\mathbf{L}^{\mathrm{lin}} \approx \dot{\mathbf{H}} \cdot \mathbf{1} \approx \dot{\mathbf{h}} \qquad \text{(A.96)} \qquad L_{kl}^{\mathrm{lin}} \approx \dot{u}_{k,N} Q_{lN} \approx \dot{u}_{k,l} \ . \qquad \text{(A.97)}$$

Letztere Betrachtung gilt ebenfalls für homogene einachsige Zug-/Druckbeanspruchung, sodass Gleichung (A.96) auch zur Modellierung des Druckversuchs in Abschnitt 9 angewendet werden kann. Unter Berücksichtigung von Gleichung (A.49) erhält man somit für den linearisierten EULERschen Deformationsgeschwindigkeitstensors

$$\mathbf{d}^{\mathrm{lin}} = \frac{1}{2}\left(\dot{\mathbf{h}} + \dot{\mathbf{h}}^{\top}\right) \qquad \text{(A.98)} \qquad d_{kl}^{\mathrm{lin}} = \frac{1}{2}\left(\dot{u}_{k,l} + \dot{u}_{l,k}\right) \ . \qquad \text{(A.99)}$$

Mit Gleichung (A.71) ergibt sich

$$\mathbf{d}^{\mathrm{lin}} = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\mathrm{lin}} \qquad \text{(A.100)} \qquad d_{kl}^{\mathrm{lin}} = \dot{\varepsilon}_{kl}^{\mathrm{lin}} \ , \qquad \text{(A.101)}$$

das sich ebenfalls aus der Linearisierung von Gleichung (A.50) mit $\mathring{e}_{kl} = \mathring{e}_{kl}^{\mathrm{lin}} - \frac{1}{2}(u_{m,k}u_{m,l})^{\circ}$ erschließt. In Bezug auf Gleichungen (A.54) und (A.72) bis (A.74) kann man letztlich zusammenfassen, dass

$$\mathbf{D}^{\mathrm{lin}}(\mathbf{X},t) \approx \mathbf{d}^{\mathrm{lin}}(\mathbf{x},t) = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \qquad \text{(A.102)} \qquad D_{KL}^{\mathrm{lin}}(\mathbf{X},t) \approx Q_{Kk}^{-1} d_{kl}^{\mathrm{lin}}(\mathbf{x},t)\, Q_{Ll}^{-1} = \dot{\varepsilon}_{KL} \ . \qquad \text{(A.103)}$$

A.4 Komplexe Schreibweise von LAOS in elastischer und dissipativer Interpretation

A.4.1 Komplexe Schreibweise in dissipativer Interpretation

Ausgangspunkt zur Berechnung der komplexen Schreibweise in dissipativer Interpretation ist Gleichung (3.104)

$$\tau_{\tilde{\infty}}(t) = \hat{\gamma}\omega \sum_{k}^{\infty} \left[c_k(\omega,\hat{\gamma})\cos(k\omega t) + d_k(\omega,\hat{\gamma})\sin(k\omega t)\right] \qquad k = \text{ungerade} \ . \qquad \text{(3.104)}$$

Unter Berücksichtigung von

$$-\arctan\left(\frac{d_k}{c_k}\right) \overset{\substack{c_k\geq 0\\ d_k\geq 0}}{=} \arctan\left(\frac{-d_k}{c_k}\right) \qquad \text{(A.104)}$$

kann Gleichung (3.141) zu

$$\tau_{\tilde{\infty}}(t) = \hat{\gamma}\omega \sum_{k}^{\infty} \sqrt{c_k^2 + d_k^2}\cos\left[k\omega t - \arctan\left(\frac{d_k}{c_k}\right)\right] \qquad k = \text{ungerade} \qquad \text{(A.105)}$$

$$= \hat{\gamma}\omega \sum_{k}^{\infty} \Re\left\{\sqrt{c_k^2 + d_k^2}\, e^{j\left[k\omega t - \arctan\left(\frac{d_k}{c_k}\right)\right]}\right\} \qquad k = \text{ungerade} \qquad \text{(A.106)}$$

$$\tau_{\tilde{\infty}}(t) = \hat{\gamma}\omega \sum_{k}^{\infty} \Re\left\{\sqrt{c_k^2 + d_k^2}\, e^{j\left[-\arctan\left(\frac{d_k}{c_k}\right)\right]} e^{jk\omega t}\right\} \qquad k = \text{ungerade} \qquad \text{(A.107)}$$

$$= \hat{\gamma}\omega \sum_{k}^{\infty} \Re\left\{\sqrt{c_k^2 + d_k^2}\, e^{j\arctan\left(\frac{-d_k}{c_k}\right)} e^{jk\omega t}\right\} \qquad k = \text{ungerade} \qquad \text{(A.108)}$$

umgeformt werden. Die Umrechnung zwischen exponentieller und algebraischer Darstellung für komplexe Zahlen

$$\tau_{\tilde{\infty}}(t) = \hat{\gamma}\omega \sum_{k}^{\infty} \Re\left\{(c_k - j\,d_k)\, e^{jk\omega t}\right\} \qquad k = \text{ungerade} \qquad \text{(A.109)}$$

liefert die komplexe Schreibweise in dissipativer Interpretation

$$\tau_{\tilde{\infty}}(t) = \hat{\gamma}\omega \sum_{k}^{\infty} \left[\Re\left\{\eta_k^{*}\, e^{jk\omega t}\right\}\right] \qquad k = \text{ungerade} \ . \qquad \text{(3.110)}$$

[51] (Maugin 1992; S. 32), (Miehe 1992; S. 1)

A.4.2 Komplexe Schreibweise in elastischer Interpretation

Die komplexe Schreibweise in elastischer Interpretation resultiert ausgehend von Gleichung (3.100)

$$\tau_{\infty}(t) = \hat{\gamma} \sum_{k}^{\infty} \left[a_k(\omega, \hat{\gamma}) \sin(k\omega t) + b_k(\omega, \hat{\gamma}) \cos(k\omega t) \right] \qquad k = \text{ungerade} \,. \tag{3.100}$$

Unter Verwendung von Gleichung (3.141) sowie $e^{j\frac{\pi}{2}} = j$ und Gleichung (A.104) ergibt sich daraus

$$\tau_{\infty}(t) = \hat{\gamma} \sum_{k}^{\infty} \sqrt{a_k^2 + b_k^2} \cos\left[k\omega t - \arctan\left(\frac{a_k}{b_k}\right)\right] \qquad k = \text{ungerade} \tag{A.110}$$

$$= \hat{\gamma} \sum_{k}^{\infty} \sqrt{a_k^2 + b_k^2} \sin\left[\frac{\pi}{2} + k\omega t - \arctan\left(\frac{a_k}{b_k}\right)\right] \qquad k = \text{ungerade} \tag{A.111}$$

$$= \hat{\gamma} \sum_{k}^{\infty} \Im\left\{ \sqrt{a_k^2 + b_k^2}\, e^{j\left[\frac{\pi}{2} + k\omega t - \arctan\left(\frac{a_k}{b_k}\right)\right]} \right\} \qquad k = \text{ungerade} \tag{A.112}$$

$$\tau_{\infty}(t) = \hat{\gamma} \sum_{k}^{\infty} \Im\left\{ \sqrt{a_k^2 + b_k^2}\, e^{j\frac{\pi}{2}} e^{j\left[-\arctan\left(\frac{a_k}{b_k}\right)\right]} e^{jk\omega t} \right\} \qquad k = \text{ungerade} \tag{A.113}$$

$$= \hat{\gamma} \sum_{k}^{\infty} \Im\left\{ \sqrt{a_k^2 + b_k^2}\, j e^{j\arctan\left(\frac{-a_k}{b_k}\right)} e^{jk\omega t} \right\} \qquad k = \text{ungerade} \,. \tag{A.114}$$

Die Umrechung zwischen exponentiellen und algebraischer Darstellung für komplexe Zahlen liefert zunächst

$$\tau_{\infty}(t) = \hat{\gamma} \sum_{k}^{\infty} \Im\left\{ j\,(b_k - j\,a_k)\, e^{jk\omega t} \right\} \qquad k = \text{ungerade} \tag{A.115}$$

$$= \hat{\gamma} \sum_{k}^{\infty} \Im\left\{ (a_k + j\,b_k)\, e^{jk\omega t} \right\} \qquad k = \text{ungerade} \tag{A.116}$$

und führt auf die komplexe Schreibweise in elastischer Interpretation

$$\tau_{\infty}(t) = \hat{\gamma} \sum_{k}^{\infty} \left[\Im\left\{ G_k^* e^{jk\omega t} \right\} \right] \qquad k = \text{ungerade} \,. \tag{3.109}$$

A.5 Identifikation der Spannung des endochronen MAXWELL Elements als Gleichgewichtsspannung

Im Folgenden wird gezeigt, dass die Spannung des endochronen MAXWELL Elements eine Gleichgewichtsspannung ist. Dazu werden die konstitutiven Beziehungen aus Gleichungen (3.58), (6.8), (6.9) und (6.10)

$$\dot{u} = |\dot{\gamma}_{\mathrm{ch}}| \tag{A.117}$$

$$\dot{\gamma}_{\mathrm{ch}} = \gamma'_{\mathrm{ch}}\, \dot{u} \tag{A.118}$$

$$\dot{\tau}_{\mathrm{ch}} = \tau'_{\mathrm{ch}}\, \dot{u} \tag{A.119}$$

$$G\gamma'_{\mathrm{ch}}(u) = \frac{G}{\beta}\tau_{\mathrm{ch}}(u) + \tau'_{\mathrm{ch}}(u) \tag{A.120}$$

$$G\dot{\gamma}_{\mathrm{ch}} = \frac{G}{\beta}\tau_{\mathrm{ch}}\,\dot{u} + \dot{\tau}_{\mathrm{ch}} \tag{A.121}$$

unter Relaxations- und Kriechbelastung ausgewertet. Als erstes wird das Erreichen des Gleichgewichtszustandes infolge dem Aufbringen einer Relaxationsbedingung untersucht (Kammer 2015; S. 30). Dazu wird $\gamma_{\mathrm{ch}} = \text{konst} \rightarrow \dot{\gamma}_{\mathrm{ch}} = 0$ und $\dot{u} = |\dot{\gamma}_{\mathrm{ch}}| = 0$ in Gleichung (A.121) eingearbeitet

$$\cancel{G\dot{\gamma}_{\mathrm{ch}}} = \cancel{\frac{G}{\beta}\tau_{\mathrm{ch}}}\,\dot{u} + \dot{\tau}_{\mathrm{ch}} \tag{A.122}$$

und man erhält für

$$\text{Relaxation } (\gamma_{ch} = \text{konst}): \quad \dot{\tau}_{ch} = 0 \quad \rightarrow \quad \tau_{ch} \equiv \tau_{ch}^{eq} \quad \rightarrow \quad \gamma_{ch} = \gamma_{ch}^{eq} . \tag{A.123}$$

Während eines Relaxationsversuchs ergibt sich somit keine zeitliche Änderung der Spannung. Die zeitlich unmittelbar vor Relaxationsbeginn wirkende Spannung bleibt auch während der gesamten Relaxationshaltezeit bestehen. Die Spannung des endochronen MAXWELL Elements ist daher eine Gleichgewichtsspannung. Dasselbe Ergebnis erhält man für Kriechen, $\tau_{ch} = \text{konst} \rightarrow \dot{\tau}_{ch} = 0$. Unter Berücksichtigung von Gleichung (A.119) kann Kriechen zunächst rein formal über

$$①: \quad \dot{u} = 0, \ \tau'_{ch} \neq 0 \tag{A.124}$$

$$②: \quad \dot{u} = 0, \ \tau'_{ch} = 0 \tag{A.125}$$

$$③: \quad \dot{u} \neq 0, \ \tau'_{ch} = 0 \tag{A.126}$$

realisiert werden. Aus der Bedingung $\dot{u} = 0$ im Fall ① ergibt sich unter Beachtung von Gleichung (A.118) für

$$\text{Kriechen } (\tau_{ch} = \text{konst}): \quad \dot{\gamma}_{ch} = 0 \quad \rightarrow \quad \gamma_{ch} \equiv \gamma_{ch}^{eq} \quad \rightarrow \quad \tau_{ch} = \tau_{ch}^{eq} . \tag{A.127}$$

Da die Spannung, welche direkt vor Beginn der Kriechbelastung präsent ist, auch während der Kriechhaltezeit bestehen bleibt, wird die Spannung des endochronen MAXWELL Elements als Gleichgewichtsspannung identifiziert. Infolgedessen findet keine Entwicklung der inneren Variablen q statt. Entsprechend Gleichungen (6.2a) und (A.127) bleibt die innere Variable während einer Kriechbelastung konstant. Als nächstes muss gezeigt werden, dass $\dot{\gamma}_{ch} = 0 \rightarrow \gamma_{ch} = \text{konst}$ nicht im Widerspruch zu Gleichung (A.120) steht. Da die Spannung definitionsbedingt während Kriechen konstant ist, ergibt sich das Integral $\int du$ von Gleichung (A.120) unter Berücksichtigung von $\tau'_{ch} \neq 0$ zu $\gamma_{ch} = \tau_{ch}\left(\frac{1}{G} + \frac{u}{\beta}\right) + C = \text{konst}$. Hierbei ist C die Integrationskonstante. Somit ist gezeigt, dass Gleichung (A.120) nicht im Widerspruch zu Gleichung (A.127) steht.
Im zweiten Fall ② wird Gleichung (A.120) unter der Bedingung $\tau'_{ch} = 0$ ausgewertet, sodass das Integral $\int (\,) du$ auf $\gamma_{ch} = \frac{\tau_{ch}}{\beta} u + C = \text{konst}$ führt. Die Schubverzerrung ergibt sich wiederum als konstant und ist demnach im Einklang mit Gleichung (A.127).
Im dritten Fall ③ ist es erforderlich γ'_{ch} zu bestimmen, um Gleichung (A.118), welche aufgrund $\dot{u} \neq 0$ nicht Null ist, auswerten zu können. Dazu wird Gleichung (A.120) betrachtet und man erhält $\gamma'_{ch} = \frac{\tau_{ch}}{\beta}$. Unter Verwendung von Gleichung (A.117) geht Gleichung (A.118) in $\dot{\gamma}_{ch} = \frac{\tau_{ch}}{\beta} |\dot{\gamma}_{ch}|$ über. Beachtet man außerdem $\dot{\gamma}_{ch} = \text{sign}(\dot{\gamma}_{ch}) |\dot{\gamma}_{ch}|$, ergibt sich $\tau_{ch} = \text{sign}(\dot{\gamma}_{ch}) \beta$. Das bedeutet, dass plastisches Fließen entweder unter $\tau_{ch} = +\beta$ im Fall von $\dot{\gamma}_{ch} > 0$ oder $\tau_{ch} = -\beta$ für $\dot{\gamma}_{ch} < 0$ auftritt. Dass die Schubverzerrungsrate, unter der plastisches Fließen auftritt, allein durch die Spannungsvorgabe nicht eindeutig definiert ist, ergibt sich analog zum Reibelement (Boisly et al. 2014a) und PRANDTL Element (Boisly et al. 2014b; S. 5). Der Betrag der Schubverzerrungsrate, unter der entweder $\tau_{ch} = +\beta$ oder $\tau_{ch} = -\beta$ aufgebracht wird, muss bekannt sein, damit die Entwicklung von $\dot{\gamma}_{ch}$ bestimmt werden kann.
Liegt die Spannung im Bereich von $-\beta < \tau_{ch} < \beta$ kann $\dot{u} \neq 0$ nicht erfüllt werden. Es liegt der Fall $\dot{u} = 0$ vor, wonach das endochrone MAXWELL Element nicht fließt.

A.6 LAOS-Verhalten des endochronen MAXWELL Elements

A.6.1 Asymptotische Spannungsantwort für sinusförmige verzerrungsgeregelte Anregung

Zur Berechnung der Spannungsantwort wird zunächst die kinematische Bogenlänge der sinusförmigen verzerrungsgeregelten Anregung nach Gleichung (3.59) bestimmt. Dies erfolgte im Rahmen der studentischen Belegarbeit von Kammer (2015; S. 37). Aufgrund des wechselnden Vorzeichens der Schubverzerrungsrate ist die kinematische Bogenlänge eine stückweise definierte Funktion. Dazu wird die sinusförmige Schubverzerrungsrate in Abschnitte gleichen Vorzeichens aufgeteilt. Die Abschnitte werden, wie in Abbildung A.1 gezeigt ist, fortlaufend durchnummeriert, $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$. Somit ist die kinematische Bogenlänge

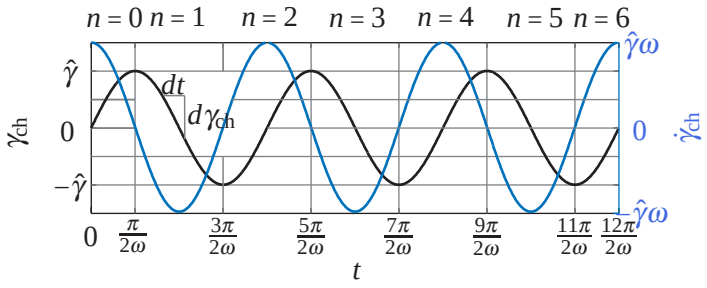


Abbildung A.1: Unterteilung der Schubverzerrungsrate in Abschnitte gleichen Vorzeichens exemplarisch für $\gamma_{\mathrm{ch}} = \hat{\gamma}\sin(\omega t)$ mit $\omega = \frac{3}{2}\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}$. Nummerierung in aufsteigender Reihenfolge $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$.

durch

$$n = 0 \qquad 0 \le t \le \frac{\pi}{2\omega} \quad : \quad u(t) = \overline{\gamma}\Big|_0^{\hat{\gamma}\sin(\omega t)} = \hat{\gamma}\sin(\omega t) \tag{A.128}$$

$$n = 1 \qquad \frac{\pi}{2\omega} \le t \le \frac{3\pi}{2\omega} \quad : \quad u(t) = \overline{\gamma}\Big|_0^{\hat{\gamma}} - \overline{\gamma}\Big|_{\hat{\gamma}}^{\hat{\gamma}\sin(\omega t)} = \hat{\gamma}\left[2 - \sin(\omega t)\right] \tag{A.129}$$

$$n = 2 \qquad \frac{3\pi}{2\omega} \le t \le \frac{5\pi}{2\omega} \quad : \quad u(t) = \overline{\gamma}\Big|_0^{\hat{\gamma}} - \overline{\gamma}\Big|_{\hat{\gamma}}^{-\hat{\gamma}} + \overline{\gamma}\Big|_{-\hat{\gamma}}^{\hat{\gamma}\sin(\omega t)} = \hat{\gamma}\left[4 + \sin(\omega t)\right] \tag{A.130}$$

$$n = 3 \qquad \frac{5\pi}{2\omega} \le t \le \frac{7\pi}{2\omega} \quad : \quad u(t) = \overline{\gamma}\Big|_0^{\hat{\gamma}} - \overline{\gamma}\Big|_{\hat{\gamma}}^{-\hat{\gamma}} + \overline{\gamma}\Big|_{-\hat{\gamma}}^{\hat{\gamma}} - \overline{\gamma}\Big|_{\hat{\gamma}}^{\hat{\gamma}\sin(\omega t)} = \hat{\gamma}\left[6 - \sin(\omega t)\right] \tag{A.131}$$

gegeben. Das Schema wiederholt sich in gleicher Art und Weise und ist in Gleichung (6.39) zusammengefasst. Auf dieser Grundlage wird die Spannungsantwort abschnittsweise bestimmt und man erhält

$$n \ge 1 \quad : \quad \tau_{\mathrm{ch}} = \beta\left[\left(-1 + 2\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}\, e^{(2i-1)\frac{\hat{\gamma}}{\gamma_{\mathrm{cr}}}}\right) e^{-\frac{u(t)}{\gamma_{\mathrm{cr}}}} + (-1)^n\right] \qquad \frac{(2n-1)\pi}{2\omega} \le t \le \frac{(2n+1)\pi}{2\omega} \tag{A.132}$$

$$n \ge 1 \quad : \quad \tau_{\mathrm{ch}} = \beta\left[\left(2\,\frac{(-1)^{n+1}\, e^{(2n+1)\frac{\hat{\gamma}}{\gamma_{\mathrm{cr}}}} + e^{\frac{\hat{\gamma}}{\gamma_{\mathrm{cr}}}}}{e^{\frac{2\hat{\gamma}}{\gamma_{\mathrm{cr}}}} + 1} - 1\right) e^{-\frac{u(t)}{\gamma_{\mathrm{cr}}}} + (-1)^n\right] \qquad \frac{(2n-1)\pi}{2\omega} \le t \le \frac{(2n+1)\pi}{2\omega}$$

(6.40b)

unter Berücksichtigung der endlichen geometrischen Reihe

$$\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}\, e^{(2i-1)\frac{\hat{\gamma}}{\gamma_{\mathrm{cr}}}} = -e^{-\frac{\hat{\gamma}}{\gamma_{\mathrm{cr}}}} \sum_{i=1}^{n}\left(-e^{\frac{2\hat{\gamma}}{\gamma_{\mathrm{cr}}}}\right)^i = \frac{(-1)^{n+1}\, e^{(2n+1)\frac{\hat{\gamma}}{\gamma_{\mathrm{cr}}}} + e^{\frac{\hat{\gamma}}{\gamma_{\mathrm{cr}}}}}{e^{\frac{2\hat{\gamma}}{\gamma_{\mathrm{cr}}}} + 1}\,. \tag{A.133}$$

Gleichung (A.132) motiviert sich aus der zweiten Version von Gleichung (6.12)

$$n = 0 \qquad 0 \le t \le \frac{\pi}{2\omega} \quad : \quad \tau_{\mathrm{ch}}(t) = \beta\left[+e^{\frac{\bar{u}}{\gamma_{\mathrm{cr}}}}\Big|_0^{u(t)}\right] e^{-\frac{u(t)}{\gamma_{\mathrm{cr}}}} \tag{A.134}$$

$$= \beta\left[(-1)\, e^{-\frac{u(t)}{\gamma_{\mathrm{cr}}}} + 1\right] \tag{A.135}$$

$$n = 1 \qquad \frac{\pi}{2\omega} \le t \le \frac{3\pi}{2\omega} \quad : \quad \tau_{\mathrm{ch}}(t) = \beta\left[+e^{\frac{\bar{u}}{\gamma_{\mathrm{cr}}}}\Big|_0^{u\left(t=\frac{\pi}{2\omega}\right)=\hat{\gamma}} - e^{\frac{\bar{u}}{\gamma_{\mathrm{cr}}}}\Big|_{u\left(t=\frac{\pi}{2\omega}\right)=\hat{\gamma}}^{u(t)}\right] e^{-\frac{u(t)}{\gamma_{\mathrm{cr}}}} \tag{A.136}$$

$$= \beta\left[\left(-1 + 2e^{\frac{\hat{\gamma}}{\gamma_{\mathrm{cr}}}}\right) e^{-\frac{u(t)}{\gamma_{\mathrm{cr}}}} - 1\right] \tag{A.137}$$

$$n = 2 \qquad \frac{3\pi}{2\omega} \le t \le \frac{5\pi}{2\omega} \quad : \quad \tau_{\mathrm{ch}}(t) = \beta\left[+e^{\frac{\bar{u}}{\gamma_{\mathrm{cr}}}}\Big|_0^{\hat{\gamma}} - e^{\frac{\bar{u}}{\gamma_{\mathrm{cr}}}}\Big|_{\hat{\gamma}}^{u\left(t=\frac{3\pi}{2\omega}\right)=3\hat{\gamma}} + e^{\frac{\bar{u}}{\gamma_{\mathrm{cr}}}}\Big|_{u\left(t=\frac{3\pi}{2\omega}\right)=3\hat{\gamma}}^{u(t)}\right] e^{-\frac{u(t)}{\gamma_{\mathrm{cr}}}} \tag{A.138}$$

$$= \beta\left[\left(-1 + 2e^{\frac{\hat{\gamma}}{\gamma_{\mathrm{cr}}}} - 2e^{\frac{3\hat{\gamma}}{\gamma_{\mathrm{cr}}}}\right) e^{-\frac{u(t)}{\gamma_{\mathrm{cr}}}} + 1\right] \tag{A.139}$$

$$n = 3 \qquad \frac{5\pi}{2\omega} \le t \le \frac{7\pi}{2\omega} \quad : \quad \tau_{\mathrm{ch}}(t) = \beta\left[+e^{\frac{\bar{u}}{\gamma_{\mathrm{cr}}}}\Big|_0^{\hat{\gamma}} - e^{\frac{\bar{u}}{\gamma_{\mathrm{cr}}}}\Big|_{\hat{\gamma}}^{3\hat{\gamma}} + e^{\frac{\bar{u}}{\gamma_{\mathrm{cr}}}}\Big|_{3\hat{\gamma}}^{u\left(t=\frac{5\pi}{2\omega}\right)=5\hat{\gamma}} - e^{\frac{\bar{u}}{\gamma_{\mathrm{cr}}}}\Big|_{u\left(t=\frac{5\pi}{2\omega}\right)=5\hat{\gamma}}^{u(t)}\right] e^{-\frac{u(t)}{\gamma_{\mathrm{cr}}}} \tag{A.140}$$

$$= \beta\left[\left(-1 + 2e^{\frac{\hat{\gamma}}{\gamma_{\mathrm{cr}}}} - 2e^{\frac{3\hat{\gamma}}{\gamma_{\mathrm{cr}}}} + 2e^{\frac{5\hat{\gamma}}{\gamma_{\mathrm{cr}}}}\right) e^{-\frac{u(t)}{\gamma_{\mathrm{cr}}}} - 1\right]. \tag{A.141}$$

Daraus leitet sich die asymptotische Spannungsantwort des endochronen MAXWELL Elements infolge einer sinusförmigen verzerrungsgeregelten Anregung ab (Kammer 2015; S. 38 ff.)

$$\tau_{\mathrm{ch.}\tilde{\infty}} = \lim_{u(t)\to\infty} \tau_{\mathrm{ch}}(t) = \lim_{u(t)\to\infty} \left\{ \beta \left[\left(2\,\frac{(-1)^{n+1} e^{(2n+1)\,\frac{\hat{\gamma}}{\gamma_{\mathrm{cr}}}}}{e^{\frac{2\hat{\gamma}}{\gamma_{\mathrm{cr}}}}+1} \right) e^{-\frac{u(t)}{\gamma_{\mathrm{cr}}}} + \left(\frac{e^{\frac{\hat{\gamma}}{\gamma_{\mathrm{cr}}}}}{e^{\frac{2\hat{\gamma}}{\gamma_{\mathrm{cr}}}}+1} - 1 \right) e^{-\frac{u(t)}{\gamma_{\mathrm{cr}}}} + (-1)^n \right] \right\} . \tag{A.142}$$

Wird die kinematische Bogenlänge im Anschluss dessen durch Gleichung (6.39) ersetzt, so erhält man

$$\tau_{\mathrm{ch.}\tilde{\infty}} = \beta \left[\left(2\,\frac{(-1)^{n+1} e^{(2n+1)\,\frac{\hat{\gamma}}{\gamma_{\mathrm{cr}}}}}{e^{\frac{2\hat{\gamma}}{\gamma_{\mathrm{cr}}}}+1} \right) e^{-\frac{\hat{\gamma}}{\gamma_{\mathrm{cr}}}[2n+(-1)^n \sin(\omega t)]} + (-1)^n \right] \qquad \frac{(2n-1)\pi}{2\omega} \le t \le \frac{(2n+1)\pi}{2\omega} \tag{A.143}$$

$$= \beta \left[2\,\frac{(-1)^{n+1} e^{\frac{\hat{\gamma}}{\gamma_{\mathrm{cr}}}[1+(-1)^{n+1}\sin(\omega t)]}}{e^{\frac{2\hat{\gamma}}{\gamma_{\mathrm{cr}}}}+1} + (-1)^n \right] \qquad \frac{(2n-1)\pi}{2\omega} \le t \le \frac{(2n+1)\pi}{2\omega} \tag{A.144}$$

$$= \beta \left[(-1)^{n+1}\,\frac{2}{e^{\frac{\hat{\gamma}}{\gamma_{\mathrm{cr}}}}+e^{-\frac{\hat{\gamma}}{\gamma_{\mathrm{cr}}}}}\, e^{(-1)^{n+1}\frac{\hat{\gamma}}{\gamma_{\mathrm{cr}}}\sin(\omega t)} + (-1)^n \right] \qquad \frac{(2n-1)\pi}{2\omega} \le t \le \frac{(2n+1)\pi}{2\omega} \tag{A.145}$$

$$\tau_{\mathrm{ch.}\tilde{\infty}} = \beta \left[\frac{(-1)^{n+1}}{\cosh\left(\frac{\hat{\gamma}}{\gamma_{\mathrm{cr}}}\right)}\, e^{(-1)^{n+1}\frac{\hat{\gamma}}{\gamma_{\mathrm{cr}}}\sin(\omega t)} + (-1)^n \right] \qquad \frac{(2n-1)\pi}{2\omega} \le t \le \frac{(2n+1)\pi}{2\omega} . \tag{6.49}$$

A.6.2 Speichermodul des endochronen MAXWELL Elements

Der Speichermodul wird analog zum Vorschlag von Kammer (2015; Absch. A.3, A.4) berechnet. Ausgangspunkt ist Gleichung (3.119). Wird die asymptotische Spannungsantwort zugrunde gelegt, so kann der Integrationsbeginn willkürlich festgelegt werden. Zweckdienlich ist jedoch den Integrationsbereich $\frac{\pi}{2\omega} \dots \frac{\pi}{2\omega} + \frac{T}{2} = \frac{3\pi}{2\omega}$ zu verwenden, da es sich nach Gleichung (6.39) um den geschlossenen Abschnitt $n = 1$ handelt. Mit der Transformation

$$\theta = \omega t \qquad \leftrightarrow \qquad d\theta = \omega\, dt \tag{A.146}$$

erhält man

$$G'_{\mathrm{ch}}(\hat{\gamma}) = \frac{2}{\hat{\gamma}\pi}\,\frac{\beta}{\cosh\left(\frac{G\hat{\gamma}}{\beta}\right)} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} e^{\frac{G\hat{\gamma}}{\beta}\sin(\theta)} \sin(\theta)\, d\theta . \tag{A.147}$$

Hieraus ist ersichtlich, dass der Speichermodul nicht von der Kreisfrequenz abhängt. Somit bestätigen sich die ratenunabhängigen Eigenschaften des endochronen MAXWELL Elements (*Folgerung 10*). Da der Ausdruck $\int e^{\sin(\theta)} \sin(\theta)\, d\theta$ kein Standardintegral ist, wird die Exponentialfunktion unter Verwendung von Gleichung (6.60) in eine unendliche Potenzreihe umgeformt

$$G'_{\mathrm{ch}}(\hat{\gamma}) = \frac{2}{\hat{\gamma}\pi}\,\frac{\beta}{\cosh\left(\frac{G\hat{\gamma}}{\beta}\right)} \sum_{i=0}^{\infty} \left\{ \frac{\left(\frac{G\hat{\gamma}}{\beta}\right)^i}{i!} \left[\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \sin^{i+1}(\theta)\, d\theta \right] \right\} \qquad i \in \mathbb{N} \tag{A.148}$$

$$= \frac{2}{\hat{\gamma}\pi}\,\frac{\beta}{\cosh\left(\frac{G\hat{\gamma}}{\beta}\right)} \sum_{i=1}^{\infty} \left\{ \frac{\left(\frac{G\hat{\gamma}}{\beta}\right)^{i-1}}{(i-1)!} \left[\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \sin^{i}(\theta)\, d\theta \right] \right\} \qquad i \in \mathbb{N}^+ . \tag{A.149}$$

Das Resultat kann mithilfe

$$\int \sin^i(\theta) d\theta = -\frac{1}{i} \sin^{i-1}(\theta)\cos(\theta) + \frac{i-1}{i} \int \sin^{i-2}(\theta)\, d\theta \qquad i \in \mathbb{N}^+ \tag{A.150}$$

rekursiv gelöst werden. Ein erneutes Anwenden dieser Gleichung führt auf

$$\int \sin^i(\theta)\, d\theta = -\frac{1}{i} \sin^{i-1}(\theta)\cos(\theta) - \frac{i-1}{i(i-2)} \sin^{i-3}(\theta)\cos(\theta) + \frac{(i-1)(i-3)}{i(i-2)} \int \sin^{i-4}(\theta)\, d\theta \;, i \in \mathbb{N}^+ . \tag{A.151}$$

Das mehrfache Anwenden der rekursiven Prozedur führt auf

$$\int \sin^i(\theta)\,d\theta = -\frac{1}{i}\sin^{i-1}(\theta)\cos(\theta) - \frac{1}{i}\sum_{m=3}^{l-1}\left\{\prod_{n=3}^{m}\frac{i-n+2}{i-n+1}\right\}\sin^{i-m}(\theta)\cos(\theta) + \left\{\prod_{m=1}^{l-1}\frac{i-m}{i-m+1}\right\}\int \sin^{i-l}(\theta)\,d\theta$$
$$i \in \mathbb{N}^+,\ m = \text{ungerade},\ n = \text{ungerade},\ l = \text{gerade},\ l \le i\ . \qquad \text{(A.152)}$$

Anschließend werden in der Summe und dem ersten Produkt die Substitutionen $m \to 2m+3$ und $n \to 2n+3$ durchgeführt. Im zweiten Produkt wird $m \to 2m+1$ ersetzt. Dadurch geht das rekursive Schema über in

$$\int \sin^i(\theta)\,d\theta = -\frac{1}{i}\sin^{i-1}(\theta)\cos(\theta) - \frac{1}{i}\sum_{m=0}^{\frac{l}{2}-2}\left\{\prod_{n=0}^{m}\frac{i-2n+1}{i-2n-2}\right\}\sin^{i-2m-3}(\theta)\cos(\theta) + \left\{\prod_{m=0}^{\frac{l}{2}-1}\frac{i-2m-1}{i-2m}\right\}\int \sin^{i-l}(\theta)\,d\theta$$
$$i \in \mathbb{N}^+,\ m \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}, l = \text{gerade}, l \le i\ . \qquad \text{(A.153)}$$

Die Summation über $i \in \mathbb{N}^+$ kann in i = gerade und i = ungerade aufgeteilt werden. Iterationen i = ungerade gehen einher mit $l = i-1$ und

$$\int \sin^i(\theta)\,d\theta = -\frac{1}{i}\sin^{i-1}(\theta)\cos(\theta) - \frac{1}{i}\sum_{m=0}^{\frac{i-1}{2}-2}\left\{\prod_{n=0}^{m}\frac{i-2n+1}{i-2n-2}\right\}\sin^{i-2m-3}(\theta)\cos(\theta) - \left\{\prod_{m=0}^{\frac{i-1}{2}-1}\frac{i-2m-1}{i-2m}\right\}\cos(\theta) + C$$
$$i = \text{ungerade},\ m \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}\ . \qquad \text{(A.154)}$$

C ist eine Integrationskonstante. Für i = gerade Iterationen gilt $l = i$, sodass

$$\int \sin^i(\theta)\,d\theta = -\frac{1}{i}\sin^{i-1}(\theta)\cos(\theta) - \frac{1}{i}\sum_{m=0}^{\frac{i}{2}-2}\left\{\prod_{n=0}^{m}\frac{i-2n+1}{i-2n-2}\right\}\sin^{i-2m-3}(\theta)\cos(\theta) + \left\{\prod_{m=0}^{\frac{i}{2}-1}\frac{i-2m-1}{i-2m}\right\}\theta + C$$
$$i = \text{gerade},\ m \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}\ . \qquad \text{(A.155)}$$

Diese Gleichungen werden nun analog zu Gleichung (A.149) für den Integrationsbereich $\theta = \frac{\pi}{2} \ldots \frac{3\pi}{2}$ ausgewertet. Für Gleichung (A.154) resultiert

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \sin^i(\theta)\,d\theta = 0 \qquad i = \text{ungerade}\ . \qquad \text{(A.156)}$$

Gleichung (A.155) ergibt sich zu

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \sin^i(\theta)\,d\theta = \left\{\prod_{m=0}^{\frac{i}{2}-1}\frac{i-2m-1}{i-2m}\right\}\pi \qquad i = \text{gerade},\ m \in \mathbb{N}\ . \qquad \text{(A.157)}$$

Wendet man Gleichungen (A.156) und (A.157) auf Gleichung (A.149) an, so erhält man

$$G'_{\text{ch}}(\hat{\gamma}) = \frac{2}{\hat{\gamma}\pi}\frac{\beta}{\cosh\left(\frac{G\hat{\gamma}}{\beta}\right)}\left\{\frac{G\hat{\gamma}}{\beta}\frac{\pi}{2} + \sum_{i=4}^{\infty}\left[\frac{\left(\frac{G\hat{\gamma}}{\beta}\right)^{i-1}}{(i-1)!}\left(\prod_{m=0}^{\frac{i}{2}-1}\frac{i-2m-1}{i-2m}\right)\pi\right]\right\} \qquad i = \text{gerade},\ m \in \mathbb{N} \qquad \text{(A.158)}$$

$$= \frac{G}{\cosh\left(\frac{G\hat{\gamma}}{\beta}\right)} + \frac{2\beta}{\cosh\left(\frac{G\hat{\gamma}}{\beta}\right)}\sum_{i=4}^{\infty}\left[\frac{\left(\frac{G}{\beta}\right)^{i-1}\hat{\gamma}^{i-2}}{(i-1)!}\left(\prod_{m=0}^{\frac{i}{2}-1}\frac{i-2m-1}{i-2m}\right)\right] \qquad i = \text{gerade},\ m \in \mathbb{N}\ . \qquad \text{(A.159)}$$

Anschließend wird der Summationsindex mit $i \to 2i+4$ substituiert

$$G'_{\text{ch}}(\hat{\gamma}) = \frac{G}{\cosh\left(\frac{G\hat{\gamma}}{\beta}\right)} + \frac{2\beta}{\cosh\left(\frac{G\hat{\gamma}}{\beta}\right)}\sum_{i=0}^{\infty}\left[\frac{\left(\frac{G}{\beta}\right)^{2i+3}\hat{\gamma}^{2(i+1)}}{(2i+3)!}\prod_{m=0}^{i+1}\frac{2(i-m)+3}{2(i-m+2)}\right] \qquad i \in \mathbb{N},\ m \in \mathbb{N}\ . \qquad \text{(A.160)}$$

Das Produkt kann in

$$P_i = \prod_{m=0}^{i+1} \frac{2(i-m)+3}{2(i-m+2)} = \frac{(2i+3)!}{2^{2i+3}\,(i+2)\,[(i+1)!]^2} \tag{A.161}$$

überführt werden, was durch

$$i=0: \quad P_0 = \frac{3\cdot 1}{4\cdot 2} = \frac{1}{2^2(2\cdot 1)}\,\frac{3\cdot 2\cdot 1}{2} = \frac{1}{2^2(2\cdot 1)}\,\frac{3!}{2^1(1)} = \frac{3!}{2^3\cdot 2\cdot (1!)^2} \tag{A.162}$$

$$i=1: \quad P_1 = \frac{5\cdot 3\cdot 1}{6\cdot 4\cdot 2} = \frac{1}{2^3(3\cdot 2\cdot 1)}\,\frac{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{4\cdot 2} = \frac{1}{2^3(3\cdot 2\cdot 1)}\,\frac{5!}{2^2(2\cdot 1)} = \frac{5!}{2^5\cdot 3\cdot (2!)^2} \tag{A.163}$$

$$i=2: \quad P_2 = \frac{7\cdot 5\cdot 3\cdot 1}{8\cdot 6\cdot 4\cdot 2} = \frac{1}{2^4(4\cdot 3\cdot 2\cdot 1)}\,\frac{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{6\cdot 4\cdot 2} = \frac{1}{2^4(4\cdot 3\cdot 2\cdot 1)}\,\frac{7!}{2^3(3\cdot 2\cdot 1)} = \frac{7!}{2^7\cdot 4\cdot (3!)^2} \tag{A.164}$$

$$i=3: \quad P_3 = \frac{9\cdot 7\cdot 5\cdot 3\cdot 1}{10\cdot 8\cdot 6\cdot 4\cdot 2} = \frac{1}{2^5(5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1)}\,\frac{9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{8\cdot 6\cdot 4\cdot 2} = \frac{1}{2^5(5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1)}\,\frac{9!}{2^4(4\cdot 3\cdot 2\cdot 1)} \tag{A.165}$$

$$= \frac{9!}{2^9\cdot 5\cdot (4!)^2} \tag{A.166}$$

motiviert ist. Letztendlich erhält man den durch die unendliche Potenzreihe beschriebenen Speichermodul

$$G'_{\mathrm{ch}}(\hat{\gamma}) = \frac{1}{\cosh\left(\frac{G\hat{\gamma}}{\beta}\right)}\left[G+\beta\sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2^{2i+2}\,(i+2)\,[(i+1)!]^2}\,\frac{\hat{\gamma}^{2i+2}}{\left(\frac{\beta}{G}\right)^{2i+3}}\right)\right] \qquad i\in\mathbb{N}\,. \tag{A.167}$$

A.6.3 Höherharmonische des endochronen MAXWELL Elements

Der Ausgangspunkt zur Berechnung Höherharmonischer sind Gleichungen (3.121) und (3.122). Wie im Abschnitt zuvor, wird die asymptotische Spannungsantwort nach Gleichung (6.49) zugrunde gelegt. Somit ist die Wahl des Integrationsbeginns frei wählbar. Am rechentechnisch wenigsten aufwendig ist es, über eine halbe Periode innerhalb eines Abschnittes zu integrieren. Dies ist mit $n = 1$ gegeben und man erhält

$$a_{\mathrm{ch}.k}(\hat{\gamma}) = \frac{4}{\hat{\gamma}T}\int_{\frac{\pi}{2\omega}}^{\frac{3\pi}{2\omega}} \tau_{\mathrm{ch}.\tilde{\infty}}(t)\,\sin(k\omega t)\,dt\,. \tag{A.168}$$

(A.169)

Eine Transformation entsprechend Gleichung (A.146) unter Berücksichtigung von Gleichung (3.88) führt auf

$$a_{\mathrm{ch}.k}(\hat{\gamma}) = \frac{2}{\pi\hat{\gamma}}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \tau_{\mathrm{ch}.\tilde{\infty}}(\theta)\,\sin(k\theta)\,d\theta \tag{A.170}$$

$$b_{\mathrm{ch}.k}(\hat{\gamma}) = \frac{2}{\pi\hat{\gamma}}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \tau_{\mathrm{ch}.\tilde{\infty}}(\theta)\,\cos(k\theta)\,d\theta\,. \tag{A.171}$$

Da weder $\tau_{\mathrm{ch}.\tilde{\infty}}(\theta)$ noch $\sin(k\theta)$ und $\cos(k\theta)$ von der Kreisfrequenz abhängen, werden die ratenunabhängigen Eigenschaften des endochronen MAXWELL Elements deutlich (*Folgerung 10*). Anschließend wird Gleichung (6.49) mit $n = 1$ eingesetzt, sodass

$$a_{\mathrm{ch}.k}(\hat{\gamma}) = \frac{2\beta}{\pi\hat{\gamma}}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}\left[\frac{e^{\frac{\hat{\gamma}}{\gamma_{\mathrm{cr}}}\sin(\theta)}}{\cosh\left(\frac{\hat{\gamma}}{\gamma_{\mathrm{cr}}}\right)}-1\right]\sin(k\theta)\,d\theta \tag{A.172}$$

$$b_{\mathrm{ch}.k}(\hat{\gamma}) = \frac{2\beta}{\pi\hat{\gamma}}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}\left[\frac{e^{\frac{\hat{\gamma}}{\gamma_{\mathrm{cr}}}\sin(\theta)}}{\cosh\left(\frac{\hat{\gamma}}{\gamma_{\mathrm{cr}}}\right)}-1\right]\cos(k\theta)\,d\theta\,. \tag{A.173}$$

Unter Beachtung von

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} (-1)\sin(k\theta)d\theta = 0 \qquad k = \text{ungerade} \tag{A.174}$$

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} (-1)\cos(k\theta)d\theta = \frac{2}{k}(-1)^{\frac{k-1}{2}} \qquad k = \text{ungerade} \tag{A.175}$$

ergeben sich

$$a_{\mathrm{ch}.k}(\hat{\gamma}) = \frac{2\beta}{\pi\cosh\left(\frac{\hat{\gamma}}{\gamma_{\mathrm{cr}}}\right)\hat{\gamma}} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} e^{\frac{\hat{\gamma}}{\gamma_{\mathrm{cr}}}\sin(\theta)} \sin(k\theta)\,d\theta \qquad k = \text{ungerade} \tag{6.58}$$

$$b_{\mathrm{ch}.k}(\hat{\gamma}) = \frac{4\beta}{\pi\hat{\gamma}}\frac{(-1)^{\frac{k-1}{2}}}{k} + \frac{2\beta}{\pi\cosh\left(\frac{\hat{\gamma}}{\gamma_{\mathrm{cr}}}\right)\hat{\gamma}} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} e^{\frac{\hat{\gamma}}{\gamma_{\mathrm{cr}}}\sin(\theta)} \cos(k\theta)\,d\theta \qquad k = \text{ungerade}\,. \tag{6.59}$$

Da dem Autor dieser Arbeit für die Integrale $\int e^{\sin(\theta)}\sin(k\theta)\,d\theta$ und $\int e^{\sin(\theta)}\cos(k\theta)\,d\theta$ keine Standardlösungen bekannt sind, wird die Exponentialfunktion in eine unendliche Potenzreihe überführt

$$a_{\mathrm{ch}.k}(\hat{\gamma}) = \frac{2\beta}{\pi\cosh\left(\frac{\hat{\gamma}}{\gamma_{\mathrm{cr}}}\right)} \left\{ \frac{1}{\hat{\gamma}} \underbrace{\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \sin(k\theta)\,d\theta}_{=0} + \frac{G}{\beta} \underbrace{\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \sin(\theta)\sin(k\theta)\,d\theta}_{=0\ \forall\ k=\text{ungerade}} + \sum_{i=2}^{\infty} \left[\left(\frac{G}{\beta}\right)^i \frac{\hat{\gamma}^{i-1}}{i!} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \sin^i(\theta)\sin(k\theta)\,d\theta \right] \right\}$$

$$k = \text{ungerade} \tag{A.176}$$

$$b_{\mathrm{ch}.k}(\hat{\gamma}) = \frac{2\beta}{\pi\cosh\left(\frac{\hat{\gamma}}{\gamma_{\mathrm{cr}}}\right)} \left\{ \frac{1}{\hat{\gamma}} \underbrace{\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos(k\theta)\,d\theta}_{=\frac{2}{k}(-1)^{\frac{k+1}{2}}\ \forall k=\text{ug.}} + \frac{G}{\beta} \underbrace{\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \sin(\theta)\cos(k\theta)\,d\theta}_{=0\ \forall\ k=\text{ungerade}} + \sum_{i=2}^{\infty} \left[\left(\frac{G}{\beta}\right)^i \frac{\hat{\gamma}^{i-1}}{i!} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \sin^i(\theta)\cos(k\theta)\,d\theta \right] \right\}$$

$$+ \frac{4\beta}{\pi k\hat{\gamma}}(-1)^{\frac{k-1}{2}} \qquad k = \text{ungerade}\,. \tag{A.177}$$

Dies erfolgt unter Verwendung von Gleichung (6.60) analog zur Berechnung des Speichermoduls. Letztendlich erhält man die analytische Lösung ausgedrückt als unendliche Potenzreihe

$$a_{\mathrm{ch}.k}(\hat{\gamma}) = \frac{2\beta}{\pi\cosh\left(\frac{\hat{\gamma}}{\gamma_{\mathrm{cr}}}\right)} \sum_{i=2}^{\infty} \left[\left(\frac{G}{\beta}\right)^i \frac{\hat{\gamma}^{i-1}}{i!} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \sin^i(\theta)\sin(k\theta)\,d\theta \right] \qquad k = \text{ungerade} \tag{A.178}$$

$$b_{\mathrm{ch}.k}(\hat{\gamma}) = \frac{4\beta}{\pi k\hat{\gamma}} \left[\frac{(-1)^{\frac{k+1}{2}}}{\cosh\left(\frac{\hat{\gamma}}{\gamma_{\mathrm{cr}}}\right)} + (-1)^{\frac{k-1}{2}} \right] + \frac{2\beta}{\pi\cosh\left(\frac{\hat{\gamma}}{\gamma_{\mathrm{cr}}}\right)} \sum_{i=2}^{\infty} \left[\left(\frac{G}{\beta}\right)^i \frac{\hat{\gamma}^{i-1}}{i!} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \sin^i(\theta)\cos(k\theta)\,d\theta \right] \qquad k = \text{ungerade}\,. \tag{A.179}$$

Dies ist zugleich die Grundlage für die analytischen Lösungen aus den Gleichungen (6.61) und (6.62), in denen die unendliche Reihe nach n Summanden abgebrochen ist. Wöllte man die Integrale weiterlösen, müsste die Sinusfunktion als unendliche Potenzreihe $\sin(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\theta^{2n+1}$ ausgedrückt

werden, da $\int \sin^i(\theta)\sin(k\theta)\,d\theta$ und $\int \sin^i(\theta)\cos(k\theta)\,d\theta$ ebenfalls keine Standardintegrale sind. Als Ergebnis erhielte man einen Ausdruck mit den Standardintegralen $\int \theta^n \sin(a\theta)\,d\theta = -\frac{\theta^n}{a}\cos(a\theta) + \frac{n}{a}\int \theta^{n-1}\cos(a\theta)\,d\theta$ und $\int \theta^n \cos(a\theta)\,d\theta = \frac{\theta^n}{a}\sin(a\theta) - \frac{n}{a}\int \theta^{n-1}\sin(a\theta)\,d\theta$. Diese müssten analog zu Gleichung (A.152) rekursiv gelöst werden. Aufgrund der Doppelsumme $\sum_{i=2}^{\infty}\int\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\theta^{2n+1}\right]^i(\,)\,d\theta$ erhielte man jedoch eine zu große Anzahl an Integralen, sodass der Rechenaufwand den Nutzen nicht rechtfertigen würde. Daher wird die Berechnung der Integrale aus Gleichungen (A.178) und (A.179) im Rahmen dieser Arbeit nicht weiter vertieft. Stattdessen werden die Integrale numerisch berechnet.
Zur numerischen Berechnung der Höherharmonischen bestehen in dieser Arbeit grundsätzlich zwei Möglichkeiten. Zum einen kann man die numerische Lösung auf Grundlage der Exponentialausdrücke $\int e^{\sin(\theta)}\sin(k\theta)\,d\theta$ und $\int e^{\sin(\theta)}\cos(k\theta)\,d\theta$ aus Gleichungen (6.58) und (6.59) bestimmen. Zum anderen kann die numerische Lösung aus den Sinusausdrücken $\sum_{i=2}^{n}\int \sin^i(\theta)\sin(k\theta)\,d\theta$ und $\sum_{i=2}^{n}\int \sin^i(\theta)\cos(k\theta)\,d\theta$ der Gleichungen (6.61) und (6.62) berechnet werden. Die numerischen Eigenschaften beider Lösungsgrundlagen werden folgend in Abschnitt A.6.4 untersucht.

A.6.4 Numerische Eigenschaften der analytischen Lösungen der harmonischen Materialfunktionen

Der Speichermodul des endochronen MAXWELL Elements besteht nach Gleichung (A.167) aus einer unendlichen Potenzreihe. Zur praktischen Handhabung wird diese nach $i = 0\ldots n$ Gliedern abgebrochen und geht in die endliche Potenzreihe der Gleichung (6.50) über. Deren Güte hängt somit von der Anzahl $i = 0\ldots n$ berücksichtigter Reihenglieder ab. Die Modellvorhersagen sind in Abbildung A.2 in Abhängigkeit von n dargestellt. Mehr als $n = 37$ Reihenglieder konnten mit MATLAB® für die Materialparameter $G = 5\cdot 10^4\,\mathrm{Pa}$ und $\beta = 5\,\mathrm{Pa}$ nicht berechnet werden. Um die Güte der numerischen Modellvorhersagen bewerten zu können, wird der Speichermodul zunächst mithilfe einer *semi-analytischen* Lösungsstrategie ermittelt. Dazu wird die analytisch bestimmte Spannungsantwort nach Gleichung (6.40) mittels der in MATLAB® implementierten Trapezregel [52] *trapz* numerisch integriert. Da dieses Vorgehen numerisch sehr robust und daher vertrauenswürdig ist, eignet es sich zur Bestimmung einer Referenzlösung. Weil

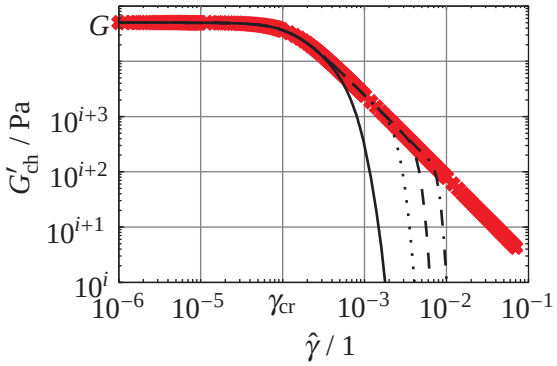


Abbildung A.2: Semi-analytische Referenzlösung für den Speichermodul nach Gleichung (6.51) mit $k = 1$ im Vergleich zum Speichermodul auf Basis der endlichen Potenzreiche nach Gleichung (6.50) für $G = 5\cdot 10^4\,\mathrm{Pa}$ und $\beta = 5\,\mathrm{Pa}$; semi-analytisch: xxx; Potenzreihe ($n = 1$): ——, ($n = 10$): ·····, ($n = 20$): – – –, ($n = 37$): - · - · -

die qualitativen Eigenschaften der semi-analytischen Referenzlösung des Speichermoduls (Abbildung A.2) mit denen des PRANDTL Elements nach Boisly et al. (2014b; Abb. 4) übereinstimmen, werden sie als „vertrauenswürdig“ eingestuft. Die analytischen Lösungen des Speichermoduls auf Grundlage der endlichen Potenzreihe sind in Abbildung A.2 ebenfalls in Abhängigkeit von der Anzahl der Reihenglieder n dargestellt. Sie stimmt für „kleinere“ Schubverzerrungsamplituden mit der semi-analytischen

[52] (Oelschlägel und Matthäus 1988; S. 48), (Schwetlick und Roos 1999; S. 18, 123), (Plato 2006; S. 117), (Freund und Hoppe 2007; S. 166), (Dahmen und Reusken 2008; S. 348)

Referenzlösung überein. Sie divergiert hingegen mit steigenden Schubverzerrungsamplituden. Je größer die Anzahl berücksichtigter Reihenglieder n, desto später beginnt der auf Grundlage der endlichen Potenzreihe ermittelte Speichermodul von der semi-analytischen Referenzlösung zu divergieren. Da der Speichermodul selbst mit der für MATLAB® größt möglichen Anzahl an Reihenglieder ($n = 37$) divergiert, kann er die Güte der semi-analytischen Referenzlösung nicht gewährleisten.

Die analytischen Lösungen für $a_{\mathrm{ch}.k}$ und $b_{\mathrm{ch}.k}$, welche entsprechend den Gleichungen (6.61) und (6.62) auf der endlichen Potenzreihe basieren, sind in Abbildung A.3 dargestellt. Die Integrale sind auf Basis der in MATLAB® implementierten Trapezregel *trapz* numerisch ausgewertet. Es ist zu erkennen, dass die Güte der Modellvorhersage ebenfalls von der Anzahl n berücksichtigten Reihenglieder abhängt. Wie zu erwarten ist, sind die Abweichungen umso geringer je größer die Anzahl berücksichtigter Reihenglieder n. Die Obergrenze der mit MATLAB® berechenbaren Reihenglieder liegt für $G = 5 \cdot 10^4\,\mathrm{Pa}$ und $\beta = 5\,\mathrm{Pa}$ bei $n = 77$. Die maximal mögliche Anzahl berücksichtigter Reihenglieder genügt jedoch nicht, die auf der Potenzreihe basierende analytische Lösung von $a_{\mathrm{ch}.k}$ mit der semi-analytischen Referenzlösung vollends zur Übereinstimmung zu bringen: Für $n = 77$ werden $a_{\mathrm{ch}.k}$ ab Schubverzerrungsamplituden $\hat{\gamma} > 5 \cdot 10^{-3}$ unterbewertet. Um die Abweichungen zwischen der auf der endlichen Potenzreihe basierenden analytischen Lösung und der semi-analytischen Lösung bewerten zu können, werden zusätzlich numerische Modellvorhersagen auf Grundlage der Exponentialfunktion nach Gleichungen (6.58) und (6.59) bestimmt. Die darin vorkommenden Integrale werden mit der in MATLAB® implementierten Trapezregel *trapz* numerisch integriert. Die Ergebnisse sind ebenfalls in Abbildung A.3 aufgetragen. Die numerischen Ergebnisse für $a_{\mathrm{ch}.k}$, basierend auf der Exponentialfunktion nach Gleichung (6.58), stimmen für alle Schubverzerrungsamplituden mit der semi-analytischen Vergleichslösung entsprechend Gleichung (6.51) überein. Für $b_{\mathrm{ch}.k}$ ergibt sich das umgekehrte Ergebnis. Die mit der Potenzreihe formulierte analytische Lösung (Gleichung (6.62)) stimmt für $n = 77$ mit der semi-analytischen Referenzlösung nach Gleichung (6.52) für alle Schubverzerrungsamplituden überein. Die auf der Exponentialfunktion basierende analytische Lösung entsprechend Gleichung (6.59) divergiert für $\hat{\gamma} \to 0$. Um sicherzustellen, dass die Divergenzen rein numerischer Natur und physikalisch unbegründet sind, wird der Grenzwert $\lim_{\hat{\gamma}\to 0} b_{\mathrm{ch}.k}$ ausgehend von Gleichung (6.62) bestimmt. Dazu wird die Gleichung zunächst in

$$b_{\mathrm{ch}.k} = \frac{2\beta}{\pi \cosh\left(\frac{\hat{\gamma}}{\gamma_{\mathrm{cr}}}\right)\hat{\gamma}} \left\{ \frac{2}{k}\left[(-1)^{\frac{k+1}{2}} + (-1)^{\frac{k-1}{2}} \cosh\left(\frac{\hat{\gamma}}{\gamma_{\mathrm{cr}}}\right)\right] + \sum_{i=2}^{\infty} \left(\frac{G}{\beta}\right)^i \frac{\hat{\gamma}^i}{i!} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \sin^i(\theta)\cos(k\theta)\,d\theta \right\} \tag{A.180}$$

umgeformt. Der Grenzwert des letzten Summanden ist Null

$$\lim_{\hat{\gamma}\to 0}\left[\sum_{i=2}^{\infty} \left(\frac{G}{\beta}\right)^i \frac{\hat{\gamma}^{i-1}}{i!} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \sin^i(\theta)\cos(k\theta)\,d\theta \right] = 0\,, \tag{A.181}$$

sodass

$$\lim_{\hat{\gamma}\to 0} b_{\mathrm{ch}.k} = \frac{4\beta}{\pi k} \lim_{\hat{\gamma}\to 0}\left[\frac{(-1)^{\frac{k+1}{2}} + (-1)^{\frac{k-1}{2}} \cosh\left(\frac{\hat{\gamma}}{\gamma_{\mathrm{cr}}}\right)}{\hat{\gamma}\cosh\left(\frac{\hat{\gamma}}{\gamma_{\mathrm{cr}}}\right)} \right]. \tag{A.182}$$

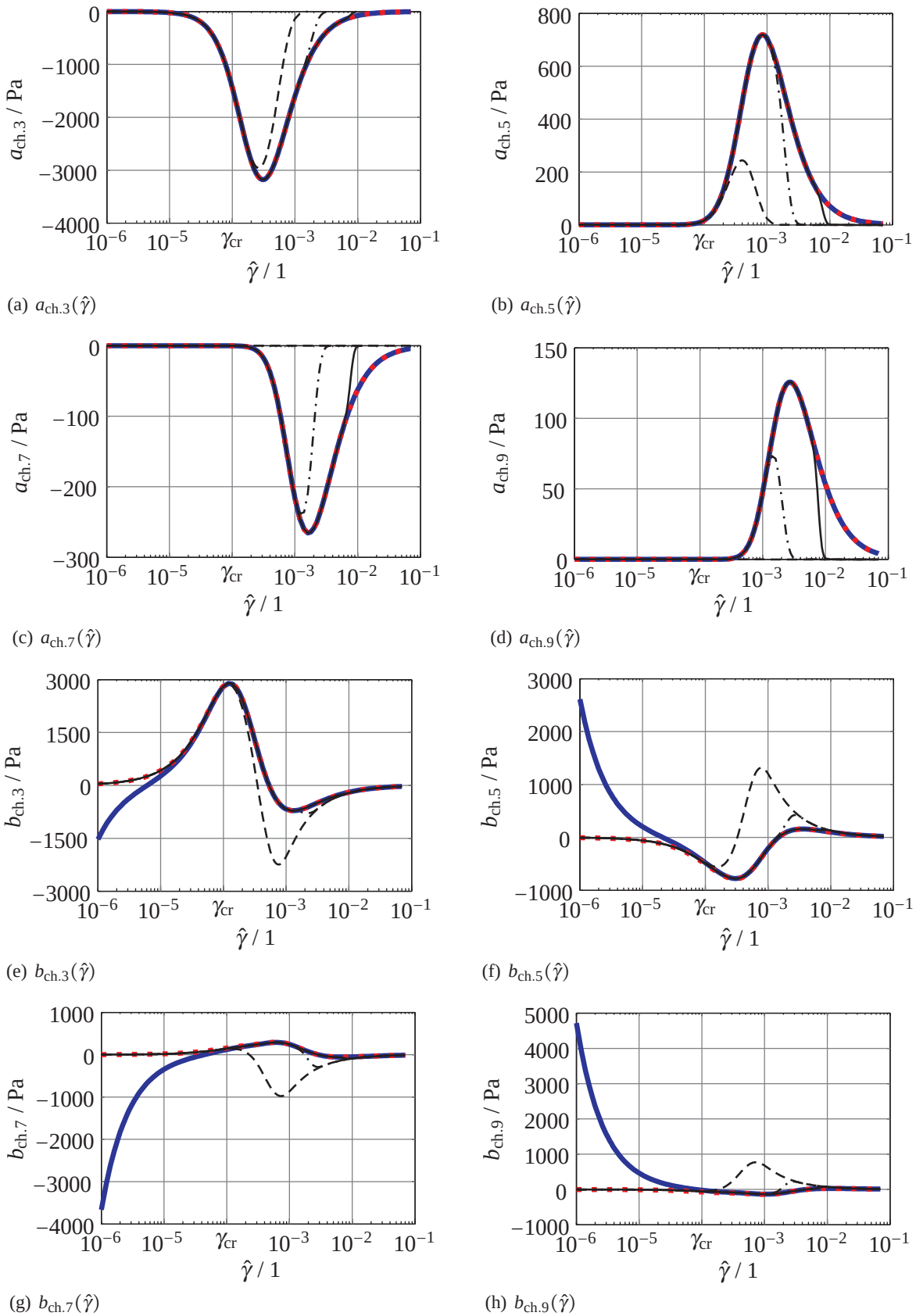
Weil

$$\lim_{\hat{\gamma}\to 0}\left[(-1)^{\frac{k+1}{2}} + (-1)^{\frac{k-1}{2}} \cosh\left(\frac{\hat{\gamma}}{\gamma_{\mathrm{cr}}}\right)\right] = 0 \qquad \forall\ k = \text{ungerade} \tag{A.183}$$

$$\lim_{\hat{\gamma}\to 0}\left[\hat{\gamma}\cosh\left(\frac{\hat{\gamma}}{\gamma_{\mathrm{cr}}}\right)\right] = 0\,, \tag{A.184}$$

wird die Gleichung mittels der Regel von BERNOULLI-L'HOSPITAL

$$\lim_{\hat{\gamma}\to 0} \frac{f_1(\hat{\gamma})}{f_2(\hat{\gamma})} = \lim_{\hat{\gamma}\to 0} \frac{f_1'(\hat{\gamma})}{f_2'(\hat{\gamma})} \tag{A.185}$$



(a) $a_{ch.3}(\hat{\gamma})$ (b) $a_{ch.5}(\hat{\gamma})$

(c) $a_{ch.7}(\hat{\gamma})$ (d) $a_{ch.9}(\hat{\gamma})$

(e) $b_{ch.3}(\hat{\gamma})$ (f) $b_{ch.5}(\hat{\gamma})$

(g) $b_{ch.7}(\hat{\gamma})$ (h) $b_{ch.9}(\hat{\gamma})$

Abbildung A.3: Vergleich von Modellvorhersagen der Höherharmonischen basierend auf drei Berechnungsgrundlagen für $G = 5 \cdot 10^4$ Pa und $\beta = 5$ Pa; *semi-analytische* Referenzlösung mittels numerischer Integration der Gleichungen (6.51) und (6.52); analytische Lösung auf Grundlage einer Exponentialfunktion nach Gleichungen (6.58) und (6.59); analytische Lösung auf Basis einer endlichen Potenzreihe nach Gleichungen (6.61) und (6.62); semi-analytisch: ·····, Exponentialfunktion: ——, Potenzreihe ($n = 5$): – – –, ($n = 20$): - · - · -, ($n = 77$): ——

auf

$$\lim_{\hat{\gamma}\to 0} b_{\mathrm{ch}.k} = \frac{4\beta}{\pi k} \frac{\lim_{\hat{\gamma}\to 0}\left[(-1)^{\frac{k-1}{2}} \sinh\left(\frac{\hat{\gamma}}{\gamma_{\mathrm{cr}}}\right)\right]}{\lim_{\hat{\gamma}\to 0}\left[\cosh\left(\frac{\hat{\gamma}}{\gamma_{\mathrm{cr}}}\right) + \hat{\gamma}\sinh\left(\frac{\hat{\gamma}}{\gamma_{\mathrm{cr}}}\right)\right]} = \frac{0}{1} = 0 \tag{A.186}$$

umgerechnet. Die Grenzwertbetrachtung der analytischen Lösung zeigt, dass $b_{\mathrm{ch}.k}$ mit kleiner werdender Verzerrungsamplitude analog zum PRANDTL Element (Boisly et al. 2014b; Abb. 5) gegen Null geht. Damit ist gezeigt, dass die Divergenzen von $b_{\mathrm{ch}.k}$ für $\hat{\gamma} \to 0$ aus Abbildung A.3 unphysikalisch und rein numerischer Natur sind. Die numerischen Eigenschaften von Gleichung (6.59) scheinen demnach für „kleine“ Verzerrungsamplituden nicht gut konditioniert zu sein.
Da die semi-analytische Lösung für $a_{\mathrm{ch}.k}$ und $b_{\mathrm{ch}.k}$ abschnittsweise mit mindestens einer der analytischen Lösungen übereinstimmt, wird die semi-analytische Lösung als glaubwürdig eingestuft. Außerdem wird die Sinnhaftigkeit der semi-analytischen Lösung durch Parallelen zu den analytischen Lösungen des PRANDTL Elements aus Boisly et al. (2014b) bestätigt. Die Parallelen werden in Abschnitt A.6.5 ausgearbeitet. Zusammenfassend kommt man also zum Schluss, dass die semi-analytische Referenzlösung die präziseste aller Lösungen ist.

Die Verläufe der normierten Intensitäten, die sich aus den drei Beschreibungsweisen ergeben, sind in Abbildung A.4 dargestellt. Die Divergenz der analytischen Lösung basierend auf der Exponentialfunktion im Fall von $\hat{\gamma} \to 0$ ist eine direkte Konsequenz der Divergenz von $b_{\mathrm{ch}.k}$. Die gute Übereinstimmung der semi-analytischen Referenzlösung und der analytischen Lösung auf Basis der endlichen Potenzreihe täuscht über deren numerische Diskrepanzen aus Abbildung A.3 hinweg.

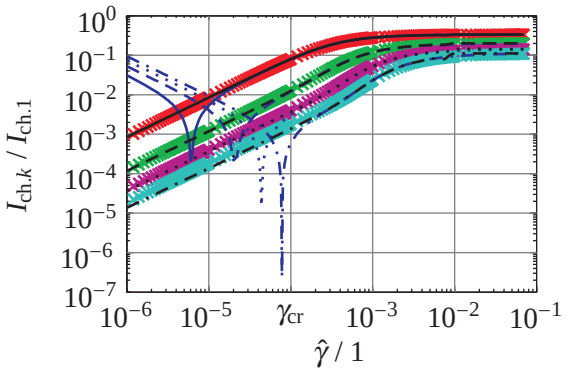


Abbildung A.4: Vergleich von Modellvorhersagen der normierten Intensitäten basierend auf drei Berechnungsgrundlagen für $G = 5 \cdot 10^4$ Pa und $\beta = 5$ Pa; *semi-analytische* Referenzlösung mittels numerischer Integration der Gleichungen (6.51) und (6.52), ($k = 3$): xxx, ($k = 5$): xxx, ($k = 7$): xxx, ($k = 9$): xxx; analytische Lösung auf Grundlage einer Exponentialfunktion nach Gleichungen (6.58) und (6.59), ($k = 3$): ——, ($k = 5$): – – –, ($k = 7$): ·····, ($k = 9$): - · - · -; analytische Lösung auf Basis einer endlichen Potenzreihe nach Gleichungen (6.61) und (6.62), ($n = 77$, $k = 3$): ——, ($n = 77$, $k = 5$): – – –, ($n = 77$, $k = 5$): ·····, ($n = 77$, $k = 3$): - · - · -

A.6.5 Harmonische Materialfunktionen des endochronen MAXWELL Elements im Vergleich zu denen des PRANDTL Elements

Wie bereits mehrfach erwähnt, sind die Eigenschaften des endochronen MAXWELL Elements in qualitativer Hinsicht mit denen des PRANDTL Elements vergleichbar. Daher liegt es nahe, die Materialfunktionen beider rheologischer Elemente direkt gegenüberzustellen. Die Gegenüberstellung erfolgt in diesem Abschnitt für harmonische Materialfunktionen, welche einer verzerrungsgeregelten sinusförmigen Anregung zugeordnet sind. Abbildung A.5 vergleicht Speicher- und Verlustmodul des endochronen MAXWELL Elements mit denen des PRANDTL Elements. Die Höherharmonischen sowie normierte Intensitäten sind in Abbildung A.6 dargestellt. Speicher- und Verlustmodul des endochronen MAXWELL Elements sind mithilfe der semi-analytischen Referenzlösung berechnet, das heißt mittels der numerischen Integration der analytischen Spannungsantwort aus Gleichung (6.40). Wie in Abschnitt A.6.4 gezeigt wurde, liefert

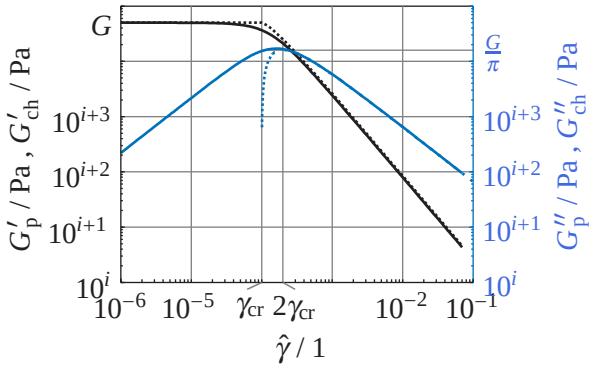
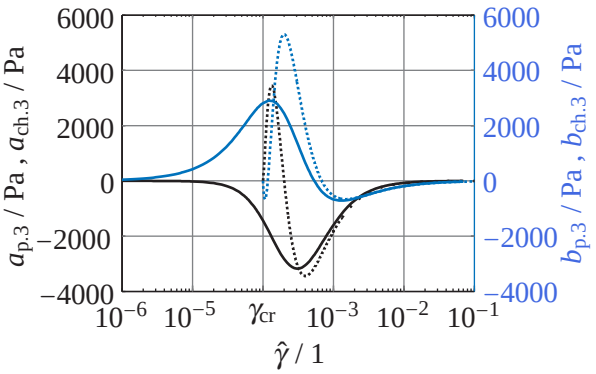


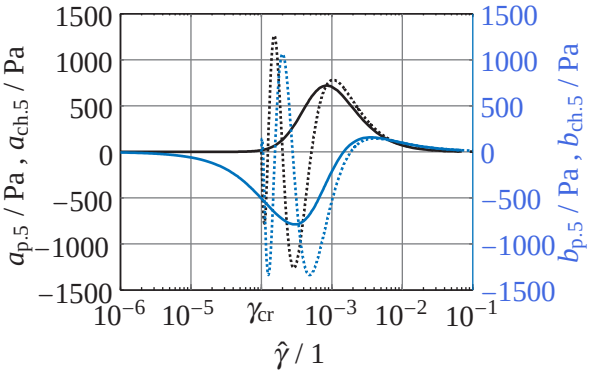
Abbildung A.5: Vergleich der Speicher- und Verlustmoduli des endochronen MAXWELL und PRANDTL Elements für $G = 5 \cdot 10^4$ Pa und $\tau_y = \beta = 5$ Pa; Speicher- und Verlustmodul des endochronen MAXWELL Elements entsprechen der semi-analytischen Referenzlösung (Gleichungen (6.51) und (6.52) mit $k = 1$); $G'_p(\hat{\gamma})$: ·····, $G''_p(\hat{\gamma})$: ·····, $G'_{ch}(\hat{\gamma})$: ——, $G''_{ch}(\hat{\gamma})$: ——

dies die numerisch geeignetste Berechnungsgrundlage. Die numerische Integration erfolgt unter Verwendung der in MATLAB® implementierten Trapezregel *trapz*. In Abbildung A.5 ist zu erkennen, dass der Speichermodul beider rheologischer Elemente nahezu identisch ist. Geringfügige Unterschiede treten ausschließlich im Bereich der kritischen Schubverzerrung γ_{cr} auf. Da während eines verzerrungsgeregelten Amplitudensweeps $\hat{\gamma} = \gamma_{cr}$ den fest-flüssig Übergang des PRANDTL Elements infolge des Erfüllens der Fließbedingung markiert, das endochrone MAXWELL Element im Gegensatz dazu keinen scharfen Fließbeginn besitzt, ist dieses Ergebnis plausibel. Aus demselben Grund unterscheiden sich die Verlustmoduli beider rheologischer Elemente im Bereich $\hat{\gamma} \leq \gamma_{cr}$ erheblich. Der Verlustmodul des PRANDTL Elements ist im Vorfließbereich identisch Null (Boisly et al. 2014b; Gl. (36)). Da das endochrone MAXWELL Element infolge jeder noch so kleinen Last plastisch fließt, ist der Verlustmodul verschieden von Null. Wie zu erwarten war, sind die Verlustmoduli beider rheologischer Elemente im Bereich $\hat{\gamma} \geq 2\gamma_{cr}$ nahezu identisch.

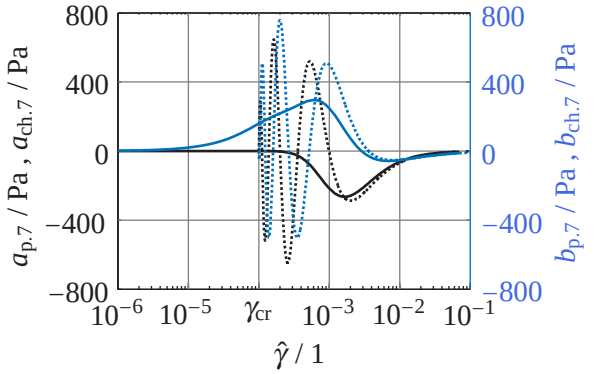
Die Höherharmonischen sowie die normierten Intensitäten sind in Abbildung A.6 dargestellt. Aufgrund der Tatsache, dass sich beide rheologische Elemente hinsichtlich der Existenz eines fest-flüssig Übergangs unterschiedlich verhalten, sind die Höherharmonischen des endochronen MAXWELL Elements im Bereich $\hat{\gamma} \leq \gamma_{cr}$ verschieden von Null und die des PRANDTL Elements identisch Null. Mit steigender Schubverzerrungsamplitude nähern sich die Höherharmonischen beider Elemente immer weiter an. Die dritten Harmonischen $a_3(\hat{\gamma})$ und $b_3(\hat{\gamma})$ sind ungefähr ab $\hat{\gamma} \geq 10\gamma_{cr}$ nahezu identisch, die fünften Harmonischen $a_5(\hat{\gamma})$ und $b_5(\hat{\gamma})$ ab $\hat{\gamma} \geq 30\gamma_{cr}$, die siebenten Harmonischen $a_7(\hat{\gamma})$ und $b_7(\hat{\gamma})$ ab $\hat{\gamma} \geq 50\gamma_{cr}$ und die neunten Harmonischen $a_9(\hat{\gamma})$ und $b_9(\hat{\gamma})$ ab $\hat{\gamma} \geq 70\gamma_{cr}$. Die Annäherung der Höherharmonischen beider rheologischer Elemente wird durch die normierten Intensitäten in Abbildung A.6(e) belegt. Diese sind analog zum Verlustmodul bereits ab $\hat{\gamma} \geq 2\gamma_{cr}$ nahezu identisch. Dass die normierten Intensitäten des endochronen MAXWELL Elements mit denen des PRANDTL Elements „praktisch identisch“ sind, validiert rückwirkend betrachtet das semi-analytische Berechnungsverfahren als Referenzlösung.



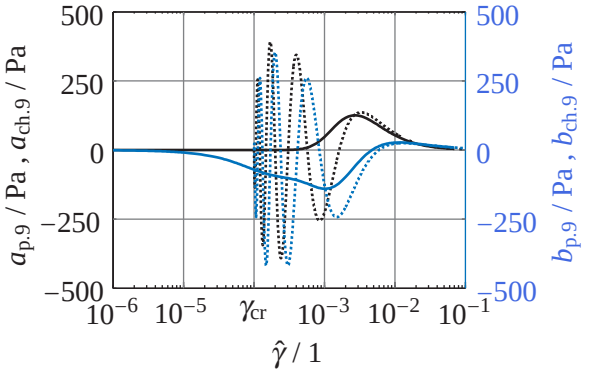
(a) $a_{p.3}(\hat{\gamma})$: ·····, $b_{p.3}(\hat{\gamma})$: ·····, $a_{ch.3}(\hat{\gamma})$: ——, $b_{ch.3}(\hat{\gamma})$: ——



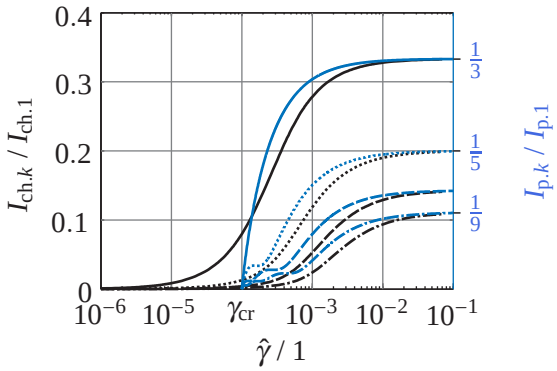
(b) $a_{p.5}(\hat{\gamma})$: ·····, $b_{p.5}(\hat{\gamma})$: ·····, $a_{ch.5}(\hat{\gamma})$: ——, $b_{ch.5}(\hat{\gamma})$: ——



(c) $a_{p.7}(\hat{\gamma})$: ·····, $b_{p.7}(\hat{\gamma})$: ·····, $a_{ch.7}(\hat{\gamma})$: ——, $b_{ch.7}(\hat{\gamma})$: ——



(d) $a_{p.9}(\hat{\gamma})$: ·····, $b_{p.9}(\hat{\gamma})$: ·····, $a_{ch.9}(\hat{\gamma})$: ——, $b_{ch.9}(\hat{\gamma})$: ——



(e) $I_{p.3}/I_{p.1}$: ——, $I_{p.5}/I_{p.1}$: ·····, $I_{p.7}/I_{p.1}$: – – –, $I_{p.9}/I_{p.1}$: - · - · -, $I_{ch.3}/I_{ch.1}$: ——, $I_{ch.5}/I_{ch.1}$: ·····, $I_{ch.7}/I_{ch.1}$: – – –, $I_{ch.9}/I_{ch.1}$: - · - · -

Abbildung A.6: Vergleich der Höherharmonischen und der normierten Intensitäten des PRANDTL und endochronen MAXWELL Elements für $G = 5 \cdot 10^4$ Pa und $\tau_y = \beta = 5$ Pa; die Höherharmonischen des endochronen MAXWELL Elements entsprechen der semi-analytischen Referenzlösung (Gleichungen (6.51) und (6.52))

A.7 Rohdaten der Messungen zur Fließkurve sowie Speicher- und Verlustmodul einer 40 vol% Suspension aus Carbonyleisen Pulver von BASF^{TM} suspendiert in die Trägerflüssigkeit MOTUL 300V

Im Folgenden sind die Rohdaten derjenigen Materialfunktionen einer magnetorheologischen Flüssigkeit aufgeführt, die in dieser Arbeit zur Modellierung des Materialverhaltens in Abschnitt 8 ausgewertet werden. Das beinhaltet die Fließkurve sowie Speicher- und Verlustmodul einer 40 vol% Suspension aus Carbonyleisen Pulver von BASF^{TM}, welche in die Trägerflüssigkeit MOTUL 300V suspendiert sind. Die Materialfunktionen sind für die Magnetfelder $|\mathbf{B}| = 0\,\mathrm{mT}$, $|\mathbf{B}| = 50\,\mathrm{mT}$, $|\mathbf{B}| = 150\,\mathrm{mT}$ und $|\mathbf{B}| = 300\,\mathrm{mT}$ in den nachfolgenden Tabellen hinterlegt. Das Verhalten für $|\mathbf{B}| = 0\,\mathrm{mT}$ gleicht dem einer normalen Suspension, welche in Abschnitt 8.1 gesondert betrachtet ist.

Tabelle A.1: Rohdaten der Fließkurve einer $\Phi = 40\,\mathrm{vol\%}$ Suspension aus Carbonyleisen Pulver von BASF^{TM} suspendiert in die Trägerflüssigkeit MOTUL 300V

i	$\dot{\tilde{\gamma}}_i$ / s^{-1}	$\tau^i_{\infty,\mathrm{meas}}(\dot{\tilde{\gamma}}_i)$ / Pa			
		$\|\mathbf{B}\| = 0\mathrm{mT}$	$\|\mathbf{B}\| = 50\mathrm{mT}$	$\|\mathbf{B}\| = 150\mathrm{mT}$	$\|\mathbf{B}\| = 300\mathrm{mT}$
1	1.00E-03	5.879E-01	9.5070E+01	1.9190E+03	4.34600E+03
2	5.13E-03	1.749E+00	1.3920E+02	2.3370E+03	6.73400E+03
3	9.25E-03	2.537E+00	1.7630E+02	2.5370E+03	8.51100E+03
4	1.34E-02	3.304E+00	2.0660E+02	2.6360E+03	9.69900E+03
5	1.75E-02	4.118E+00	2.2910E+02	2.6940E+03	1.03600E+04
6	2.16E-02	4.803E+00	2.4570E+02	2.7390E+03	1.06700E+04
7	2.58E-02	5.407E+00	2.5840E+02	2.7780E+03	1.08500E+04
8	2.99E-02	6.088E+00	2.6860E+02	2.8090E+03	1.09800E+04
9	3.40E-02	6.722E+00	2.7730E+02	2.8370E+03	1.10100E+04
10	3.81E-02	7.307E+00	2.8480E+02	2.8610E+03	1.10800E+04
11	4.23E-02	7.864E+00	2.9140E+02	2.8780E+03	1.11000E+04
12	4.64E-02	8.430E+00	2.9730E+02	2.8860E+03	1.11000E+04
13	5.05E-02	8.956E+00	3.0290E+02	2.8970E+03	1.11300E+04
14	5.46E-02	9.413E+00	3.0800E+02	2.9090E+03	1.11100E+04
15	5.88E-02	9.804E+00	3.1290E+02	2.9230E+03	1.11200E+04
16	6.29E-02	1.014E+01	3.1750E+02	2.9340E+03	1.11300E+04
17	6.70E-02	1.043E+01	3.2180E+02	2.9460E+03	1.11500E+04
18	7.11E-02	1.069E+01	3.2580E+02	2.9560E+03	1.11600E+04
19	7.53E-02	1.091E+01	3.2970E+02	2.9670E+03	1.12000E+04
20	7.94E-02	1.109E+01	3.3320E+02	2.9770E+03	1.12000E+04
21	8.35E-02	1.127E+01	3.3650E+02	2.9890E+03	1.12100E+04
22	8.76E-02	1.141E+01	3.3940E+02	3.0010E+03	1.12000E+04
23	9.18E-02	1.155E+01	3.4210E+02	3.0090E+03	1.11800E+04
24	9.59E-02	1.168E+01	3.4450E+02	3.0200E+03	1.11900E+04
25	1.00E-01	1.178E+01	3.4660E+02	3.0300E+03	1.12200E+04

Tabelle A.2: Rohdaten des Speichermoduls einer $\Phi = 40\,\text{vol\%}$ Suspension aus Carbonyleisen Pulver von BASF^{TM} suspendiert in die Trägerflüssigkeit MOTUL 300V

i	$\hat{\gamma}_i$ / 1	$G'^{i}_{\text{meas}}(\hat{\gamma}_i)$ / Pa			
		$\lvert\mathbf{B}\rvert$ = 0mT	$\lvert\mathbf{B}\rvert$ = 50mT	$\lvert\mathbf{B}\rvert$ = 150mT	$\lvert\mathbf{B}\rvert$ = 300mT
1	1.001E-05	4.5913E+02	4.5090000E+05	1.69633333E+06	3.71000000E+06
2	1.550E-05	5.5990E+02	4.6700000E+05	1.80200000E+06	2.15800000E+06
3	2.404E-05	5.7000E+02	4.7043333E+05	1.81800000E+06	2.73566667E+06
4	3.728E-05	5.7000E+02	4.6210000E+05	1.82000000E+06	2.76233333E+06
5	5.779E-05	5.7360E+02	4.3830000E+05	1.81633333E+06	2.76933333E+06
6	8.961E-05	5.5610E+02	3.9593333E+05	1.78933333E+06	2.77133333E+06
7	1.389E-04	5.5163E+02	3.3750000E+05	1.72633333E+06	2.76700000E+06
8	2.154E-04	5.3140E+02	2.7286667E+05	1.60766667E+06	2.75300000E+06
9	3.340E-04	4.8493E+02	2.0950000E+05	1.42366667E+06	2.71500000E+06
10	5.180E-04	4.2817E+02	1.5403333E+05	1.18833333E+06	2.64233333E+06
11	8.031E-04	3.6347E+02	1.1030000E+05	9.37833333E+05	2.51700000E+06
12	1.245E-03	2.9150E+02	7.7660000E+04	7.05233333E+05	2.32866667E+06
13	1.931E-03	2.4140E+02	5.4383333E+04	5.15166667E+05	2.03100000E+06
14	2.994E-03	1.9523E+02	3.8010000E+04	3.73566667E+05	1.68666667E+06
15	4.641E-03	1.5660E+02	2.6626667E+04	2.72666667E+05	1.08356667E+06
16	7.196E-03	1.2434E+02	1.8666667E+04	1.97833333E+05	7.54466667E+05
17	1.116E-02	9.7370E+01	1.2940000E+04	1.39533333E+05	5.39366667E+05
18	1.730E-02	7.6640E+01	8.7933333E+03	9.46833333E+04	3.70400000E+05
19	2.682E-02	6.1133E+01	5.8280000E+03	6.09433333E+04	2.46800000E+05
20	4.159E-02	4.7593E+01	3.7526667E+03	3.73833333E+04	1.56166667E+05
21	6.449E-02	3.5337E+01	2.3483333E+03	2.22533333E+04	9.46766667E+04
22	1.000E-01	2.5193E+01	1.4390000E+03	1.36666667E+04	5.52966667E+04

Tabelle A.3: Rohdaten des Verlustmoduls einer $\Phi = 40\,\text{vol\%}$ Suspension aus Carbonyleisen Pulver von BASF^{TM} suspendiert in die Trägerflüssigkeit MOTUL 300V

i	$\hat{\gamma}_i$ / 1	$G''^{i}_{\text{meas}}(\hat{\gamma}_i)$ / Pa			
		$\lvert\mathbf{B}\rvert$ = 0mT	$\lvert\mathbf{B}\rvert$ = 50mT	$\lvert\mathbf{B}\rvert$ = 150mT	$\lvert\mathbf{B}\rvert$ = 300mT
1	1.001E-05	4.4380E+02	7.976000E+04	1.1764000E+05	4.4403333E+04
2	1.550E-05	4.4507E+02	7.919333E+04	1.0550000E+05	2.8701667E+05
3	2.404E-05	4.2897E+02	7.827667E+04	9.6473333E+04	4.1850000E+04
4	3.728E-05	4.3350E+02	8.075667E+04	8.6106667E+04	3.8053333E+04
5	5.779E-05	4.3310E+02	8.584333E+04	8.9570000E+04	3.7053333E+04
6	8.961E-05	4.2550E+02	9.341000E+04	1.0223000E+05	3.7643333E+04
7	1.389E-04	4.2427E+02	9.943667E+04	1.2993333E+05	4.0146667E+04
8	2.154E-04	4.2270E+02	1.016133E+05	1.8330000E+05	5.0003333E+04
9	3.340E-04	4.1907E+02	9.785000E+04	2.6153333E+05	7.1590000E+04
10	5.180E-04	4.1533E+02	8.843333E+04	3.4013333E+05	1.1741667E+05
11	8.031E-04	4.0443E+02	7.567333E+04	3.8503333E+05	2.0190667E+05
12	1.245E-03	3.7550E+02	6.199000E+04	3.8090000E+05	3.1562333E+05
13	1.931E-03	3.5533E+02	4.937000E+04	3.3733333E+05	4.6323333E+05
14	2.994E-03	3.2473E+02	3.862667E+04	2.7610000E+05	5.6650000E+05
15	4.641E-03	2.8973E+02	2.972333E+04	2.1580000E+05	6.5446667E+05
16	7.196E-03	2.5327E+02	2.251333E+04	1.6593333E+05	5.4363333E+05
17	1.116E-02	2.1780E+02	1.683000E+04	1.2710000E+05	4.1936667E+05
18	1.730E-02	1.8367E+02	1.238333E+04	9.6383333E+04	2.9593333E+05
19	2.682E-02	1.4867E+02	8.928667E+03	7.1353333E+04	2.0570000E+05
20	4.159E-02	1.1452E+02	6.257000E+03	5.0270000E+04	1.4273333E+05
21	6.449E-02	8.5447E+01	4.222333E+03	3.3073333E+04	9.6296667E+04
22	1.000E-01	6.4313E+01	2.723333E+03	2.0446667E+04	6.1036667E+04

Literaturverzeichnis

ABAQUS. Theory manual. 2006. Version 6.6.

J. S. Abel, G. C. Stangle, C. H. Schilling, und I. A. Aksay. Sedimentation in flocculating colloidal suspensions. *Journal of Materials Research*, 9(2):451–461, 1994.

S. M. Al-Zahrani. A generalized rheological model for shear thinning fluids. *Journal of Petroleum Science and Engineering*, 17(3–4):211–215, 1997.

H. Altenbach. *Kontinuumsmechanik*. Springer, 2012. ISBN 978-3-642-24118-5.

J. Altenbach. *Einführung in die Kontinuumsmechanik*. B. G. Teubner, 1994. ISBN 3-519-03096-9.

D. Andelman und R. E. Rosensweig. *Polymers, liquids and colloids in electric fields: Interfacial Instabilities, Orientation and Phase Transitions*, volume 2 of *Series in Soft Condensed Matter*, chapter: The Phenomenology of Modulated Phases: From Magnetic Solids and Fluids to Organic Films and Polymers, pages 1–56. World Scientific, 2009. ISBN 978-981-4271-68-4.

E. N. d. C. Andrade. *Viscosity and plasticity*. Heffer, 1947. ASIN B0007K5JG8.

S. A. G. Andrade. *Semismooth Newton and Path Following Methods for the Numerical Simulation of Bingham Fluids*. PhD thesis, Escuela Politecnica Nacional del Ecuador, 2008.

H. A. Ardakani, E. Mitsoulis, und S. G. Hatzikiriakos. Thixotropic flow of toothpaste through extrusion dies. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 166(21–22):1262–1271, 2011.

O. Ashour, C. A. Rogers, und W. Kordonsky. Magnetorheological fluids: Materials, characterization, and devices. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, 7(2):123–130, 1996.

K. Atalık und R. Keunings. On the occurrence of even harmonics in the shear stress response of viscoelastic fluids in large amplitude oscillatory shear. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 122(1–3): 107–116, 2004.

G. Backhaus. *Deformationsgesetze*. Akademie Verlag, 1983. LC No. 83183721.

B. S. Baker, D. Brown, R. C. Anantheswaran, und W. Hanselmann. *Measurement of yield stress in dark chocolate using vane rheometry*, 2006. 4th International Symposium on Food Rheology and Structure.

H. Balke. Thermodynamische Analyse von Deformationsgesetzen des Modellstruktursystems. *ZAMM - Journal of Applied Mathematics and Mechanics / Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, 54(4):233–240, 1974.

H. Balke. *Einführung in die Technische Mechanik – Festigkeitslehre*. Springer, 2010a. ISBN 978-3-642-10385-8.

H. Balke. *Einführung in die Technische Mechanik – Statik*. Springer, 2010b. ISBN 978-3-642-10397-1.

H. Balke. *Einführung in die Technische Mechanik – Kinetik*. Springer, 2011. ISBN 978-3-642-19743-7.

H. A. Barnes. The yield stress–a review or '$\pi\alpha\nu\tau\alpha\ \rho\varepsilon\iota$'–everything flows? *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 81(1–2):133–178, 1999.

H. A. Barnes. *A handbook of elementary rheology*. Cambrian Printers, 2000. ISBN 0-9538032-0-1.

H. A. Barnes, J. F. Hutton, und K. Walters. *An introduction to rheology*. Elsevier Science Publishers, 1989. ISBN 0-444-87469-0.

H. A. Barnes und K. Walters. The yield stress myth? *Rheologica Acta*, 24(4):323–326, 1985.

BASF. Magnetorheological fluids basonetic ® the right fluid for your application. 2009.

K.-J. Bathe. *Finite-Elemente-Methoden*. Springer, 2002. ISBN 3-540-66806-3.

M. Baus, L. F. Rull, und J.-P. Ryckaert. *Observation, prediction and simulation of phase transitions in complex fluids*. Springer, 1995. ISBN 0792334396.

E. Becker. Die effektive Viskosität bei viskometrischer Druck-Schlepp-Strömung mit Anwendung auf Extruder und Gleitlager. *Materialwissenschaft und Werkstofftechnik*, 9(12):452–459, 1978.

E. Becker. *Technische Strömungslehre*. Teubner, 1986. ISBN 978-3-519-43019-3.

E. Becker und W. Bürger. *Kontinuumsmechanik*. Teubner, 1975. ISBN 3-519-02319-9.

H. Beinersdorf. *Identifikation der Materialparameter eines viskoelastischen Gummimaterialmodells anhand von Versuchsergebnissen mittels Optimierung*. Studienarbeit, Bauhaus-Universität Weimar, 2002. Studienarbeit.

T. Belytschko, W. K. Liu, und B. Moran. *Nonlinear Finite Elements for Continua and Structures*. Wiley, 2001. ISBN 0-471-98773-5.

B. M. Berkovsky. *Magnetic Fluids*. Oxford Science Publications, 1993. ISBN 0-19-856388-4.

B. Y. Berkovsky, A. N. Vislovich, und P. E. Kashevsky. Magnetic fluid as a continuum with internal degrees of freedom. *IEEE Transactions on Magnetics*, 16(2):329–342, 1980.

A. Bertram. *Axiomatische Einführung in die Kontinuumsmechanik*. BI-Wissenschaftsverlag, 1989. ISBN 3-411-14031-3.

A. Bertram. *Vorlesungsmanuskript zur Festigkeitslehre 1 & 2*. Studienbrief, Otto-Von-Guericke-Universitä Magdeburg, 2007. Studienbrief.

A. Bertram. *Elasticity and Plasticity of Large Deformations*. Springer, 2008. ISBN 978-3-540-69399-4.

A. Bertram und R. Glüge. *Festkörpermechanik*. Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg, 2013. ISBN 978-3-940961-88-4.

R. Best. *Digitale Meßwertverarbeitung*. Oldenbourg, 1991. ISBN 3-486-21573-6.

J. Betten. *Tensorrechnung für Ingenieure*. B. G. Teubner, 1987. ISBN 3-519-02366-0.

J. Betten. *Kontinuumsmechanik*. Springer, 2001. ISBN 3-540-42043-6.

J. Betten. *Finite Elemente für Ingenieure 2*. Springer, 2004. ISBN 3-540-20447-4.

J. Betten. *Creep Mechanics*. Springer, 2005. ISBN 3-540-23204-4.

R. Bhavsar, R. Raj, und R. Parmar. Studies of sedimentation behaviour of high pigmented alkyd primer: A rheological approach. *Progress in Organic Coatings*, 76(5):852–857, 2013.

R. Bhavsar, N. Y. Vaidya, P. Ganguly, A. Humphreys, A. Robisson, H. Tu, N. Wicks, G. H. McKinley, und F. Pauchet. Intelligence in novel materials. *Oilfield Review*, 20(1):32–41, 2008.

E. C. Bingham. *Fluidity and Plasticity*. McGraw-Hill, 1922. ISBN 1113151803.

R. B. Bird. *Dynamics of polymeric liquids*. Wiley, 1987. ISBN 0-471-80245-X.

R. B. Bird, G. Dai, und B. J. Yarusso. The rheology and flow of viscoplastic materials. *Reviews in chemical engineering*, 1(1):1–70, 1983.

R. P. Blakemore und R. B. Frankel. Magnetische Bakterien – lebende Kompaßnadeln. *Spektrum der Wissenschaft*, 1(2):38–49, 1982.

G. Böhme. *Strömungsmechanik nichtnewtonscher Fluide*. B. G. Teubner, 2000. ISBN 3-519-12354-1.

M. Boisly, J. Brummund, und V. Ulbricht. Analysing the large amplitude oscillatory shear of the CROSS and CROSS– MAXWELL models with the aid of FOURIER transform rheology using the example of a solvent-borne alkyd primer. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 225:10–27, 2015.

M. Boisly, J. Brummund, und V. Ulbricht. Analysing the large amplitude oscillatory shear response of a BINGHAM-HOOKE model in PIPKIN space and by FOURIER transform rheology to predict weak strain overshoots. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, XXX:XXX, 2017.

M. Boisly, M. Kästner, J. Brummund, und V. Ulbricht. General aspects of yield stress fluids – terminology and definition of viscosity. *Applied Rheology*, 24(1):14578, 2014a. Open Access.

M. Boisly, M. Kästner, J. Brummund, und V. Ulbricht. Large amplitude oscillatory shear of the PRANDTL element analysed by FOURIER transform rheology. *Applied Rheology*, 24(3):35478, 2014b. Open Access.

M. Boisly, S. Schuldt, M. Kästner, Y. Schneider, und H. Rohm. Experimental characterisation and numerical modelling of cutting processes in viscoelastic solids. *Journal of Food Engineering*, 191:1–9, 2016.

R. Bölter und H. Janocha. *Design rules for MR fluid actuators in different working modes*, volume Proc. SPIE 3045, 1997. Smart Structures and Materials 1997: Passive Damping and Isolation.

D. Bonn und M. M. Denn. Yield stress fluids slowly yield to analysis. *Science*, 324(5933):1401–1402, 2009.

H. Böse. Neues Konzept zur ausfallsicheren Schwingungsdämpfung mit magnetorheologischen Flüssigkeiten. Frauenhofer ISC Jahresbericht, 2007.

H. Böse und J. Ehrlich. Performance of magnetorheological fluids in a novel damper with excellent failsafe behavior. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, 21(15):1537–1542, 2010.

H. Böse, T. Gerlach, und J. Ehrlich. Magnetorheological torque transmission devices with permanent magnets. *Journal of Physics: Conference Series*, 412(1):012050, 2013.

G. Bossis, Y. Grasselli, E. Lemaire, J. Persello, und L. Petit. Phase separation and flow-induced anisotropy in electrorheological fluids. *Europhysics Letters*, 25(5):335–340, 1994.

G. Bossis, S. Lacis, A. Meunier, und O. Volkova. Magnetorheological fluids. *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, 252(252):224–228, 2002.

G. Bossis, E. Lemaire, O. Volkova, und H. Clercx. Yield stress in magnetorheological and electrorheological fluids: A comparison between microscopic and macroscopic structural models. *Journal of Rheology*, 41(3):687–704, 1997.

A. F. Bower. *Applied mechanics of solids*. Taylor & Francis CRC Press, 2010. ISBN 978-1-4398-0247-2.

J. M. Brader. Nonlinear rheology of colloidal dispersions. *Journal of Physics: Condensed Matter*, 22 (36):363101, 2010.

J. M. Brader, M. Siebenbürger, M. Ballauff, K. Reinheimer, M. Wilhelm, S. J. Frey, F. Weysser, und M. Fuchs. Nonlinear response of dense colloidal suspensions under oscillatory shear: Mode-coupling theory and fourier transform rheology experiments. *Physical Review E*, 82(6):061401, 2010.

S. Brandt und H. D. Dahmen. *Elektrodynamik*. Springer, 2005. ISBN 3-540-21458-5.

I. Brigadnov und A. Dorfmann. Mathematical modeling of magnetorheological fluids. *Continuum Mechanics and Thermodynamics*, 17(1):29–42, 2005.

W. Brocks und D. Steglich. *Comprehensive Structural Integrity*, chapter: 10.5 Hybrid Methods, pages 107–136. Elsevier, 2007. ISBN 978-0-08-043749-1.

R. Brummer. *Rheological Essentials of Cosmetic and Food Emulsions*. Springer, 2006. ISBN 3-540-25553-2.

R. Brummer. *Product design and engineering*, chapter: Rheology of cosmetic emulsions, pages 51–74. Wiley, 2013. ISBN 978-3-527-33220-5.

J. Brummund. Persönliche Mitteilung. Technische Universität Dresden.

P. Brunn und H. Asoud. Analysis of shear rheometry of yield stress materials and apparent yield stress materials. *Rheologica Acta*, 41(6):524–531, 2002.

R. Bustamante, A. Dorfmann, und R. Ogden. A nonlinear magnetoelastic tube under extension and inflation in an axial magnetic field: numerical solution. *Journal of Engineering Mathematics*, 59(1):139–153, 2007.

T. Butz und O. von Stryk. Modelling and simulation of electro- and magnetorheological fluid dampers. *ZAMM - Journal of Applied Mathematics and Mechanics / Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, 82(1):3–20, 2002.

A. Calin, M. Wilhelm, und C. Balan. Determination of the non-linear parameter (mobility factor) of the giesekus constitutive model using laos procedure. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 165 (23–24):1564–1577, 2010.

D. Carlson, B. Marjoram, J. Toscano, D. Leroy, K. Burson, K. S. Clair, A. Kintz, und A. Achen. Magnetorheological technology and applications. Lord Corporation, 2007.

J. D. Carlson. Low-cost mr fluid sponge devices. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, 10(8):589–594, 1999.

J. D. Carlson. What makes a good mr fluid? *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, 13(7–8):431–435, 2002.

J. D. Carlson und M. R. Jolly. Mr fluid, foam and elastomer devices. *Mechatronics*, 10(4–5):555–569, 2000.

P. J. Carreau, P.-A. Lavoie, und F. Yziquel. *Advances in the flow and rheology of non-newtonian fluids*, chapter: 10.2 Rheological properties of concentrated suspensions, pages 1299–1345. Elsevier, 1999. ISBN 0-444-82679-3.

E. Carretti, L. Dei, und R. G. Weiss. Soft matter and art conservation. rheoreversible gels and beyond. *Soft Matter*, 1(1):17–22, 2005.

V. Carrier und G. Petekidis. Nonlinear rheology of colloidal glasses of soft thermosensitive microgel particles. *Journal of Rheology*, 53(2):245–273, 2009.

R. A. Carrigan Jr. und W. P. Trower. Die Suche nach den magnetischen Monopolen. *Spektrum der Wissenschaft*, 1:78–87, 1982.

J. P. Celli, B. S. Turner, N. H. Afdhal, R. H. Ewoldt, G. H. McKinley, R. Bansil, und S. Erramilli. Rheology of gastric mucin exhibits a ph-dependent sol–gel transition. *Biomacromolecules*, 8(5):1580–1586, 2007.

J. Chaboche. A review of some plasticity and viscoplasticity constitutive theories. *International Journal of Plasticity*, 24(10):1642–1693, 2008.

A. Chaudhuri, N. M. Wereley, R. Radhakrishnan, und S. B. Choi. Rheological parameter estimation for a ferrous nanoparticle-based magnetorheological fluid using genetic algorithms. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, 17(3):261–269, 2006.

K. Chen und C. Yeh. A mixture model for magneto-rheological materials. *Continuum Mechanics and Thermodynamics*, 14(6):495–510, 2002a.

K. C. Chen und C. S. Yeh. Extended irreversible thermodynamics approach to magnetorheological fluids. *Journal of Non-Equilibrium Thermodynamics*, 26(4):355–372, 2001.

K. C. Chen und C. S. Yeh. Description of magnetorheological behavior with internal variables. *International Journal of Engineering Science*, 40(4):461–482, 2002b.

D. C.-H. Cheng. Yield stress: A time-dependent property and how to measure it. *Rheologica Acta*, 25(5): 542–554, 1986.

R. P. Chhabra und J. Richardson. *Non-newtonian flow and applied rheology*. Elsevier, 2008. ISBN 978-0-7506-8532-0.

K. S. Cho, K. Hyun, K. H. Ahn, und S. J. Lee. A geometrical interpretation of large amplitude oscillatory shear response. *Journal of Rheology*, 49(3):747–758, 2005.

Y. T. Choi, J. U. Cho, S. B. Choi, und N. M. Wereley. Constitutive models of electrorheological and magnetorheological fluids using viscometers. *Smart Materials and Structures*, 14(5):1025–1036, 2005.

C. Christopoulou, G. Petekidis, B. Erwin, M. Cloitre, und D. Vlassopoulos. Ageing and yield behaviour in model soft colloidal glasses. *Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 367(1909):5051–5071, 2009.

M. J. Chrzan und J. D. Carlson. Mr fluid sponge devices and their use in vibration control of washing machines. *SPIE*, 4331(1):370–378, 2001.

K. Chu und A. Yu. Numerical simulation of complex particle–fluid flows. *Powder Technology*, 179(3): 104–114, 2008.

J. Claracq, J. Sarrazin, und J.-P. Montfort. Viscoelastic properties of magnetorheological fluids. *Rheologica Acta*, 43(1):38–49, 2004.

B. D. Coleman, H. Markovitz, und W. Noll. *Viscometric flows of Non-Newtonian fluids*. Springer, 1966. ASIN B0000BQE88.

P. Coussot. *Rheometry of pastes, suspensions, and granular materials*. Wiley, 2005. ISBN 978-0-471-65369-1.

P. Coussot und C. Ancey. Rheophysical classification of concentrated suspensions and granular pastes. *Physical Review E*, 59(4):4445–4457, 1999.

P. Coussot und S. Boyer. Determination of yield stress fluid behaviour from inclined plane test. *Rheologica Acta*, 34(6):534–543, 1995.

P. Coussot und F. Gaulard. Gravity flow instability of viscoplastic materials: The ketchup drip. *Physical Review E*, 72:031409, 2005.

P. Coussot, Q. D. Nguyen, H. T. Huynh, und D. Bonn. Avalanche behavior in yield stress fluids. *Physical Review Letters*, 88(17):175501, 2002a.

P. Coussot, Q. D. Nguyen, H. T. Huynh, und D. Bonn. Viscosity bifurcation in thixotropic, yielding fluids. *Journal of Rheology*, 46(3):573–589, 2002b.

P. Coussot, L. Tocquer, C. Lanos, und G. Ovarlez. Macroscopic vs. local rheology of yield stress fluids. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 158(1–3):85–90, 2009.

F. Da Cruz, F. Chevoir, D. Bonn, und P. Coussot. Viscosity bifurcation in granular materials, foams, and emulsions. *Physical Review E*, 66(5):051305, 2002.

W. Dahmen und A. Reusken. *Numerik für Ingenieure und Naturwissenschaftler*. Springer, 2008. ISBN 978-3-540-76492-2.

C. Daniel, I. W. Hamley, M. Wilhelm, und W. Mingvanish. Non-linear rheology of a face-centred cubic phase in a diblock copolymer gel. *Rheologica Acta*, 40(1):39–48, 2001.

L. C. Davis. Polarization forces and conductivity effects in electrorheological fluids. *Journal of Applied Physics*, 72(4):1334–1340, 1992.

P. R. de Souza Mendes. Modeling the thixotropic behavior of structured fluids. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 164(1–3):66–75, 2009.

P. R. de Souza Mendes. Thixotropic elasto-viscoplastic model for structured fluids. *Soft Matter*, 7:2471–2483, 2011.

P. R. de Souza Mendes und E. S. Dutra. Viscosity function for yield-stress liquids. *Applied Rheology*, 14: 296–302, 2004.

J. M. Dealy und K. F. Wissbrun. *Melt rheology and its role in plastics processing*. Van Nostrand Reinhold, 1990. ISBN 0-442-22099-5.

B. Debbaut und H. Burhin. Large amplitude oscillatory shear and fourier-transform rheology for a high-density polyethylene: Experiments and numerical simulation. *Journal of Rheology*, 46(5):1155–1176, 2002.

N. Deen, M. Van Sint Annaland, M. Van der Hoef, und J. Kuipers. Review of discrete particle modeling of fluidized beds. *Chemical Engineering Science*, 62(1–2):28–44, 2007.

Delphi Corporation. Delphi magneride$^{\mathrm{TM}}$. 2005.

M. W. Denny und J. M. Gosline. The physical properties of the pedal mucus of the terrestrial slug, ariolimax-columbianus. *Journal of Experimental Biology*, 88(1):375–393, 1980.

C. Derec, G. Ducouret, A. Ajdari, und F. m. c. Lequeux. Aging and nonlinear rheology in suspensions of polyethylene oxide–protected silica particles. *Physical Review E*, 67:061403, Jun 2003.

S. S. Deshmukh. *Development, characterization and applications of magnetorheological fluid based ßmart"materials on the macro-to-micro scale*. PhD thesis, Massachusetts Institute of Technology, 2007.

S. S. Deshmukh und G. H. McKinley. Adaptive energy-absorbing materials using field-responsive fluid-impregnated cellular solids. *Smart Materials and Structures*, 16(1):106–113, 2007.

A. P. Deshpande, J. M. Krishnan, und P. B. S. Kumar. *Rheology of complex fluids*. Springer, 2010. ISBN 978-1-4419-6493-9.

J. F. Desrosiers, J. P. L. Bigue, M. Denninger, G. Julio, J. S. Plante, und F. Charron. Preliminary investigation of magneto-rheological fluid durability in continuous slippage clutch. *Journal of Physics: Conference Series*, 412(1):012022, 2013.

W. Dettmer und S. Reese. On the theoretical and numerical modelling of armstrong–frederick kinematic hardening in the finite strain regime. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 193(1–2):87–116, 2004.

M. Dick, U. Hackenberg, und D. Isgen. The Audi R8. *ATZ worldwide*, 109(2):2–7, 2007.

C. J. Dimitriou, L. Casanellas, T. J. Ober, und G. H. McKinley. Rheo-piv of a shear-banding wormlike micellar solution under large amplitude oscillatory shear. *Rheologica Acta*, 51(5):395–411, 2012.

C. J. Dimitriou, R. H. Ewoldt, und G. H. McKinley. Describing and prescribing the constitutive response of yield stress fluids using large amplitude oscillatory shear stress (laostress). *Journal of Rheology*, 57 (1):27–70, 2013.

DIN. Linear-viskoelastische Stoffe, April 1994. DIN 13343.

DIN. Viskosität Teil 1: Rheologische Begriffe, November 2003a. DIN 1342-1.

DIN. Viskosität Teil 2: Newtonsche Flüssigkeiten, November 2003b. DIN 1342-2.

DIN. Viskosität Teil 3: Nicht-newtonsche Flüssigkeiten, November 2003c. DIN 1342-3.

DIN. Elektrorheologische Suspensionen – Anforderungen, Prüfung und Anwendung – Teil 1: Grundlagen und feldstärkeunabhängige Eigenschaften, April 2011a. DIN 51480–1.

DIN. Prüfung von Schmierstoffen – Prüfung der rheologischen Eigenschaften von Schmierfetten, Teil 2: Bestimmung der Fließgrenze mit dem Oszillationsrheometer und dem Messsystem Platte/Platte, April 2011b. DIN 51810–2.

DIN–Taschenbuch 398. *Rheologie*. Beuth, 2012. ISBN 978-3-410-23243-8.

J. C. Dixon. *The Shock Absorber Handbook*. Wiley, 2007. ISBN 978-0-470-51020-9.

J. S. Dodge und I. M. Krieger. Oscillatory shear of nonlinear fluids i. preliminary investigation. *Transactions of the Society of Rheology*, 15(4):589–601, 1971.

E. Dohmen, M. Boisly, D. Borin, M. Kästner, V. Ulbricht, M. Gude, W. Hufenbach, G. Heinrich, und S. Odenbach. Advancing towards polyurethane-based magnetorheological composites. *Advanced Engineering Materials*, 19(10):1270–1275, 2014.

E. Dohmen, M. Obst, C. Lux, F. Adam, M. Kästner, M. S. Khan, D. Borin, W. Hufenbach, M. Gude, V. Ulbricht, G. Heinrich, und S. Odenbach. *ECEMP – Multicomponent Materials with an Extended Potential for Hightech Applications in Mechanical Engineering, Plant Constructions and Automotive Industry*, chapter: Towards a novel composite material with magnetorheological switchable stiffness, pages 205–2016. GWT-TUD GmbH, 2010. ISBN 978-3-942267-14-4.

D. Doraiswamy, A. N. Mujumdar, I. Tsao, A. N. Beris, S. C. Danforth, und A. B. Metzner. The cox–merz rule extended: A rheological model for concentrated suspensions and other materials with a yield stress. *Journal of Rheology*, 35(4):647–685, 1991.

H.-D. Dörfler. *Grenzflächen und kolloid-disperse Systeme*. Springer, 2002. ISBN 3-540-42547-0.

A. Dorfmann und I. Brigadnov. Constitutive modelling of magneto-sensitive cauchy-elastic solids. *Computational Materials Science*, 29(3):270–282, 2004.

A. Dorfmann und R. Ogden. Magnetoelastic modelling of elastomers. *European Journal of Mechanics - A/Solids*, 22(4):497–507, 2003.

A. Dorfmann und R. Ogden. Nonlinear magnetoelastic deformations of elastomers. *Acta Mechanica*, 167 (1–2):13–28, 2004a.

A. Dorfmann und R. Ogden. Some problems in nonlinear magnetoelasticity. *ZAMP - Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik*, 56(4):718–745, 2005.

A. Dorfmann, R. Ogden, und G. Saccomandi. Universal relations for non-linear magnetoelastic solids. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 39(10):1699–1708, 2004.

A. Dorfmann, R. Ogden, und A. Wineman. A three-dimensional non-linear constitutive law for magnetorheological fluids, with applications. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 42(2):381–390, 2007.

A. Dorfmann und R. W. Ogden. Nonlinear magnetoelastic deformations. *The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*, 57(4):599–622, 2004b.

D. D. dos Santos, S. Frey, M. F. Naccache, und P. de Souza Mendes. Numerical approximations for flow of viscoplastic fluids in a lid-driven cavity. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 166(12–13): 667–679, 2011.

T. Dötsch, M. Pollard, und M. Wilhelm. Kinetics of isothermal crystallization in isotactic polypropylene monitored with rheology and fourier-transform rheology. *Journal of Physics: Condensed Matter*, 15 (11):S923–S931, 2003.

D. Du und H.-D. Tscheuschner. Mechanische Modelle zur Beschreibung des Deformationsverhaltens von Lebensmitteln und ihre Klassifizierung. *Technische Mechanik*, 7(4):43–50, 1986.

N. Q. Dzuy und D. V. Boger. Yield stress measurement for concentrated suspensions. *Journal of Rheology*, 27(4):321–349, 1983.

F. Ebert. *Strömung nicht-newtonscher Medien*. Vieweg, 1980. ISBN 3-528-03339-8.

C. Eck, H. Garcke, und P. Knabner. *Mathematische Modellierung*. Springer, 2008. ISBN 978-3-540-74967-7.

G. W. Ehrenstein. *Polymerwerkstoffe*. Hanser, 1999. ISBN 3-446-21161-6.

C. Ekwebelam und H. See. Microstructural investigations of the yielding behaviour of bidisperse magnetorheological fluids. *Rheologica Acta*, 48(1):19–32, 2009.

I. Emri und N. W. Tschoegl. Generating line spectra from experimental responses. iii. interconversion between relaxation and retardation behavior. *International Journal of Polymeric Materials*, 18(1): 117–127, 1992.

I. Emri und N. W. Tschoegl. Generating line spectra from experimental responses. part i: Relaxation modulus and creep compliance. *Rheologica Acta*, 32(3):311–322, 1993a.

I. Emri und N. W. Tschoegl. Generating line spectra from experimental responses. part ii: Storage and loss functions. *Rheologica Acta*, 32(3):322–327, 1993b.

I. Emri und N. W. Tschoegl. Generating line spectra from experimental responses. part iv: Application to experimental data. *Rheologica Acta*, 33(1):60–70, 1994.

A. C. Eringen. *Nonlinear Theory of Continuous Media*. McGraw-Hill, 1962. ISBN 0070195803.

A. C. Eringen. *Mechanics of Continua*. Robert E. Krieger Publishing Company, 1980. ISBN 0-88275-663-X.

A. C. Eringen und G. A. Maugin. *Electrodynamics of Continua I Foundations and Solid Media*. Springer, 1990a. ISBN 0-387-96936-5.

A. C. Eringen und G. A. Maugin. *Electrodynamics of Continua II Fluids and complex Media*. Springer, 1990b. ISBN 0-387-97005-3.

M. Escudier, I. Gouldson, A. Pereira, F. Pinho, und R. Poole. On the reproducibility of the rheology of shear-thinning liquids. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 97(2–3):99–124, 2001.

R. H. Ewoldt. *Rheology of complex fluid films for biological and mechanical adhesive locomotion*. Master's thesis, Massachusetts institute of technology, 2006.

R. H. Ewoldt. *Nonlinear viscoelastic materials: bioinspired applications and new characterization measures*. PhD thesis, Massachusetts Institue of Technology, 2009.

R. H. Ewoldt. Defining nonlinear rheological material functions for oscillatory shear. *Journal of Rheology*, 57(1):177–195, 2013.

R. H. Ewoldt, C. Clasen, A. E. Hosoi, und G. H. McKinley. Rheological fingerprinting of gastropod pedal mucus and synthetic complex fluids for biomimicking adhesive locomotion. *Soft Matter*, 3(5):634–643, 2007a.

R. H. Ewoldt, A. E. Hosoi, und G. H. McKinley. *Rheology of mucin films for molluscan adhesive locomotion*, 2006. 231st American Chemical Society National Meeting.

R. H. Ewoldt, A. E. Hosoi, und G. H. McKinley. Rheological fingerprinting of complex fluids using large amplitude oscillatory shear (laos) flow. *Annual Transactions of the Nordic Rheology Society*, 15: 3–8, 2007b.

R. H. Ewoldt, A. E. Hosoi, und G. H. McKinley. New measures for characterizing nonlinear viscoelasticity in large amplitude oscillatory shear. *Journal of Rheology*, 52(6):1427–1458, 2008a.

R. H. Ewoldt, A. E. Hosoi, und G. H. McKinley. An ontology for large amplitude oscillatory shear flow. *AIP Conference Proceedings*, 1027(1):1135–1137, 2008b.

R. H. Ewoldt, A. E. Hosoi, und G. H. McKinley. Nonlinear viscoelastic biomaterials: meaningful characterization and engineering inspiration. *Integrative and Comparative Biology*, 49(1):40–50, 2009.

R. H. Ewoldt, P. Winter, J. Maxey, und G. H. McKinley. Large amplitude oscillatory shear of pseudoplastic and elastoviscoplastic materials. *Rheologica Acta*, 49(2):191–212, 2010.

A. H. Falah, W. W. Clark, und P. P. Phule. *Modeling of a magnetorheological fluid damper with parallel plate behavior*, volume Proc. SPIE 3327, 1998. Smart Structures and Materials 1998: Passive Damping and Isolation.

A. Fall, F. Bertrand, G. Ovarlez, und D. Bonn. Shear thickening of cornstarch suspensions. *Journal of Rheology*, 56(3):575–591, 2012.

A. Fall, J. Paredes, und D. Bonn. Yielding and shear banding in soft glassy materials. *Physical Review Letters*, 105(22):225502, 2010.

G. Fasching. *Werkstoffe für die Elektrotechnik*. Springer, 4. auflage edition, 2005. ISBN 3-211-22133-6.

D. W. Felt, M. Hagenbuchle, J. Liu, und J. Richard. Rheology of a magnetorheological fluid. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, 7(5):589–593, 1996.

J. D. Ferry. *Viscoelastic properties of polymers*. John Wiley & Sons, 1980. ISBN 0-471-04894-1.

L. Figura. *Lebensmittelphysik*. Springer, 2004. ISBN 3-540-20337-0.

H. Fischer, H. Hofmann, und J. Spindler. *Werkstoffe in der Elektrotechnik*. Hanser, 2007. ISBN 978-3-446-40707-7.

S. Flügge. *Elasticity and Plasticity*. Springer, 1958.

M. Freund und J. Ihlemann. Effiziente FEM-Adaption des Konzepts repräsentativer Raumrichtungen. *PAMM - Proceedings in Applied Mathematics and Mechanics*, 8(1):10423–10424, 2008.

M. Freund und J. Ihlemann. Generalization of one-dimensional material models for the finite element method. *ZAMM - Journal of Applied Mathematics and Mechanics / Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, 90(5):399–417, 2010.

M. Freund, J. Ihlemann, H. Lorenz, D. Juhre, und M. Klüppel. FE-Implementierung des Dynamischen Flockulationsmodells zur Simulation des inelastischen Verhaltens gefüllter Elastomere. *Kautschuk Gummi Kunststoffe*, April:50–55, 2011a.

M. Freund, H. Lorenz, D. Juhre, J. Ihlemann, und M. Klüppel. Finite element implementation of a microstructure-based model for filled elastomers. *International Journal of Plasticity*, 27(6):902–919, 2011b.

R. W. Freund und R. H. Hoppe. *Stoer/Bulirsch: Numerische Mathematik 1*. Springer, 2007. ISBN 978-3-540-45389-5.

M. Fuchs und M. E. Cates. Schematic models for dynamic yielding of sheared colloidal glasses. *Faraday Discussions*, 123:267–286, 2003.

F. Galindo-Rosales, F. Rubio-Hernandez, A. Sevilla, und R. Ewoldt. How dr. malcom m. cross may have tackled the development of än apparent viscosity function for shear thickening fluids". *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 166(23–24):1421–1424, 2011.

D. R. Gamota und F. E. Filisko. Dynamic mechanical studies of electrorheological materials: Moderate frequencies. *Journal of Rheology*, 35(3):399–425, 1991.

D. R. Gamota, A. S. Wineman, und F. E. Filisko. Fourier transform analysis: Nonlinear dynamic response of an electrorheological material. *Journal of Rheology*, 37(5):919–933, 1993.

F. Gandhi und W. A. Bullough. On the phenomenological modeling of electrorheological and magnetorheological fluid preyield behavior. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, 16(3): 237–248, 2005.

S. N. Ganeriwala und C. A. Rotz. Fourier transform mechanical analysis for determining the nonlinear viscoelastic properties of polymers. *Polymer Engineering & Science*, 27(2):165–178, 1987.

B. J. d. Gans, H. Hoekstra, und J. Mellema. Non-linear magnetorheological behaviour of an inverse ferrofluid. *Faraday Discussions*, 112:209–224, 1999.

S. Genc und P. P. Phule. Rheological properties of magnetorheological fluids. *Smart Materials and Structures*, 11(1):140–146, 2002.

S. Gerlach. *Modellbildung und Parameteridentifikation viskoelastischer Faserverbundwerkstoffe*. Dissertation, Universität Kassel, 2003. ISBN 3-89958-515-1.

A. J. Giacomin, R. B. Bird, L. M. Johnson, und A. W. Mix. Large-amplitude oscillatory shear flow from the corotational maxwell model. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 166(19):1081–1099, 2011.

A. J. Giacomin und J. M. Dealy. *Techniques in rheological measurements*, chapter: 4 Large-Amplitude Oscillatory Shear, pages 99–121. Chapman and Hall, 1993. ISBN 0 412 53490 8.

A. J. Giacomin und J. G. Oakley. Structural network models for molten plastics evaluated in large amplitude oscillatory shear. *Journal of Rheology*, 36(8):1529–1546, 1992.

L. J. Gibson und M. F. Ashby. *Cellular solids: Structure and properties*. Cambridge University Press, 2. edition, 1997. ISBN 0-521-49560-1.

H. Giesekus. *Phänomenologische Rheologie*. Springer, 1994. ISBN 3-540-57513-8.

H. Giesekus und G. Langer. Die Bestimmung der wahren Fließkurven nicht-newtonscher Flüssigkeiten und plastischer Stoffe mit der Methode der repräsentativen Viskosität. *Rheologica Acta*, 16(1):1–22, 1977.

J. M. Ginder, L. C. Davis, und L. D. Elie. Rheology of magnetorheological fluids: Models and measurements. *International Journal of Modern Physics B*, 10(23–24):3293–3303, 1996.

B. Girod, R. Rabenstein, und A. Stenger. *Einführung in die Systemtheorie*. Teubner, 2005. ISBN 3-519-26194-4.

H. Göldner. *Lehrbuch Höhere Festigkeitslehre*, volume 2. VEB Fachbuchverlag Leipzig, 1989. ISBN 3-343-00496-0.

F. D. Goncalves. *Characterizing the Behaviour of Magnetorheological Fluids at high velocities and high shear rates*. PhD thesis, Virginia Polytechnic Institute and State University, 2005.

J. Götz, S. Huth, und H. Buggisch. Flow behavior of pastes with a deformation history dependent yield stress. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 103(2–3):149–166, 2002.

R. Greve. *Kontinuumsmechanik*. Springer, 2003. ISBN 3-540-00760-1.

D. Gross, W. Hauger, W. Schnell, und P. Wriggers. *Technische Mechanik 4*. Springer, 2004. ISBN 3-540-22099-2.

D. Güth, D. Ludwig, und J. Maas. Aktoren auf Basis magnetorheologischer Flüssigkeiten - auf dem Weg zum mechatronischen Produkt: Actuators based an magnetorheological fluids - on the way to a mechatronic product. In *Fachtagung Mechatronik*, pages 87–92. Mainz, Aachen, 2013a. ISBN 978-3-86130-958-1.

D. Güth, M. Schamoni, und J. Maas. Magnetic fluid control for viscous loss reduction of high-speed mrf brakes and clutches with well-defined fail-safe behavior. *Smart Materials & Structures*, 22:094010, 2013b.

D. Güth, A. Wiebe, und J. Maas. Design of shear gaps for high-speed and high-load mrf brakes and clutches. *Journal of Physics: Conference Series*, 412(1):012046, 2013c.

G. Haasemann. *Effektive mechanische Eigenschaften von Verbundwerkstoffen mit Biaxialverstärkung*. Dissertation, Technische Universität Dresden, 2008.

V. A. Hackley und C. F. Ferraris. The use of nomenclature in dispersion science and technology. *National Institute of Standards and Technology*, 960(3):1–64, 2001.

M. Hagenbüchle und J. Liu. Chain formation and chain dynamics in a dilute magnetorheological fluid. *Applied Optics*, 36(30):7664–7671, 1997.

H. G. Hahn. *Elastizitätstheorie*. B. G. Teubner, 1985. ISBN 3-519-02364-4.

T. C. Halsey. Electrorheological fluids. *Science*, 258(5083):761–766, 1992.

G. Hamel. *Mechanik der Kontinua*. Teubner, 1956.

D. C. Harris. *History of magnetorheological finishing*, volume 8016, 2011. SPIE. SPIE Vol. 8016.

J. Harris. *Rheology and non-Newtonian flow*. Longman, 1977. ISBN 0-582-46331 9.

J. Harris und K. Bogie. The experimental analysis of non-linear waves in mechanical systems. *Rheologica Acta*, 6(1):3–5, 1967.

S. Hartmann. *Lösung von Randwertaufgaben der Elastoplastizität, Ein Finite Elemente Konzept für nichtlineare kinematische Verfestigung bei kleinen und finiten Verzerrungen*. Dissertation, Universität Gesamthochschule Kassel, 1993.

E. N. Harvey. Effect of magnetic fields on the rheology of ferromagnetic dispersions. *Journal of Colloid Science*, 8(5):543–547, 1953.

P. Haupt. *Viskoelastizität und Plastizität*. Springer, 1977. ISBN 3-540-07730-8.

P. Haupt. Dynamische Systeme mit geschwindigkeitsunabhängiger Dämpfung. *ZAMM - Journal of Applied Mathematics and Mechanics / Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, 71(4):T55–T57, 1991.

P. Haupt. On the mathematical modelling of material behavior in continuum mechanics. *Acta Mechanica*, 100(3-4):129–154, 1993.

P. Haupt. *Continuum Mechanics and Theory of Materials*. Springer, second edition, 2002. ISBN 3-540-43111-X.

P. Haupt und A. Lion. Experimental identification and mathematical modeling of viscoplastic material behavior. *Continuum Mechanics and Thermodynamics*, 7(1):73–96, 1995.

M. E. Helgeson, N. J. Wagner, und D. Vlassopoulos. Viscoelasticity and shear melting of colloidal star polymer glasses. *Journal of Rheology*, 51(2):297–316, 2007.

H. Henke. *Elektromagnetische Felder*. Springer, 2007. ISBN 978-3-540-71004-2.

E. Hering, R. Martin, und M. Stohrer. *Physik für Ingenieure*. Springer, 2007.

H. Herr und A. Wilkenfeld. User-adaptive control of a magnetorheological prosthetic knee. *Industrial Robot: An International Journal*, 30(1):42–55, 2003.

S. Hess, M. Kröger, und P. Fischer. *Bergmann · Schaefer; Lehrbuch der Experimentalphysiksik; Band 5 Gase, Nanosysteme, Flüssigkeiten*, chapter: Einfache und disperse Flüssigkeiten, pages 385–467. de Gruyter, 2006. ISBN 978-3-11-017484-7.

L. Heymann, S. Peukert, und N. Aksel. Investigation of the solid-liquid transition of highly concentrated suspensions in oscillatory amplitude sweeps rid b-4542-2009. *Journal of Rheology*, 46(1):93–112, 2002.

L. Hilliou, M. Wilhelm, M. Yamanoi, und M. P. Goncalves. Structural and mechanical characterization of κ/ι-hybrid carrageenan gels in potassium salt using fourier transform rheology. *Food Hydrocolloids*, 23 (8):2322–2330, 2009.

C. Hintze und G. Heinrich. *Curing studies of magnetorheological elastomers*, volume 180 th Technical Meeting of the ACS Rubber Division & Advanced Materials in Health Care 2011, 2011. ISBN 978-1-61839-311-1.

Q. Ho-Kim und X.-Y. Pham. *Elementary Particles and Their Interactions*. Springer, 1998. ISBN 3-540-63667-6.

R. Hoffmann. *Signalanalyse und Signalerkennung*. Springer, 1998. ISBN 3-540-63443-6.

R. Hoffmann. *Grundlagen der Frequenzanalyse*. Expert, 2005. ISBN 3-8169-2447-6.

R. Höhler und S. Cohen-Addad. Rheology of liquid foam. *Journal of Physics: Condensed Matter*, 17 (41):R1041, 2005.

G. A. Holzapfel. *Nonlinear solid mechanics*. John Wiley & Sons, 2000. ISBN 0-471-82319-8.

M. Hörmann. *Nichtlineare Versagensanalyse von Faserverbundwerkstoffen*. Dissertation, Universität Stuttgart, 2002. ISBN 3-00-010896-3.

G. T. Houlsby und A. M. Puzrin. *Principles of Hyperplasticity*. Springer, 2006. ISBN 9781846282393.

R. Houwink. *Elastizität, Plastizität und Struktur der Materie*. Steinkopff-Verlag, 1957. ASIN B002KJJ6F4.

D. M. Husband, N. Aksel, und W. Gleissle. The existence of static yield stresses in suspensions containing noncolloidal particles. *Journal of Rheology*, 37(2):215–235, 1993.

K. Hyun, E. S. Baik, K. H. Ahn, S. J. Lee, M. Sugimoto, und K. Koyama. Fourier-transform rheology under medium amplitude oscillatory shear for linear and branched polymer melts. *Journal of Rheology*, 51 (6):1319–1342, 2007.

K. Hyun, S. Hofl, S. Kahle, und M. Wilhelm. Polymer motion as detected via dielectric spectra of 1,4-cis-polyisoprene under large amplitude oscillatory shear (laos). *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 160(2–3):93–103, 2009.

K. Hyun, S. H. Kim, K. H. Ahn, und S. J. Lee. Large amplitude oscillatory shear as a way to classify the complex fluids. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 107(1):51–65, 2002.

K. Hyun, J. G. Nam, M. Wilhelm, K. H. Ahn, und S. J. Lee. Nonlinear response of complex fluids under laos (large amplitude oscillatory shear) flow. *Korea-Australia Rheology Journal*, 15(2):97–105, 2003.

K. Hyun und M. Wilhelm. Establishing a new mechanical nonlinear coefficient q from ft-rheology: First investigation of entangled linear and comb polymer model systems. *Macromolecules*, 42(1):411–422, 2009.

K. Hyun, M. Wilhelm, C. O. Klein, K. S. Cho, J. G. Nam, K. H. Ahn, S. J. Lee, R. H. Ewoldt, und G. H. McKinley. A review of nonlinear oscillatory shear tests: Analysis and application of large amplitude oscillatory shear (laos). *Progress in Polymer Science*, 36(12):1697–1753, 2011.

P. Ilg, M. Kröger, und S. Hess. Magnetoviscosity of semidilute ferrofluids and the role of dipolar interactions: Comparison of molecular simulations and dynamical mean-field theory. *Physical Review E*, 71 (3):031205, 2005.

A. A. Ilyushin. On the relation between stresses and small strains in the mechanics of continua. *Prikladnaja matematika i mechanika (Prikl. Math. Mekh.)*, 18:641–666, 1954. original paper in russian language: [А. А. Ильюшин. О Связи между напряжениями и малыми деформациями в механике сплошных сред. Прикладная математика и механика, 18:641–666, 1954].

J. D. Jackson. *Klassische Elektrodynamik*. de Gruyter, 2006. ISBN 3-11-018970-4.

A. E. James, D. J. A. Williams, und P. R. Williams. Direct measurement of static yield properties of cohesive suspensions. *Rheologica Acta*, 26(5):437–446, 1987.

K.-I. Jang, J. Seok, B.-K. Min, und S. J. Lee. Behavioral model for magnetorheological fluid under a magnetic field using lekner summation method. *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, 321 (9):1167–1176, 2009.

H. Janocha. Mechatronische Produkte verbessern Sicherheit und Komfort in Kraftfahrzeugen. *Magazin Forschung Universität des Saarlandes*, 1:2–8, 2006.

D. Jeon, C. Park, und K. Park. Vibration suppression by controlling an mr damper. *International Journal of Modern Physics B*, 13(14–16):2221–2228, 1999.

R. S. Jeyaseelan und A. Giacomin. Best fit for differential constitutive model parameters to non-linear oscillation data. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 47:267–280, 1993.

R. S. Jeyaseelan und A. J. Giacomin. Network theory for polymer solutions in large amplitude oscillatory shear. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 148(1):24–32, 2008.

M. R. Jolly, J. W. Bender, und J. D. Carlson. Properties and applications of commercial magnetorheological fluids. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, 10(1):5–13, 1999a.

M. R. Jolly, J. W. Bender, und R. T. Mathers. Indirect measurements of microstructure development in magnetorheological fluids. *International Journal of Modern Physics B*, 13(14–16):2036–2043, 1999b.

M. R. Jolly, J. D. Carlson, und B. C. Munoz. A model of the behaviour of magnetorheological materials. *Smart Materials & Structures*, 5(5):607–614, 1996.

D. A. R. Jones, B. Leary, und D. V. Boger. The rheology of a concentrated colloidal suspension of hard spheres. *Journal of Colloid and Interface Science*, 147(2):479–495, 1991.

R. A. L. Jones. *Soft Condensed Matter*. Oxford University Press, 2002. ISBN 978-0-19-850589-1.

I. Kadachevitch. *Modellierung der zyklischen Verfestigung unter Verwendung eines Mehrflächenmodells der Plastizität mit kinematischen Bindungen einschließlich der Parameterbestimmung*. Dissertation, Technischen Universität Chemnitz, 2003.

J. Kaleta und D. Lewandowski. Inelastic properties of magnetorheological composites: I. fabrication, experimental tests, cyclic shear properties. *Smart Materials and Structures*, 16(5):1948–1953, 2007.

J. Kaleta, D. Lewandowski, R. Mech, und P. Gasior. Magnetomechanical properties of terfenol-d powder composites. *Solid State Phenomena*, 154(Smart Materials for Smart Devices and Structures):35–40, 2009.

J. Kaleta, D. Lewandowski, und G. Zietek. Inelastic properties of magnetorheological composites: Ii. model, identification of parameters. *Smart Materials and Structures*, 16(5):1954–1960, 2007.

M. Kaliske. *Zur Theorie und Numerik von Polymerstrukturen unter statischen und dynamischen Einwirkungen*. Dissertation, Universität Hannover, 1995.

S. Kallus, N. Willenbacher, S. Kirsch, D. Distler, T. Neidhöfer, M. Wilhelm, und H. W. Spiess. Characterization of polymer dispersions by fourier transform rheology. *Rheologica Acta*, 40(6):552–559, 2001.

C. Kammer. *Untersuchung der endochronen Viskoplastizität und der endochronen Plastizität unter monotoner Belastungen und oszillatorischer Verzerrungen großer Amplituden (LAOS)*. Studienarbeit, Technische Universität Dresden, 2015. Betreuer: Dipl.-Ing. Martin Boisly (geb. Obst).

S. Kankanala und N. Triantafyllidis. On finitely strained magnetorheological elastomers. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 52(12):2869–2908, 2004.

C. Kardelky. *Dynamisches Verhalten von Elastomerwerkstoffen*. Dissertation, Universität Kassel, 2004. ISBN 3-89958-531-3.

M. Kästner. *Skalenübergreifende Modellierung und Simulation des mechanischen Verhaltens von textilverstärktem Polypropylen unter Nutzung der XFEM*. Dissertation, Technische Universität Dresden, 2010.

M. Kästner, S. Blobel, M. Obst, K. Thielsch, und V. Ulbricht. Experimental characterization of the viscoplastic material behaviour of thermosets and thermoplastics. *Applied Mechanics and Materials*, 24–25:195–200, 2010.

M. Kästner, M. Obst, J. Brummund, K. Thielsch, und V. Ulbricht. Inelastic material behavior of polymers – experimental characterization, formulation and implementation of a material model. *Mechanics of Materials*, 52:40–57, 2012.

M. Kästner, M. Obst, J. Brummund, und V. Ulbricht. Influence of the nonlinear matrix material behaviour on the effective properties of textile-reinforced thermoplastics. *PAMM - Proceedings in Applied Mathematics and Mechanics*, 9:341–342, 2009.

M. Kästner, M. Obst, K. Thielsch, J. Brummund, und V. Ulbricht. Computation of the effective nonlinear material behaviour of composites using x-fem - analysis of the matrix material behaviour. *PAMM - Proceedings in Applied Mathematics and Mechanics*, 8:10429–10430, 2008.

S. Kästner. *Vektoren, Tensor, Spinoren*. Akademie Verlag, 1964.

D. C. Kay. *Tensor Calculus*. McGraw-Hill, 2011. ISBN 978-0-07-175603-7.

J. Keck. *Zur Beschreibung finiter Deformationen von Polymeren: Experimente, Modellbildung, Parameteridentifikation und Finite-Elemente-Formulierung.* Dissertation, Universität Stuttgart, 1998.

M. Keentok. The measurement of the yield stress of liquids. *Rheologica Acta*, 21(3):325–332, 1982.

A. S. Khan und S. Huang. *Continuum Theory of Plasticity.* John Wiley & Sons, 1995. ISBN 978-0-471-31043-3.

R. Kienzler und R. Schröder. *Einführung in die höhere Festigkeitslehre.* Springer, 2009. ISBN 978-3-540-89324-0.

R. Kießling, R. Landgraf, R. Scherzer, und J. Ihlemann. Introducing the concept of directly connected rheological elements by reviewing rheological models at large strains. *International Journal of Solids and Structures*, 97–98:650–667, 2016.

S. Kirsch, N. Willenbacher, S. Kallus, M. Wilhelm, und H. Spieß. Characterization of polymer dispersions by fourier transform rheology. *Rheologica Acta*, 40:552–559, 2001.

D. Kittipoomwong, D. J. Klingenberg, und J. C. Ulicny. Dynamic yield stress enhancement in bidisperse magnetorheological fluids. *Journal of Rheology*, 49(6):1521–1538, 2005.

T. H. Kjeldsen. A contextualized historical analysis of the kuhn–tucker theorem in nonlinear programming: The impact of world war ii. *Historia Mathematica*, 27(4):331–361, 2000.

C. Klein, L. Hilliou, und M. Wilhelm. *Characterization of Model Dispersions by Fouriertransform-Rheology*, 2003. 3rd International Symposium on Food Rheology and Structure.

C. O. Klein, H. W. Spiess, A. Calin, C. Balan, und M. Wilhelm. Separation of the nonlinear oscillatory response into a superposition of linear, strain hardening, strain softening, and wall slip response. *Macromolecules*, 40(12):4250–4259, 2007.

Kletschkowski. Viskoplastische Materialmodellierung am Beispiel des Dichtungswerkstoffs Polytetrafluorethylen. *Technische Mechanik*, 21(3):227–241, 2001.

T. Kletschkowski, U. Schomburg, und A. Bertram. Endochronic viscoplastic material models for filled ptfe. *Mechanics of Materials*, 34(12):795–808, 2002a.

T. Kletschkowski, U. Schomburg, und A. Bertram. An inelastic material model for filled polytetrafluorethylen. *Archive of Applied Mechanics*, 72(4):293–299, 2002b.

T. Kletschkowski, U. Schomburg, und A. Bertram. An endochronic viscoplastic approach for materials with different behavior in tension and compression. *Mechanics of Time-Dependent Materials*, 8(2): 119–135, 2004.

T. Kletschkowski, U. Schomburg, und A. Bertram. A rate-dependent endochronic approach to thermoplastic materials: temperature and filler volume fraction dependence. *Mechanics of Materials*, 37(6): 687–704, 2005.

E. Klingbeil. *Tensorrechnung für Ingenieure.* Wissenschaftsverlag, 1993. ISBN 3-411-05197-3.

D. J. Klingenberg und C. F. Zukoski. Studies on the steady-shear behavior of electrorheological suspensions. *Langmuir*, 6(1):15–24, 1990.

R. Knausenberger. *Das mechanische Verhalten isotroper und anisotroper Werkstoffe mit nichtlinearen Eigenschaften.* Dissertation, Rheinisch Westfälische Technische Hoschschule Aachen, 1982.

H. Kolsch. Modellierung ung Identifikation von Metallkabeldämpfern. *ZAMM - Journal of Applied Mathematics and Mechanics / Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, 72(4): T33–T35, 1992.

H. Kolsch. *Schwingungsdämpfung durch statische Hysterese*. VDI-Verlag GmbH, 1993. ISBN 3-18-149011-3.

H. Kolsch und D. Ottl. Modellierung und numerische Simulation von Federelementen mit statischer Hysterese. In *Dynamische Probleme – Modellierung und Wirklichkeit –*, pages 111–126. Mitteilung des Curt–Riesch–Instituts– der Universitä Hannover, 1990.

H. Kolsch und D. Ottl. Simulation des mechanischen Verhaltens von Bauteilen mit statischer Hysterese. *Forschung im Ingenieurwesen*, 59(4):66–71, 1993.

E. Koos, W. Kannowade, und N. Willenbacher. Restructuring and aging in a capillary suspension. *Rheologica Acta*, 53(12):947–957, 2014.

E. Koos und N. Willenbacher. Capillary forces in suspension rheology. *Science*, 331(6019):897–900, 2011.

W. Kordonski und S. Gorodkin. Magnetorheological measurements with consideration for the internal magnetic field in samples. *Journal of Physics: Conference Series*, 149:012064, 2009. 11th Conference on Electrorheological Fluids and Magnetorheological Suspensions.

W. Kordonski, S. Gorodkin, und N. Zhuravski. Static yield stress in magnetorheological fluid. *International Journal of Modern Physics B*, 15(06n07):1078–1084, 2001.

W. I. Kordonski und D. Golini. Fundamentals of magnetorheological fluid utilization in high precision finishing. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, 10(9):683–689, 1999.

V. Kordonskii, S. Demchuk, und V. Kuz'min. Viscoelastic properties of magnetorheological fluids. *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*, 72(5):841–844, 1999.

W. Kordonsky. Magnetorheological effect as a base of new devices and technologies. *Journal of Magnetism and Magnetic Materials*, 122(1–3):395–398, 1993.

R. Kories und H. Schmidt-Walter. *Taschenbuch der Elektrotechnik*. Harri Deutsch, 2004. ISBN 3-8171-1734-5.

N. Koumakis, M. Laurati, S. U. Egelhaaf, J. F. Brady, und G. Petekidis. Yielding of hard-sphere glasses during start-up shear. *Physical Review Letters*, 108(9):098303, 2012.

N. Koumakis und G. Petekidis. Two step yielding in attractive colloids: transition from gels to attractive glasses. *Soft Matter*, 7(6):2456–2470, 2011.

A. Kowalczyk, B. Hochstein, P. Stähle, und N. Willenbacher. Characterization of complex fluids at very low frequency: Experimental verification of the strain rate-frequency superposition (srfs) method. *Applied Rheology*, 20:52340, 2010.

A. Krawietz. *Materialtheorie*. Springer, 1986. ISBN 3-540-15435-3.

R. Kreißig. *Einführung in die Plastizitätstheorie*. Fachbuchverlag Leipzig–Köln, 1992. ISBN 3-343-00790-0.

R. Kreißig und U. Benedix. *Höhere Technische Mechanik*. Springer, 2002. ISBN 3-211-83813-9.

I. M. Krieger und T.-F. Niu. A rheometer for oscillatory studies of nonlinear fluids. *Rheologica Acta*, 12 (4):567–571, 1973.

S. Krishnamurthy, A. Yadav, P. Phelan, R. Calhoun, A. Vuppu, A. Garcia, und M. Hayes. Dynamics of rotating paramagnetic particle chains simulated by particle dynamics, stokesian dynamics and lattice boltzmann methods. *Microfluidics and Nanofluidics*, 5(1):33–41, 2008.

M. Kröger. Simple models for complex nonequilibrium fluids. *Physics Reports*, 390(6):453–551, 2004.

M. Kröger. *Effekte der Physik und ihre Anwendungen*, chapter: Nicht-newtonsche Effekte in Fluiden, pages 564–568. Harri Deutsch, 2005a. ISBN 978-3817116829.

M. Kröger. *Models for polymeric and anisotropic liquids*. Springer, 2005b. ISBN 3-540-26210-5.

M. Kröger, P. Ilg, und S. Hess. Magnetoviscous model fluids. *Journal of Physics: Condensed Matter*, 15(15):S1403–S1423, 2003.

E. Kuhl. *Numerische Modelle für kohäsive Reibungsmaterialien*. Dissertation, Universität Stuttgart, 2000.

M. Kuna. *Numerische Beanspruchung von Rissen*. Vieweg+Teubner, 2010. ISBN 978-3-8348-1006-9.

P. Kuzhir, G. Bossis, und V. Bashtovoi. Effect of the orientation of the magnetic field on the flow of a magnetorheological fluid. i. plane channel. *Journal of Rheology*, 47(6):1373–1384, 2003a.

P. Kuzhir, G. Bossis, V. Bashtovoi, und O. Volkova. Effect of the orientation of the magnetic field on the flow of magnetorheological fluid. ii. cylindrical channel. *Journal of Rheology*, 47(6):1385–1398, 2003b.

P. Kuzhir, A. Gomez-Ramirez, M. Lopez-Lopez, G. Bossis, und A. Zubarev. Non-linear viscoelastic response of magnetic fiber suspensions in oscillatory shear. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 166(7–8):373–385, 2011a.

P. Kuzhir, A. Gomez-Ramirez, M. Lopez-Lopez, G. Bossis, und A. Zubarev. Non-linear viscoelastic response of magnetic fiber suspensions in oscillatory shear. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 166(7):373–385, 2011b.

R. S. Lakes. Foam structures with a negative poisson's ratio. *Science*, 235:1038–1040, 1987.

Lakeshore. Hardware reference manual - 7400 series - vsm system. 2004.

V. Läpple. *Einführung in die Festigkeitslehre*. Vieweg + Teubner, 2008. ISBN 978-3-8348-0426-6.

R. G. Larson. *The structure and rheology of complex fluids*. Oxford University Press, 1999. ISBN 0-19-512197-X.

J. Läuger und H. Stettin. Differences between stress and strain control in the non-linear behavior of complex fluids. *Rheologica Acta*, 49(9):909–930, 2010.

H. Laun und C. Gabriel. Measurement modes of the response time of a magneto-rheological fluid (mrf) for changing magnetic flux density. *Rheologica Acta*, 46(5):665–676, 2007.

H. M. Laun, C. Gabriel, und C. Kieburg. Magnetorheological fluid (mrf) in oscillatory shear and parameterization with regard to mr device properties. *Journal of Physics: Conference Series*, 149(15):012067, 2009. 11 th Conference on Electrorheological Fluids and Magnetorheological Suspensions.

H. M. Laun, C. Kormann, und N. Willenbacher. Rheometry on magnetorheological (mr) fields. i. steady shear flow in stationary magnetic fields. *Rheologica Acta*, 35(5):417–432, 1996.

H. M. Laun, G. Schmidt, C. Gabriel, und C. Kieburg. Reliable plate-plate mrf magnetorheometry based on validated radial magnetic flux density profile simulations. *Rheologica Acta*, 47(9):1049–1059, 2008.

M. Laurati, S. U. Egelhaaf, und G. Petekidis. Nonlinear rheology of colloidal gels with intermediate volume fraction. *Journal of Rheology*, 55(3):673–706, 2011.

A. Le Grand und G. Petekidis. Effects of particle softness on the rheology and yielding of colloidal glasses. *Rheologica Acta*, 47(5):579–590, 2008.

J. L. Leblanc. Fourier transform rheometry on gum elastomers. *Journal of Applied Polymer Science*, 89 (4):1101–1115, 2003.

E. Lemaire und G. Bossis. Yield stress and wall effects in magnetic colloidal suspensions. *Journal of Physics D: Applied Physics*, 24(8):1473–1477, 1991.

E. Lemaire, G. Bossis, und O. Volkova. Deformation and rupture mechanisms of er and mr fluids. *International Journal of Modern Physics B*, 10(23–24):3173–3180, 1996.

E. Lemaire, A. Meunier, G. Bossis, J. Liu, D. Felt, P. Bashtovoi, und N. Matoussevitch. Influence of the particle size on the rheology of magnetorheological fluids. *Journal of Rheology*, 39(5):1011–1020, 1995.

J. Lemaitre. *Handbook of Materials Behavior Models*. Elsevier Academic Press, 2001. ISBN 0124433413.

J. Lemaitre und J.-L. Chaboche. *Mechanics of solid materials*. Cambridge University Press, 1994. ISBN 521 47758 1.

M. Leukart. *Kombinierte anisotrope Schädigung und Plastizität bei kohäsiven Reibungsmaterialien*. Dissertation, Universität Stuttgart, 2005.

M. Lexis und N. Willenbacher. Einfluss der Flüssigkeitsviskosität auf das rheologische Verhalten von Schäumen. *Chemie Ingenieur Technik*, 85(8):1–8, 2013.

M. Lexis und N. Willenbacher. Yield stress and elasticity of aqueous foams from protein and surfactant solutions – the role of continuous phase viscosity and interfacial properties. *Colloids and Surfaces A: Physicochemical and Engineering Aspects*, 459:177–185, 2014.

W. Li, H. Du, G. Chen, S. Yeo, und N. Guo. Nonlinear viscoelastic properties of mr fluids under large-amplitude-oscillatory-shear. *Rheologica Acta*, 42(3):280–286, 2003.

W. H. Li, G. Chen, und S. H. Yeo. Viscoelastic properties of mr fluids. *Smart Materials & Structures*, 8 (4):460–468, 1999.

S. Lim und K. Ahn. Rheological properties of oil paints and their flow instabilities in blade coating. *Rheologica Acta*, 52(7):643–659, 2013.

A. Lion. *Materialeigenschaften der Viskoplastizität, Experimente, Modellbildung und Parameteridentifikation*. Dissertation, Universität Gesamthochschule Kassel, Institut für Mechanik, 1994.

A. Lion. A constitutive model for carbon black filled rubber: Experimental investigations and mathematical representation. *Continuum Mechanics and Thermodynamics*, 8(3):153–169, 1996.

A. Lion. A physically based method to represent the thermo-mechanical behaviour of elastomers. *Acta Mechanica*, 123(1):1–25, 1997.

A. Lion. Thixotropic behaviour of rubber under dynamic loading histories: Experiments and theory. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 46(5):895–930, 1998.

A. Lion. Constitutive modelling in finite thermoviscoplasticity: a physical approach based on nonlinear rheological models. *International Journal of Plasticity*, 16(5):469–494, 2000a.

A. Lion. *Thermomechanik von Elastomeren, Experimente und Materialtheorie*. Habilitation, Universität Gesamthochschule Kassel, 2000b. ISBN 3-89792-023-9.

M. J. Lissajous. Sur l'etude optique des mouvements vibratoires. *Annales de chimie et de physique*, 3 (51):147–242, 1857.

S. Lissek. *Die allgemeine Theorie Magnetischer Flüssigkeiten*. Dissertation, Universität Hannover, 2000.

A. J. Liu und S. R. Nagel. Nonlinear dynamics: Jamming is not just cool any more. *Nature*, 396(6706): 21–22, 1998.

A. J. Liu und S. R. Nagel. *Jamming and Rheology.* Taylor & Francis, 2001. ISBN 0-7484-0879-7.

I.-S. Liu. *Continuum Mechanics.* Springer, 2002. ISBN 3-540-43019-9.

A. S. Lodge. *Elastic Liquids.* Academic Press, 1964. ISBN 0124548504.

M. T. Lopez-Lopez, P. Kuzhir, und G. Bossis. Magnetorheology of fiber suspensions. i. experimental. *Journal of Rheology*, 53(1):115–126, 2009.

M. T. Lopez-Lopez, A. Zugaldia, A. Gomez-Ramirez, F. Gonzalez-Caballero, und J. D. G. Duran. Effect of particle aggregation on the magnetic and magnetorheological properties of magnetic suspensions. *Journal of Rheology*, 52(4):901–912, 2008.

M. T. Lopez-Lopez, A. Zugaldia, F. Gonzalez-Caballero, und J. D. G. Duran. Sedimentation and redispersion phenomena in iron-based magnetorheological fluids. *Journal of Rheology*, 50(4):543–560, 2006.

Lord Corporation. Mrf-132dg magneto-rheological fluid. 2011.

H. Lorenz, M. Freund, D. Juhre, J. Ihlemann, und M. Klüppel. Constitutive generalization of a microstructure-based model for filled elastomers. *Macromolecular Theory and Simulations*, 20(2): 110–123, 2011.

V. A. Lubarda. *Elastoplasticity Theory.* CRC Press, 2002. ISBN 0-8493-1138-1.

J. Lubliner. *Plasticity Theory.* Dover Publications, 2008. ISBN 978-0-486-46290-5.

D. G. Luenberger und Y. Ye. *Linear and nonlinear programming.* Springer, 2008. ISBN 978-0-387-74502-2.

H. Lutz und W. Wendt. *Taschenbuch der Regelungstechnik.* Harri Deutsch, 2005. ISBN 3-8171-1749-3.

H. Ly, F. Reitich, M. Jolly, H. Banks, und K. Ito. Simulations of particle dynamics in magnetorheological fluids. *Journal of Computational Physics*, 155(1):160–177, 1999.

J. Lyklema und J. van Olphen. Terminology and symbols in colloid and surface chemistry part 1.13. definitions, terminology and symbols for rheological properties. *Pure and Applied Chemistry*, 51: 1213–1218, 1979.

C. W. Macosko. *Rheology: Principles, Measurements, and Applications.* Wiley, 1994. ISBN 0471185752.

W. C. MacSporran und R. P. Spiers. The dynamic performance of the weissenberg rheogoniometer .1. small amplitude oscillatory shearing. *Rheologica Acta*, 21(2):184–192, 1982.

W. C. MacSporran und R. P. Spiers. The dynamic performance of the weissenberg rheogoniometer .3. large-amplitude oscillatory shearing-harmonic analysis. *Rheologica Acta*, 23(1):90–97, 1984.

F. Mahaut, X. Chateau, P. Coussot, und G. Ovarlez. Yield stress and elastic modulus of suspensions of noncolloidal particles in yield stress fluids. *Journal of Rheology*, 52(1):287–313, 2008.

A. Mälmeisters. *Mechanik der Polymerwerkstoffe.* Akademie Verlag, 1977.

L. E. Malvern. *Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium.* Prentice-Hall, 1969.

R. Markert. *Strukturdynamik (Maschinendynamik I).* Studienbrief, Technische Universität Darmstadt, 2006. Studienbrief.

J. E. Martin. Thermal chain model of electrorheology and magnetorheology. *Physical Review E*, 63(1): 011406, 2000.

J. E. Martin und R. A. Anderson. Chain model of electrorheology. *The Journal of Chemical Physics*, 104(12):4814–4827, 1996.

Z. Martinec. Continuum mechanics. Department of Geophysics Faculty of Mathematics and Physics Charles University in Prague, 2011.

L. Martinie, H. Buggisch, und N. Willenbacher. Apparent elongational yield stress of soft matter. *Journal of Rheology*, 57(2):627–646, 2013.

R. Mas und A. Magnin. Experimental validation of steady shear and dynamic viscosity relation for yield stress fluids. *Rheologica Acta*, 36(1):49–55, 1997.

T. Matsumoto, Y. Segawa, Y. Warashina, und S. Onogi. Nonlinear behavior of viscoelastic materials. ii. the method of analysis and temperature dependence of nonlinear viscoelastic functions. *Transactions of the Society of Rheology*, 17(1):47–62, 1973.

G. A. Maugin. *The thermomechanics of plasticity and fracture.* Cambridge University Press, 1992. ISBN 0 521 39476 7.

G. A. Maugin. *The thermomechanics of nonlinear Irreversible behaviors.* World Scientific, 1999. ISBN 981-02-3375-2.

G. A. Maugin und M. S. S. Chambon. *Electromagnetical interactions in deformable solids and structures*, chapter: Coupled magnetomechanical hysteresis effects: application to nondestructive testing, pages 255–264. Elsevier, 1987. ISBN 0 444 70231 8.

J. Maxey und B. Hughes. Thixotropy and yield stress behavior in drilling fluids. In *American Association of Drilling Engineers, Drilling Fluids Conference*, volume AADE-07-NTCE-37, 2007.

J. Maxey, B. Hughes, R. Ewoldt, P. Winter, und G. McKinley. Yield stress: What is the ”true” value? In *American Association of Drilling Engineers, Drilling Fluids Conference*, volume AADE-08-DF-HO-27, 2008.

J. C. Maxwell. *Theory of Heat.* Longmans, Green, and Co., 1899. ISBN 1116803488.

H. S. Melito, C. R. Daubert, und E. A. Foegeding. Creep and large amplitude oscillatory shear behavior of whey protein isolate/κ-carrageenan gels. *Applied Rheology*, 22(6):63691, 2012.

G. Menges, E. Haberstroh, W. Michaeli, und E. Schmachtenberg. *Werkstoffkunde Kunststoffe.* Hanser, 2002. ISBN-10: 3-446-21257-4; ISBN-13: 978-3-446-21257-2.

M. Merkel. *Eindimensionale Finite Elemente.* Springer, 2010. ISBN 978-3-642-04991-0.

T. G. Mezger. *Das Rheologie Handbuch.* Vincentz Network, 2010. ISBN 978-3-86630-863-3.

T. G. Mezger. *Angewandte Rheologie.* Anton Paar, 2015. ISBN 978-3-200-03652-9.

L. Michalowsky. *Magnettechnik.* Vulkan, 2006. ISBN 3-8027-2139-X.

C. Miehe. *Kanonische Modelle Multiplikativer Elasto-Plastizität. Thermodnamische Formulierung und Numerische Implementierung.* Habilitation, Universität Hannover, 1992.

O. Mildenberger. *System- und Signaltheorie.* Vieweg, 1989. ISBN 3-528-13039-3.

E. Mitsoulis. *Rheology Reviews 2007*, chapter: Flows of viscoplastic materials: Models and computations, pages 135 – 178. British Society of Rheology, 2007. ISBN 0954741463.

T. Mladenchev. *Modellierung des Filtrations- und Fließverhaltens von ultrafeinen, kompressiblen flüssigkeitsgesättigten Partickelpackungen.* Dissertation, Otto-von-Guericke-Universirät Magdeburg, 2007.

M. Mohebi, N. Jamasbi, und J. Liu. Simulation of the formation of nonequilibrium structures in magnetorheological fluids subject to an external magnetic field. *Physical Review E*, 54(5):5407–5413, 1996.

P. C. F. Moller, J. Mewis, und D. Bonn. Yield stress and thixotropy: on the difficulty of measuring yield stresses in practice. *Soft Matter*, 2(4):274–283, 2006.

F. A. Morrison. *Understanding Rheology*. Oxford University Press, 2001. ISBN 0-19-514166-0.

I. D. Morrison und S. Ross. *Colloidal Dispersions*. Wiley-Interscience, 2002. ISBN 0-471-17625-7.

MSC.Marc®. Volume D: User Subroutines and Special Routines. MSC Software, 2006.

MSC.Marc®. Volume A: Theory and User Information. MSC Software, 2010.

B. Mustin. *Thermodynamisch konsistente Modellierung des Verhaltens magnetorheologischer Materialien*. Diplomarbeit, Technische Universität Dresden, 2010.

M. Nakano und H. Yamamoto. Dynamic viscoelasticity and its mechanical model of an mr suspension in oscillatory slit flow mode. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, 10(8):658–665, 1999.

J. G. Nam, K. H. Ahn, S. J. Lee, und K. Hyun. Strain stiffening of non-colloidal hard sphere suspensions dispersed in newtonian fluid near liquid-and-crystal coexistence region. *Rheologica Acta*, 50(11–12): 925–936, 2011.

J. G. Nam, K. Hyun, K. H. Ahn, und S. J. Lee. Prediction of normal stresses under large amplitude oscillatory shear flow. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 150(1):1–10, 2008.

T. Narumi, S. V. Franklin, K. W. Desmond, M. Tokuyama, und E. R. Weeks. Spatial and temporal dynamical heterogeneities approaching the binary colloidal glass transition. *Soft Matter*, 7(4):1472–1482, 2011.

L. Nasdala. *Ein viskoelastisches Schädigungsgesetz für den stationär rollenden Reifen*. Dissertation, Universität Hannover, 2000.

L. Nasdala. *FEM-Formelsammlung Statik und Dynamik*. Vieweg + Teubner, 2010. ISBN 978-3-8348-0980-3.

T. Neidhöfer, S. Sioula, N. Hadjichristidis, und M. Wilhelm. Distinguishing linear from star-branched polystyrene solutions with fourier-transform rheology. *Macromolecular Rapid Communications*, 25 (22):1921–1926, 2004.

T. Neidhöfer, M. Wilhelm, und B. Debbaut. Fourier-transform rheology experiments and finite-element simulations on linear polystyrene solutions. *Journal of Rheology*, 47(6):1351–1371, 2003.

B. I. Nelson und J. M. Dealy. *Techniques in rheological measurements*, chapter: 7 Dynamic mechanical analysis using conplex waveforms, pages 197–224. Chapman and Hall, 1993. ISBN 0 412 53490 8.

C. Netzker, H. Dal, und M. Kaliske. An endochronic plasticity formulation for filled rubber. *International Journal of Solids and Structures*, 47(18–19):2371–2379, 2010.

C. Netzker, T. Horst, K. Reincke, R. Behnke, M. Kaliske, G. Heinrich, und W. Grellmann. Analysis of stable crack propagation in filled rubber based on a global energy balance. *International Journal of Fracture*, 181(1):13–23, 2013.

T. S. K. Ng, G. H. McKinley, und R. H. Ewoldt. Large amplitude oscillatory shear flow of gluten dough: A model power-law gel. *Journal of Rheology*, 55(3):627–654, 2011.

Q. D. Nguyen und D. V. Boger. Measuring the flow properties of yield stress fluids. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 24(1):47–88, 1992.

K. Niedzwiedz, H. Buggisch, und N. Willenbacher. Extensional rheology of concentrated emulsions as probed by capillary breakup elongational rheometry (caber). *Rheologica Acta*, 49(11):1103–1116, 2010.

W. Noll. A mathematical theory of the mechanical behavior of continuous media. *Archive For Rational Mechanics and Analysis*, 2(3):197–226, 1958.

C. R. Nugent, K. V. Edmond, H. N. Patel, und E. R. Weeks. Colloidal glass transition observed in confinement. *Physical Review Letters*, 99(2):025702, July 2007.

H. Oberst. Elastische und viskose Eigenschaften von Werkstoffen, 1963.

M. Obst. *Implementierung eines viskoplastischen Materialmodells für Polypropylen in das Programmsystem Marc*. Diplomarbeit, Technische Universität Dresden, 2009.

S. Odenbach. *Ferrofluids*. Springer, 2002a. ISBN 3-540-43978-1.

S. Odenbach. *Magnetoviscous Effect in Ferrofluids*. Springer, 2002b. ISBN 3-540-43068-7.

S. Odenbach. *Colloidal Magnetic Fluids*. Springer, 2009. ISBN 978-3-540-85386-2.

S. Odenbach, W. Hufenbach, M. Gude, V. Ulbricht, und G. Heinrich. Abschlussbericht Teilprojekt B4: Neuartige Materialien mit magnetisch schaltbaren Eigenschaften (SWITCHCOMP II). September 2014. SAB–Projektnummer: 100111530.

D. Oelschlägel und W. G. Matthäus. *Numerische Methoden*. Teubner, 1988. ISBN 3-322-00473-2.

H. Oertel Jr. und E. Laurien. *Numerische Strömungsmechanik*. Springer, 1995. ISBN 3-540-58569-9.

R. W. Ogden. *Non-Linear Elastic Deformations*. Dover Publications, 1984. ISBN 0-486-69648-0.

R. C. O'Handley. *Modern magnetic materials*. Wiley, 2000. ISBN 0-471-15566-7.

J. G. Oldroyd. A rational formulation of the equations of plastic flow for a bingham solid. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 43(1):100–105, 1947a.

J. G. Oldroyd. Two-dimensional plastic flow of a bingham solid. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 43(3):383–395, 1947b.

S. Onogi, T. Masuda, und T. Matsumoto. Non-linear behavior of viscoelastic materials. i. disperse systems of polystyrene solution and carbon black. *Transactions of the Society of Rheology*, 14(2):275–294, 1970.

A. Ostermann. *Numerik der FEM*. Studienbrief, Universität Innsbruck, 2005. Studienbrief.

P. Oswald. *Rheophysics*. Cambridge University Press, 2009. ISBN 978-0-521-88362-7.

N. S. Ottosen. *The Mechanics of Constitutive Modeling*. Elsevier Science & Technology, 2005. ISBN 0-008-044606-X.

G. Ovarlez, F. Bertrand, und S. Rodts. Local determination of the constitutive law of a dense suspension of noncolloidal particles through magnetic resonance imaging. *Journal of Rheology*, 50(3):259–292, 2006.

R. G. Owens und T. N. Phillips. *Computational Rheology*. Imperial College Press, 2005. ISBN 1-86094-186-9.

M. Pahl, W. Gleißle, und H.-M. Laun. *Praktische Rheologie der Kunststoffe und Elastomere*. VDI-Verlag GmbH, 1995. ISBN 3-18-234192-8.

P. J. Pahl und R. Damrath. *Mathematische Grundlagen der Ingenieurinformatik*. Springer, 2000. ISBN 3-540-60501-0.

R. Pal. *Rheology of particulate dispersions and composites*. CRC Press, 2007. ISBN 1-57444-520-0.

W. Pan, B. Caswell, und G. E. Karniadakis. Rheology, microstructure and migration in brownian colloidal suspensions. *Langmuir*, 26(1):133–142, Sept. 2009.

Panhans. Identifikation der Materialparameter eines viskoplastischen Materialmodells vom Überspannungstyp für den Einsatzstahl 20MoCrS4. *Technische Mechanik*, 24(2):105–115, 2004.

Y. Pappas und D. Klingenberg. Simulations of magnetorheological suspensions in poiseuille flow. *Rheologica Acta*, 45(5):621–629, 2006.

L. Papula. *Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler*. Band 2. Vieweg, 10., durchgesehene auflage edition, 2001. ISBN 3-528-94237-1.

J. Paredes, N. Shahidzadeh-Bonn, und D. Bonn. Shear banding in thixotropic and normal emulsions. *Journal of Physics: Condensed Matter*, 23(28):284116, 2011.

H. Parisch. *Festkörper-Kontinuumsmechanik*. Vieweg + Teubner, 2003. ISBN 978-3-519-00434-9.

M. Parthasarathy und D. J. Klingenberg. Electrorheology: Mechanisms and models. *Materials Science and Engineering: R: Reports*, 17(2):57–103, 1996.

M. Paul. *Digitale Meßwertverarbeitung*. VDE-Verlag GmbH, 1987. ISBN 3-8007-1513-9.

S. M. Peker und S. S. Helvaci. *Solid-Liquid Two Phase Flow*. Elsevier, 2008. ISBN 978-0-444-52237-5.

X. Peng, F. Shi, und Y. Dai. Magnetorheological fluids modelling: without the no-slip boundary condition. *International Journal of Materials and Product Technology*, 31(1):27–35, 2008.

G. Petekidis, A. MoussaÃ¯d, und P. N. Pusey. Rearrangements in hard-sphere glasses under oscillatory shear strain. *Physical Review E*, 66(5):051402, 2002.

K. N. Pham, G. Petekidis, D. Vlassopoulos, S. U. Egelhaaf, W. C. K. Poon, und P. N. Pusey. Yielding behavior of repulsion- and attraction-dominated colloidal glasses. *Journal of Rheology*, 52(2):649–676, 2008.

K. N. Pham, G. Petekidis, D. Vlassopoulos, S. U. Egelhaaf, P. N. Pusey, und W. C. K. Poon. Yielding of colloidal glasses. *EPL (Europhysics Letters)*, 75(4):624, 2006.

W. Philippoff. Vibrational measurements with large amplitudes. *Transactions of the Society of Rheology*, 10(1):317–334, 1966.

A. Pipkin und R. Rivlin. Mechanics of rate-independent materials. *ZAMP - Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik*, 16(3):313–327, 1965.

A. C. Pipkin. *Lectures on Viscoelasticity Theory*. Springer, 1972. ISBN 3-540-90030-6.

R. Plato. *Numerische Mathematik kompakt*. Vieweg, 2006. ISBN-10 3-8348-0277-8.

J. Popplewell und R. E. Rosensweig. Magnetorheological fluid composites. *Journal of Physics D: Applied Physics*, 29(9):2297–2303, 1996.

H. Pouriayevali, S. Arabnejad, Y. Guo, und V. Shim. A constitutive description of the rate-sensitive response of semi-crystalline polymers. *International Journal of Impact Engineering*, 62:35–47, 2013.

W. Prager. *Einführung in die Kontinuumsmechanik*. Birkhäuser Basel, 1961a. ASIN B0000MGPA.

W. Prager. Linearization in visco-plasticity. *Österreichisches Ingenieur-Archiv*, 15:152–157, 1961b.

A. M. Puzrin. *Constitutive Modelling in Geomechanics*. Springer, 2012. ISBN 978-3-642-27394-0.

J. Rabinow. The magnetic fluid clutch. *Transactions of the American Institute of Electrical Engineers*, 67(2):1308–1315, 1948.

R. Racho, P. Kuklinski, und K. Krause. *Werkstoffe für die Elektrotechnik und Elektronik*. VEB Deutscher Verlag für Grundstoffindustrie Leipzig, 1987. ISBN 3-342-00208-5.

K. Rajagopal und A. Wineman. Flow of electro-rheological materials. *Acta Mechanica*, 91(1–2):57–75, 1992.

P. J. Rankin, A. T. Horvath, und D. J. Klingenberg. Magnetorheology in viscoplastic media. *Rheologica Acta*, 38(5):471–477, 1999.

M. A. Rao. *Rheology of Fluid and Semisolid Foods*. Springer, 2007. ISBN 978-0-387-70929-1.

O. Raynauld und S. Fath. MagneRide-Stoßdämpfer für den Range Rover Evoque. *ATZ – Automobiltechnische Zeitschrift*, 2:136–141, 2012.

A. Recknagel. *Physik – Elektrizität und Magnetismus*. VEB Verlag Technik, 1990. ISBN 3-341-00879-9.

M. J. Reimers und J. M. Dealy. Sliding plate rheometer studies of concentrated polystyrene solutions: Large amplitude oscillatory shear of a very high molecular weight polymer in diethyl phthalate. *Journal of Rheology*, 40(1):167–186, 1996.

M. J. Reimers und J. M. Dealy. Sliding plate rheometer studies of concentrated polystyrene solutions: Nonlinear viscoelasticity and wall slip of two high molecular weight polymers in tricresyl phosphate. *Journal of Rheology*, 42(3):527–548, 1998.

M. Reiner. The deborah number. *Physics Today*, 17(1):62–62, 1964.

M. Reiner. *Rheologie*. VEB Fachbuchverlag Leipzig, 1968. Lizenznummer 114-210/115/69.

K. Reinheimer, M. Grosso, F. Hetzel, J. Kübel, und M. Wilhelm. Fourier transform rheology as an innovative morphological characterization technique for the emulsion volume average radius and its distribution. *Journal of Colloid and Interface Science*, 380(1):201–212, 2012.

K. Reinheimer, M. Grosso, und M. Wilhelm. Fourier transform rheology as a universal non-linear mechanical characterization of droplet size and interfacial tension of dilute monodisperse emulsions. *Journal of Colloid and Interface Science*, 360(2):818–825, 2011.

F. Renou, J. Stellbrink, und G. Petekidis. Yielding processes in a colloidal glass of soft star-like micelles under large amplitude oscillatory shear (laos). *Journal of Rheology*, 54(6):1219–1242, 2010.

G. Rettig. Beschreibung granularer Medien im Rahmen einer Kontinuumstheorie. *ZAMM - Journal of Applied Mathematics and Mechanics / Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, 64(12):517–527, 1984.

J. P. Rich, P. S. Doyle, und G. H. McKinley. Magnetorheology in an aging, yield stress matrix fluid. *Rheologica Acta*, 51(7):579–593, 2012.

J. P. Rich, J. Lammerding, G. H. McKinley, und P. S. Doyle. Nonlinear microrheology of an aging, yield stress fluid using magnetic tweezers. *Soft Matter*, 7(21):9933–9943, 2011.

C. G. Robertson und X. Wang. Isoenergetic jamming transition in particle-filled systems. *Physical Review Letters*, 95(7):075703, Aug. 2005.

S. A. Rogers. A sequence of physical processes determined and quantified in laos: An instantaneous local 2d/3d approach. *Journal of Rheology*, 56(5):1129–1151, 2012.

S. A. Rogers, B. M. Erwin, D. Vlassopoulos, und M. Cloitre. Oscillatory yielding of a colloidal star glass. *Journal of Rheology*, 55(4):733–752, 2011a.

S. A. Rogers, B. M. Erwin, D. Vlassopoulos, und M. Cloitre. A sequence of physical processes determined and quantified in laos: Application to a yield stress fluid. *Journal of Rheology*, 55(2):435–458, 2011b.

S. A. Rogers und M. P. Lettinga. A sequence of physical processes determined and quantified in large-amplitude oscillatory shear (laos): Application to theoretical nonlinear models. *Journal of Rheology*, 56(1):1–25, 2012.

H. Rohm und A. Kovac. Effects of starter cultures on small deformation rheology of stirred yoghurt. *LWT - Food Science and Technology*, 28(3):319–322, 1995.

R. E. Rosensweig. Magnetische Flüssigkeiten. *Spektrum der Wissenschaft*, 2:88–98, 1982.

R. E. Rosensweig. On magnetorheology and electrorheology as states of unsymmetric stress. *Journal of Rheology (1978-present)*, 39(1):179–192, 1995.

F. Rouyer, S. Cohen-Addad, und R. HÃ¶hler. Is the yield stress of aqueous foam a well-defined quantity? *Colloids and Surfaces A: Physicochemical and Engineering Aspects*, 263(1):111–116, 2005.

W. B. Russel, D. A. Saville, und W. R. Schowalter. *Colloidal dispersions*. Cambridge University Press, 1989. ISBN 0 521 42600 6.

W. Rust. *Nichtlineare Finite–Elemente–Berechnungen*. Vieweg + Teubner, 2009. ISBN 978-3-8351-0232-3.

S. Rwei, H. Lee, S. Yoo, L. Wang, und J. Lin. Magnetorheological characteristics of aqueous suspensions that contain fe3o4 nanoparticles. *Colloid & Polymer Science*, 283(11):1253–1258, 2005.

A. Saint-Jalmes und D. J. Durian. Vanishing elasticity for wet foams: Equivalence with emulsions and role of polydispersity. *Journal of Rheology*, 43(6):1411–1422, 1999.

A. Samir. *Konstitutive Werkstoffbeschreibung im Kriech- und Kriechermüdungsbereich am Beispiel des warmfesten Schmiedestahls 28CrMoNiV4-9*. Dissertation, Technischen Universität Darmstadt, 2007.

S. Samouhos und G. McKinley. Carbon nanotube-magnetite composites, with applications to developing unique magnetorheological fluids. *Journal of Fluids Engineering*, 129(4):429–437, 2007.

A. Sato, F. Perrechil, und R. Cunha. Rheological behavior of suspensions dispersed in non-newtonian matrix. *Applied Rheology*, 23(4):45397, 2013.

P. Saxena, M. Hossain, und P. Steinmann. A theory of finite deformation magneto-viscoelasticity. *International Journal of Solids and Structures*, 50(24):3886–3897, 2013.

H. Schade und E. Kunz. *Strömungslehre*. Walter de Gruyter, 1989. ISBN 3-11-011873-4.

H. Schade und K. Neemann. *Tensoranalysis*. de Gruyter, 2009. ISBN 978-3-11-020696-8.

M. Schäfer. *Numerik im Maschinenbau*. Springer, 1999. ISBN 3-540-65391-0.

R. Schäfer. *Numerische Simulation freier Oberflächen von Ferrofluiden in statischen Magnetfeldern*. Dissertation, Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg, 2000.

M. Schanz. *Allgemeine numerische Methoden*. Studienbrief, Technische Universität Braunschweig, 2000. Studienbrief.

R. Scheithauer. *Signale und Systeme*. Teubner, 2004. ISBN 3 3-519-16425-6.

E. Schmutzer. *Grundlagen der Theoretischen Physik*, volume Band 1. Wiley, 2005. ISBN 3-527-40555-0.

M. Schneider, E. Koos, und N. Willenbacher. Highly conductive, printable pastes from capillary suspensions. *Scientific Reports*, 6:31367, 2016.

W. Schnell, D. Gross, und W. Hauger. *Technische Mechanik 2 - Elastostatik*. Springer, 2002. ISBN 3-540-43108-X.

L. Schreiber. *Einführung in die Plastizitätstheorie*. Studienbrief, Universität Kassel, 1997.

J. Schröder. Theoretische und algorithmische Konzepte zur phänomenologischen Beschreibung anisotropen Materialverhaltens. Universität Hannover, 1996. Bericht-Nr. F 96/3.

M. Schwartz. Shear-induced order in suspensions. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 269(2–4):395–402, 1999.

M. Schwartz. *Smart Materials*. Wiley, 2002. ISBN 0-471-17780-6.

R. Schwarzl. *Polymermechanik*. Springer, 1990. ISBN 3-540-51965-3.

H. Schwetlick und H.-G. Roos. *Numerische Mathematik*. B.G. Teubner, 1999. ISBN 3-519-00221-3.

G. W. Scott Blair. *A survey of general and applied rheology*. Sir Isaac Pitman & Sons, 1949. ASIN B001OYAUBA.

R. Sedlacek. *Finite Elemente in der Werkstoffmechanik*. Dr. Hut, 2009. ISBN 978-3-86853-027-8.

K. Sedlan. *Viskoelastisches Materialverhalten von Elastomerwerkstoffen - Experimentelle Untersuchung und Modellbildung*. Dissertation, Universität Gesamthochschule Kassel, 2000. ISBN 3-89792-050-6.

H. See. Magneto-rheological suspensions - physical mechanisms and modeling. *Nihon Reoroji Gakkaishi*, 31(5):297–303, 2003.

J. P. Segovia-Gutierrez, C. L. A. Berli, und J. de Vicente. Nonlinear viscoelasticity and two-step yielding in magnetorheology: A colloidal gel approach to understand the effect of particle concentration. *Journal of Rheology*, 56(6):1429–1448, 2012.

Y. M. Shkel und D. J. Klingenberg. *A thermodynamic approach to field-induced stresses in electro- and magnetoactive composites*, volume Proceedings of the 7th international conference on Electrorheological Fluids and Magnetorheological Suspensions, 2000. ISBN 981-02-4258-1.

Y. M. Shkel und D. J. Klingenberg. Magnetorheology and magnetostriction of isolated chains of nonlinear magnetizable spheres. *Journal of Rheology*, 45(2):351–368, 2001.

Z. Shulman, V. Kordonsky, E. Zaltsgendler, I. Prokhorov, B. Khusid, und S. Demchuk. Structure, physical properties and dynamics of magnetorheological suspensions. *International Journal of Multiphase Flow*, 12(6):935–955, 1986.

A. Shutov und R. Kreißig. Finite strain viscoplasticity with nonlinear kinematic hardening: Phenomenological modeling and time integration. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 197(21–24):2015–2029, 2008.

A. Shutov, S. Panhans, und R. Kreißig. A phenomenological model of finite strain viscoplasticity with distortional hardening. *ZAMM - Journal of Applied Mathematics and Mechanics / Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, 91(8):653–680, 2011.

H. Si, X. Peng, und X. Li. A micromechanical model for magnetorheological fluids. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, 19(1):19–23, 2008.

C. L. Sieglaff. Proposed nomenclature for steady shear-flow and linear viscoelastic behavior. *Transactions of the Society of Rheology*, 20(2):311–317, 1976.

G. Silber und F. Steinwender. *Bauteilberechnung und Optimierung mit der FEM*. B. G. Teubner, 2005. ISBN 3-519-00425-9.

H. G. Sim, K. H. Ahn, und S. J. Lee. Large amplitude oscillatory shear behavior of complex fluids investigated by a network model: a guideline for classification. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 112(2):237–250, 2003.

J. Simo und T. Hughes. *Computational Inelasticity*, volume 7 of *Interdisciplinary Applied Mathematics*. Springer, corrected second edition, 2000. ISBN 0-387-97520-9.

J. C. Simo, J. G. Kennedy, und S. Govindjee. Non-smooth multisurface plasticity and viscoplasticity. loading/unloading conditions and numerical algorithms. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 26(10):2161–2185, 1988.

T. Simon, F. Reitich, M. Jolly, K. Ito, und H. Banks. The effective magnetic properties of magnetorheological fluids. *Mathematical and Computer Modelling*, 33(1–3):273–284, 2001.

R. Smith. *Smart Material Systems*. Society for Industrial and Applied Mathematics, Jan. 2005. ISBN 0-89871-583-0.

A. K. Sood. *Solid State Physics*, chapter: Structural Ordering in Colloidal Suspensions, pages 1–73. Academic Press, 1991. ISBN 0-12-607745-2.

A. J. M. Spencer. *Continuum Mechanics*. Dover Publications, 2004. ISBN 0-486-43594-6.

B. Spencer Jr. und S. Dyke. Phenomenological model for magnetorheological dampers. *Journal of Engineering Mechanics*, 123(3):230–238, 1997.

C. Spieler. Modellierung der Magnetisierungskurven von BASF$^{\mathrm{TM}}$ CC Pulver. 2012.

C. Spieler, M. Kästner, J. Goldmann, J. Brummund, und V. Ulbricht. Xfem modeling and homogenization of magnetoactive composites. *Acta Mechanica*, 224(11):2453–2469, 2013.

C. Spieler, P. Metsch, M. Kästner, und V. Ulbricht. Microscale modeling of magnetoactive composites undergoing large deformations. *Technische Mechanik*, 34(1):39 – 50, 2014.

J. H. Spurk. *Strömungslehre*. Springer, 1996. ISBN 3-540-61308-0.

S. D. Stearns und D. R. Hush. *Digitale Verarbeitung analoger Signale*. Oldenbourg, 1999. ISBN 3-486-24528-7.

J. F. Steffe. *Rheological methods in food process engineering*. Freeman Press, 1996. ISBN 0-9632036-1-4.

H. Stöcker. *Taschenbuch der Physik*. Harri Deutsch, fünfte, korrigierte edition, 2005. ISBN 3-8171-1720-5.

J. Stoer und R. Bulisch. *Numerische Mathematik 2*. Springer, 2005. ISBN 3-540-23777-1.

J. Stokes und J. Telford. Measuring the yield behaviour of structured fluids. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 124(1–3):137–146, 2004.

J. R. Stokes und W. J. Frith. Rheology of gelling and yielding soft matter systems. *Soft Matter*, 4(6): 1133–1140, 2008.

Z. Strecker, J. Roupec, I. Mazurek, O. Machacek, M. Kubik, und M. Klapka. Design of magnetorheological damper with short time response. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, 26(14): 1951–1958, 2015.

T. Streilein. *Erfassung formativer Verfestigung in viskoplastischen Stoffmodellen*. Dissertation, Technische Universität Braunschweig, 1997.

T. Strivens. The shear thickening effect in concentrated dispersion systems. *Journal of Colloid and Interface Science*, 57(3):476–487, Dec. 1976.

D. Susan-Resiga. A rheological model for magneto-rheological fluids. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, 20(8):1001–1010, 2009.

I. Szabo. *Höhere Technische Mechanik*. Springer, 2001. ISBN 3-540-67653-8.

T. F. Tadros. *Rheology of Dispersions*. Wiley-VCH Verlag, 2010. ISBN 978-3-527-32003-5.

X. Tang, Y. Chen, und H. Conrad. Structure and interaction force in a model magnetorheological system. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, 7(5):517–521, 1996.

X. Tang und H. Conrad. Quasistatic measurements on a magnetorheological fluid. *Journal of Rheology*, 40(6):1167–1178, 1996.

X. Tang und H. Conrad. An analytical model for magnetorheological fluids. *Journal of Physics D: Applied Physics*, 33(23):3026–3032, 2000.

X. Tang, X. Zhang, und R. Tao. Flexible fixture device with magneto-rheological fluids. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, 10(9):690–694, 1999.

X. Tang, X. Zhang, R. Tao, und Y. Rong. Structure-enhanced yield stress of magnetorheological fluids. *Journal of Applied Physics*, 87(5):2634–2638, 2000.

R. I. Tanner. *Engineering Rheology*. Oxford University Press, 2002. ISBN 0-19-856473-2.

R. I. Tanner und K. Walters. *Rheology: An Historical Perspective*. Elsevier, 1998. ISBN 0 444 82945 8.

R. Tao. Super-strong magnetorheological fluids. *Journal of Physics: Condensed Matter*, 13(50):R979–R999, 2001.

T.-T. Tee und J. M. Dealy. Nonlinear viscoelasticity of polymer melts. *Transactions of the Society of Rheology*, 19(4):595–615, 1975.

M. Tikmani, J. Boujlel, und P. Coussot. Assessment of penetrometry technique for measuring the yield stress of muds and granular pastes. *Applied Rheology*, 23(3):34401, 2013.

R. F. Tinder. *Tensor Properties of SSolid: Phenomenological Development of the Tensor Properties of Crystals*. Morgan & Claypool, 2008. ISBN 1598293486.

C. Tiu, J. Guo, und P. H. T. Uhlherr. Yielding behaviour of viscoplastic materials. *Journal of Industrial and Engineering Chemistry*, 12(5):653–662, 2006.

A. V. Tobolsky. *Mechanische Eigenschaften und Strukturen von Polymeren*. Berliner Union Stuttgart, 1967. ASIN B0000BTN8B.

E. A. Toorman. Modelling the thixotropic behaviour of dense cohesive sediment suspensions. *Rheologica Acta*, 36(1):56–65, 1997.

V. Trappe, V. Prasad, L. Cipelletti, P. N. Segre, und D. A. Weitz. Jamming phase diagram for attractive particles. *Nature*, 411(6839):772–775, 2001.

A.-M. Trendler. Experimental studies on magnetorheological model suspension. *International Journal of Modern Physics B*, 21(28–29):4967–4973, 2007.

R. Trostel. *Materialmodelle in der Ingenieurmechanik*. Vieweg, 1999. ISBN 3-528-03912-4.

C. Truesdell und W. Noll. *The non-linear Field Theories of Mechanics*. Springer, 2004. ISBN 3-540-02779-3.

C. Truesdell und R. A. Toupin. *Prinzipien der klassischen Mechanik und Feldtheorie*, chapter: The Classical Field Theories, pages 226 –744. Springer, 1960.

W.-W. Tsang und J. Dealy. The use of large transient deformations to evaluate rheological models for molten polymers. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 9(3):203–222, 1981.

N. Tschoegl, W. Knauss, und I. Emri. Poisson's ratio in linear viscoelasticity – a critical review. *Mechanics of Time-Dependent Materials*, 6(1):3–51, 2002.

N. W. Tschoegl. *The Phenomenological Theory of Linear Viscoelastic Behavior*. Springer, 1989. ISBN 3-540-19173-9.

P. Uhlherr, J. Guo, C. Tiu, X.-M. Zhang, J.-Q. Zhou, und T.-N. Fang. The shear-induced solid-liquid transition in yield stress materials with chemically different structures. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 125(2):101–119, 2005.

V. Ulbricht. *Berechnung von Rotationsschalen bei nichtlinearem Deformationsverhalten*. Dissertation, Technische Universität Dresden, 1976.

H. Umstätter. *Einführung in die Viskosimetrie und Rheometrie*. Springer, 1952.

K. Valanis. On the substance of rivlin's remarks on the endochronic theory. *International Journal of Solids and Structures*, 17(2):249–265, 1981.

K. Valanis. Back stress and jaumann rates in finite plasticity. *International Journal of Plasticity*, 6(3): 353–367, 1990.

K. Valanis und J. Fan. A numerical algorithm for endochronic plasticity and comparison with experiment. *Computers & Structures*, 19(5–6):717–724, 1984.

K. Valanis und C.-F. Lee. Some recent developments of the endochronic theory with applications. *Nuclear Engineering and Design*, 69(3):327–344, 1982.

K. Valanis und H. Read. An endochronic plasticity theory for concrete. *Mechanics of Materials*, 5(3): 277–295, 1986.

K. C. Valanis. A theory of viscoplasticity without a yield surface part i - general theory. December 1970.

K. C. Valanis. Endochronic theory with proper hysteresis loop closure properties. Januar 1971a.

K. C. Valanis. Fundamental consequences of a new intrinsic time measure. plasticity as a limit of the endochronic theory. Januar 1971b.

K. C. Valanis. A theory of viscoplasticity without a yield surface part i - general theory. *Archives of Mechanics*, 23(4):517–533, 1971c.

K. C. Valanis. A theory of viscoplasticity without a yield surface part ii - application to mechanical behavior of metals. *Archives of Mechanics*, 23(4):535–551, 1971d.

K. C. Valanis. A theory of viscoplasticity without a yield surface part ii - application to mechanical behavior of metals. Januar 1971e.

K. C. Valanis. *Irreversible thermodynamics of contious media*. Springer, 1972. ISBN 3-211-81127-3.

K. C. Valanis. Effect of prior deformation on cyclic response of metals. *Journal of Applied Mechanics*, 41(2):441–447, 1974.

K. C. Valanis. On the foundations of the endochronic theory of viscoplasticity. *Archives of Mechanics*, 27(5–6):857–868, 1975.

K. C. Valanis. *Constitutive equations in viscoplasticity: phenomenological and physical aspects*, volume 21, chapter: Some recent developments in the endochronic theory of plasticity - the concept of internal barriers, pages 15–32. The American Society of Mechanical Engineers, 1976. ASIN B0000EGF3W.

K. C. Valanis. Fundamental consequences of a new intrinsic time measure. plasticity as a limit of the endochronic theory. *Archives of Mechanics*, 32(2):171–191, 1980.

K. C. Valanis. Partial integrability as the basis for the existence of entropy in irreversible systems. *ZAMM - Journal of Applied Mathematics and Mechanics / Zeitschrift f'ur Angewandte Mathematik und Mechanik*, 63(2):73–80, Jan. 1983.

K. C. Valanis. Continuum foundations of endochronic plasticity. *Journal of Engineering Materials and Technology*, 106:367–375, 1984.

K. C. Valanis. An endochronic plasticity model for isst soils. 1988.

K. C. Valanis und J. Fan. Endochronic analysis of cyclic elastoplastic strain fields in a notched plate. *Journal of Applied Mechanics*, 50(4a):789–794, 1983.

K. C. Valanis und C. F. Lee. Endochronic theory of cyclic plasticity with applications. *Journal of Applied Mechanics*, 51(2):367–374, 1984.

K. C. Valanis und H.-C. Wu. Endochronic representation of cyclic creep and relaxation of metals. *Journal of Applied Mechanics*, 42(1):67–73, 1975.

M. van der Hoef, M. van Sint Annaland, und J. Kuipers. Computational fluid dynamics for dense gas–solid fluidized beds: a multi-scale modeling strategy. *Chemical Engineering Science*, 59(22–23):5157–5165, 2004.

F. Varnik, L. Bocquet, und J.-L. Barrat. A study of the static yield stress in a binary lennard-jones glass. *Journal of Chemical Physics*, 120(6):2788–2801, 2004.

Verein Deutscher Ingenieure. *VDI-Wärmeatlas*. Springer, 2006. ISBN 3-540-25503-6.

J. d. Vicente, D. J. Klingenberg, und R. Hidalgo-Alvarez. Magnetorheological fluids: a review. *Soft Matter*, 7(8):3701–3710, 2011.

J. d. Vicente und J. Ramirez. Effect of friction between particles in the dynamic response of model magnetic structures. *Journal of Colloid and Interface-Science*, 316(2):867–876, 2007.

O. Volkova, G. Bossis, M. Guyot, V. Bashtovoi, und A. Reks. Magnetorheology of magnetic holes compared to magnetic particles. *Journal of Rheology*, 44(1):91–104, 2000.

K. Walters. *Rheometry*. Chapman and Hall, 1975. ISBN 0-470-91926-4.

K. Walters. *Rheometry: Industrial Applications*. Research Studies Press, 1980. ISBN 0 471 27878 5.

D. H. Wang und W. H. Liao. Magnetorheological fluid dampers: a review of parametric modelling. *Smart Materials and Structures*, 20(2):023001, 2011.

Z. Wang und C. Holm. Structure and magnetic properties of polydisperse ferrofluids: A molecular dynamics study. *Physical Review E*, 68:041401, 2003.

J. R. V. Wazer, J. W. Lyons, K. Y. Kim, und R. E. Colwell. *Viscosity and Flow Measurement*. Interscience Publishers, 1963. ISBN 0470901055.

E. R. Weeks. *Statistical Physics of Complex Fluids*, chapter: Soft Jammed Materials, pages 2–1 – 2–87. Tohoku University Press, 2007. OCLC 228277271.

D. Weipert, T. H.-D, und E. Windhab. *Rheologie der Lebensmittel*. Behr's Verlag, 1993. ISBN 3-86022-162-0.

K. D. Weiss, J. D. Carlson, und D. A. Nixon. Viscoelastic properties of magneto- and electro-rheological fluids. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, 5(6):772–775, 1994.

S. Werdin. *Parametrische Modelle zur Beschreibung des dynamischen Verhaltens von Metall-Gummi-Bauteilen*. Dissertation, Technische Universität Dresden, 1996.

N. Wereley. *Magnetorheology*. RSC Publishing, 2014. ISBN 978-1-84973-667-1.

H. Werkle. *Finite Elemente in der Baustatik*. Vieweg, 3., aktualisierte und erweiterte edition, 2008. ISBN 978-3-528-28882-2.

M. Werner. *Signale und Systeme*. Vieweg, 2000. ISBN 3-528-03929-9.

A. Wiehe, S. Kern, und J. Maas. Rotatorischer MRF-Aktor für einen Türassistenten (Rotary MRF-Actuator for an Automotive Door Assistent). *Automatisierungstechnik*, 56(3):155–164, 2008.

J. Wieser. *Zum Deformationsverhalten thermoplastischer Kunststoffe unter ein- und mehrachsiger Beanspruchungen*. VDI-Verlag GmbH, 1999. ISBN 3-18-354805-4.

M. Wilhelm. Fourier-transform rheology. *Macromolecular Materials and Engineering*, 287(2):83–105, 2002.

M. Wilhelm, D. Maring, und H.-W. Spiess. Fourier-transform rheology. *Rheologica Acta*, 37(4):399–405, 1998.

M. Wilhelm, P. Reinheimer, und M. Ortseifer. High sensitivity fourier-transform rheology. *Rheologica Acta*, 38(4):349–356, 1999a.

M. Wilhelm, P. Reinheimer, M. Ortseifer, T. Neidhöfer, und H. W. Spiess. The crossover between linear and non-linear mechanical behaviour in polymer solutions as detected by fourier-transform rheology. *Rheologica Acta*, 39(3):241–246, 2000.

M. Wilhelm, P. Reinheimer, M. Ortseifer, und H. Spiess. Rheologische Charakterisierung von Materialien im nicht-linearen Bereich bei Anwendung oszillatorischer Verscherungen. *Kautschuk Gummi Kunststoffe*, 52(11):754–757, 1999b.

N. Willenbacher und K. Georgieva. *Product design and engineering*, chapter: Rheology of disperse systems, pages 7–74. Wiley, 2013. ISBN 978-3-527-33220-5.

K. Wilmanski. *Thermomechanics of Continua*. Springer, 1998. ISBN 3-540-64141-6.

A. S. Wineman und K. R. Rajagopal. On constitutive equations for electrorheological materials. *Continuum Mechanics and Thermodynamics*, 7(1):1–22, 1995.

W. M. Winslow. Induced fibration of suspensions. *Journal of Applied Physics*, 20(12):1137–1140, 1949.

H. Winter und M. Mours. *Neutron Spin Echo Spectroscopy Viscoelasticity Rheology*, volume 134, chapter: Rheology of Polymers Near Liquid-Solid Transitions, pages 165–234. Springer, 1997. ISBN 3-540-62713-8.

D. Wolf. *Signaltheorie*. Springer, 1998. ISBN 3-540-65793-2.

R. Worthoff. *Technische Rheologie*. Wiley-VCH, 2013. ISBN 978-3-527-33604-3.

C. Wrana. *Dynamisch-mechanische Analyse von gefüllten Elastomersystemen*. Dissertation, Universität Ulm, 1996.

P. Wriggers. *Nichtlineare Finite-Element-Methoden*. Springer, 2001. ISBN 3-540-67747-X.

H.-C. Wu. *Continuum Mechanics and Plasticity*. Chapman and Hall/CRC Press, 2005. ISBN 1-58488-363-4.

O. Wünsch. *Schwingungsinduzierte Sedimentation in viskoplastischen Fluiden*. VDI-Verlag GmbH, 1994. ISBN 3-18-14407-8.

C. Xu, M. Fieß, und N. Willenbacher. Impact of wall slip on screen printing of front-side silver pastes for silicon solar cells. *IEEE Journal of Photovoltaics*, 7(1):129–135, 2017.

A. Yadav, R. Calhoun, P. E. Phelan, A. K. Vuppu, A. A. Garcia, und M. Hayes. Dynamics of rotating paramagnetic particles simulated by lattice boltzmann and particle dynamics methods. *IEE Proceedings – Nanobiotechnology*, 153(6):145–150, 2006.

H. Yamaguchi. *Engineering Fluid Mechanics*. Springer, 2008. ISBN 978-1-4020-6741-9.

Y. Yang, L. Li, und G. Chen. Static yield stress of ferrofluid-based magnetorheological fluids. *Rheologica Acta*, 48(4):457–466, 2009.

C. Yeh und K. Chen. A thermodynamic model for magnetorheological fluids. *Continuum Mechanics and Thermodynamics*, 9(5):273–291, 1997.

A. S. Yoshimura und R. K. Prud'homme. Response of an elastic bingham fluid to oscillatory shear. *Rheologica Acta*, 26(5):428–436, 1987.

A. S. Yoshimura, R. K. Prud'homme, H. M. Princen, und A. D. Kiss. A comparison of techniques for measuring yield stresses. *Journal of Rheology*, 31(8):699–710, 1987.

J. Yosick und A. Giacomin. Can nonlinear deformation amplify subtle differences in linear viscoelasticity? *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 66(2):193–212, 1996.

J. A. Yosick, A. Giacomin, und P. Moldenaers. A kinetic network model for nonlinear flow behavior of molten plastics in both shear and extension. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 70(1–2): 103–123, 1997.

W. Yu, P. Wang, und C. Zhou. General stress decomposition in nonlinear oscillatory shear flow. *Journal of Rheology*, 53(1):215–238, 2009.

F. Yziquel, P. Carreau, M. Moan, und P. Tanguy. Rheological modeling of concentrated colloidal suspensions. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 86(1–2):133–155, 1999a.

F. Yziquel, P. J. Carreau, und P. A. Tanguy. Non-linear viscoelastic behavior of fumed silica suspensions. *Rheologica Acta*, 38(1):14–25, 1999b.

X. Z. Zhang, X. L. Gong, P. Q. Zhang, und Q. M. Wang. Study on the mechanism of the squeeze-strengthen effect in magnetorheological fluids. *Journal of Applied Physics*, 96(4):2359–2364, 2004.

H. Zhu, Y. Kim, und D. De Kee. Non-newtonian fluids with a yield stress. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 129(3):177–181, 2005.

H. Zhu, Z. Zhou, R. Yang, und A. Yu. Discrete particle simulation of particulate systems: Theoretical developments. *Chemical Engineering Science*, 62(13):3378–3396, 2007.

L. Zhu, N. Sun, K. Papadopoulos, und D. De Kee. A slotted plate device for measuring static yield stress. *Journal of Rheology*, 45(5):1105–1122, 2001.

O. Zienkiewicz. *Methode der finiten Elemente*. VEB Fachbuchverlag Leipzig, 1984. ISBN 3-343-00361-1.

F. Zschunke. *Aktoren auf Basis des magnetorheologischen Effekts*. Dissertation, Universität Erlangen-Nürnberg, 2005.

R. Zurmühl. *Praktische Mathematik*. Springer, 1965.

Stichwortverzeichnis

äußere Belastung, 2
    Kraft, 2
    Moment, 2
    Verdrehung, 2
    Verschiebung, 2

Abbruchkriterium, 56, 79
    absolutes, 79, 84
    relatives, 79, 84
Abtasttheorem, 84
additiv, 38
Amplitudensweep, 56, 125
Analogieprinzip, 22, 89, 90, 97, 98, 104, 107, 114, 115, 170, 174
Anregung, *siehe* äußere Belastung
assoziierte Fließregel, 147

Backstress, 70, 118
Bahnlinie, *siehe* Trajektorie
Belastung, *siehe* Anregung
BINGHAM Modell, 31, 62, 65, 72, 122
BINGHAM-HOOKE Element, 16, 135
Bisektionsverfahren, 79
Black-Box, 14, 15, 19, 67, 173
bleibende Verformung, 42
Bogenlänge, 38, 104
    akkumulierte Schubverzerrung, 38
    generalisierte, 38
    kinematische, 38–40, 103, 105, 106, 109, 191, 193

charakteristischer Punkt, 88–91, 97–99, 113, 115
    Methode, 22, 47, 139

DEBORAH Zahl, 19
Deformationsgradient, 28
    invers, *siehe* Deformationsgradient, räumlich
    materiell, 181, 186
    räumlich, 183
dissipative Interpretation, 49
dynamische Nachgiebigkeit, 125

einfach verjüngendes Produkt, 26
einfacher Schub, 17, 27
    Normaleffekt, 28, 29
Einheitstensor, 182
EINSTEINsche Summationsvereinbahrung, 26
elastische Interpretation, 48, 50
elastische trial Spannung, 78
Elastizität, 40, 59
Elastizitätsmodul, 46
elektrorheologisches Fluid, 12, 15
endochrone Theorie, 103
    differentielle Darstellung, 105
    integrale Darstellung, 105
    Korrespondenzprinzip, 104, 105
Entfestigung, 41
EULERsche Formulierung, 25, 26, 183, 186
EULERscher Verzerrungstensor, 28, 184–187
EULER-Rückwärts, *siehe* Zeitintegration
EULERscher Deformationsgeschwindigkeitstensor, 29, 185, 188, 189
Evolutionsgleichung, 104
experimentelles Fenster, 19, 31, 33, 34, 43, 56, 57, 62, 64, 66, 68, 118, 129

fest-flüssig Übergang, 2, 3, 10, 61, 63, 67, 75, 117, 126, 164, 201
Festkörper, 31, 41, 61, 62, 66, 67, 70, 169, 177
    Halb-, 41, 64
finite Deformationen, *siehe* große Deformationen
Flüssigkeit, 31, 41, 61, 62, 66, 67, 169, 177
Flüssigkeit mit Fließgrenze, *siehe* Flüssigkeit mit Fließspannung
Flüssigkeit mit Fließspannung, 8, 10, 52, 71, 81, 109, 119, 126, 128, 134, 152, 177, 178
    starr, 31, 72, 174
Flüssigkeit mit pseudo Fließspannung, 71, 109, 152
Fließbedingung, 11, 62, 63, 67, 103
Fließbeginn, 118, 126
Fließen, 2, 8, 24, 61, 62, 64–66, 72, 73, 103
    plastisch, 62, 63, 67, 103, 119, 128, 152, 170, 178, 191, 201
    ratenabhängig, *siehe* viskoses Fließen
    ratenunabhängig, *siehe* plastisches Fließen
    stationär, 65
    viskos, 62, 63
Fließfunktion, 62, 63, 76, 103, 118, 147
Fließkurve, 2, 15, 42, 66–68, 70, 81, 108, 177
    ungerade, 43, 68

Fließpunkt, 125, 127
Fließspannung, 3, 9, 36, 41, 63, 110, 117, 125, 178, 179
  LISSAJOUS Diagramm, 128
  Amplitudensweep, 125
  dynamisch, 119, 136, 170
  Kriechversuch, 129
  oszillatorische, 125
  pseudo, 104, 110
  Relaxationsversuch, 128
  scheinbar, 119, 124
  Spannungsrampe, 122
  statisch, 119
  Verzerrungsrampe, 120
Fließverzerrung, 90, 125–127
FOURIER Koeffizient, 51
FOURIER Reihe
  Amplituden-Phasen Beschreibung, 55
Frequenzsweep, 57
FT Rheologie, 46

Gedächtnis
  nachlassend, 40
  perfekt, 40
geometrisch lineare Theorie, 17, 24, 28, 50, 75, 161–163, 184–188
geometrische Linearisierung, 181
gerad-symmetrisch, 53
Gesamtspannung, 30
Geschwindigkeitsgradient, 29, 185, 188
Gleichgewicht, 30, 31
Gleichgewichtshysterese, 33–36, 40, 106, 118
  scheinbar, 33, 35
Gleichgewichtskurve, 163
  scheinbar, 34
Gleichgewichtspunkt, 30, 31
Gleichgewichtsrelation, 30, 31, 33–35, 40, 66–72, 81, 177
  scheinbar, 33
Gleichgewichtsspannung, 30, 31, 66, 68–73, 76, 106, 147, 177, 190
Gleichgewichtsverzerrung, 30, 31, 66, 69–73, 177
Grenzfallanalyse, 21, 88, 111, 170, 173
große Deformationen, 24, 28, 50
große Verschiebungen, 24, 25
große Verzerrungen, 24, 29

Halb-Festkörper, *siehe* Festkörper, Halb-
Harmonische, 51, 55
  gerade, 51, 52
  höhere, 46, 53, 84
  ungerade, 51
harmonische Materialfunktion, 57
Homogenisierung, 16

imaginäre Einheit, 47
infinitesimale Verzerrungen, *siehe* kleine Verzerrungen
innere Variable, 24, 84, 191
  Spannungstyp, 70
  Verzerrungstyp, 76, 104, 147
Intensität, 55
  normiert, 55, 79, 99, 126, 169
inverser Deformationsgradient, 28

Jamming, 8

KARUSH-KUHN-TUCKER Bedingungen, 147
kleine Rotationen, 24
kleine Verschiebungen, 24, 187
kleine Verzerrungen, 24
Koerzitivfeldstärke, 5
komplexe Viskosität, 49
komplexer Modul, 47, 48
Konfiguration, 25
Konsistenzbedingung, 147
Kontinuumsannahme, 14, 25
Korrespondenzprinzips, *siehe* endochrone Theorie
kraftgeregelt, 2
Kraftschluss, 8, 11
Kriechabbruchpunkte, 31
Kriechen, 30, 31, 70–72, 191
kritische Schubverzerrung, 23, 24, 46, 48, 50, 89, 91, 97, 110, 126, 137, 138, 140, 152–154, 156, 170, 201
  pseudo, 109
kritische Schubverzerrungsrate, 23, 48, 50, 83
kritische Spannung, 23
KRONECKER Symbol, 182

LAGRANGEscher Verzerrungstensor, 28, 183–186, 188
LAGRANGEsche Formulierung, 25, 26, 182
LAGRANGEscher Deformationsgeschwindigkeitstensor, 29, 185, 188
LAOS, 50
  LAOStrain, 50
  LAOStress, 50
lineare Viskoelastizität, 23, 49, 58, 163
linearisierte Verzerrungsmaße, 187
Linearität, 23, 50
Linearitätsgrenze, 23, 46, 50, 83
Linearoperator, 23, 48, 50
  additiv, 23
  homogen vom Grad 1, 23
LISSAJOUS Diagramm, 51, 57–59, 85, 89, 111, 170
  elliptisch, 58
  nicht-elliptisch, 58
LISSAJOUS-BOWDITCH Diagramm, *siehe* LISSAJOUS Diagramm

LVE, *siehe* lineare Viskoelastizität

magnetische Domäne, 8, 9
magnetische Feldstärke
  innere, 13
magnetische Induktion
  innere, 13
Magnetische Relaxation
  BROWN, 11
  NÉEL, 11
magnetorheologische Flüssigkeit, *siehe* magnetorheologisches Fluid
magnetorheologischer Effekt, 1, 6, 9, 10, 118, 135, 146, 153, 167
magnetorheologisches Elastomer, 15
magnetorheologisches Fluid, 1, 5, 131, 135, 146, 158, 162, 164, 169–171
  Abrasion, 6
  Agglomeration, 6
  Redispergierbarkeit, 6
  Sedimentation, 6, 9
  Suspension, 3, 5
magnetorheologisches Komposit, 1, 11, 161, 169, 171
magnetoviskoser Effekt, 9
Material mit fest-flüssig Übergang, 31, 42, 44, 61, 65–67, 71, 72, 81, 109, 119, 127, 169, 170, 177
Materialfunktion, 2, 3, 13, 15, 20, 42, 43, 46, 49, 91, 113, 148, 170
Materialklasse, 2, 31, 40, 41, 174, 175
materielle Ableitung, 184, 185, 188, 189
materielle Beschreibung, *siehe* LAGRANGEsche Formulierung
materielle Nichtlinearität, 23
materieller Punkt, 24
Messen einer
  Materialfunktion, 2
  Spannung, 2
  Verzerrung, 2
Momentankonfiguration, 25, 181, 187

Nachfließbereich, 11, 76, 77, 177
NEWTON Verfahren, 79, 123
NEWTON-Codes, 85
Nullviskosität, *siehe* Viskosität, 82
NYQUIST-SHANNON Theorem, *siehe* Abtasttheorem

Operator
  linear, 23
orthogonal, 182

Parallelschaltung
  kinematische Bedingung, 20
  kinetische Bedingung, 20, 75
Partikel Volumen Konzentration, 3, 6–8
physikalische Nichtlinearität, *siehe* materielle Nichtlinearität
PIPKIN Diagramm, 57–59, 85, 111
Plastizität, 40, 59, 63, 103, 106
  ideale, 41
  perfekte, *siehe* ideale Plastizität
  starr, 41, 42, 177
pull back, 184, 185
push forward, 29, 184, 185

räumliche Beschreibung, *siehe* EULERsche Formulierung
Rückwärtsdifferenzenquotient, 33, 77, 123
Ratenabhängigkeit, 38, 40, 46, 59, 76, 81, 120, 184
Ratenunabhängigkeit, 38, 40, 81, 103, 104, 106, 114, 152
rechtsseitiger Grenzwert, 82
Referenzkonfiguration, 25, 187
Reibelement, 31, 44, 49, 62, 71, 72, 98, 111, 115, 117, 147, 177, 178, 191
Reihenschaltung
  kinematische Bedingung, 20, 75
  kinetische Bedingung, 20
rein elastisch, 53, 57
rein viskos, 41, 53, 58
Relaxation, 30, 31, 70–72, 128, 191
Relaxationsabbruchpunkt, 30, 33
Relaxationszeit, 32, 35, 76, 132
Return-Mapping Algorithmus, 79
rheodiktisch, 65
rheologischer Fingerabdruck, 57, 59, 85, 176
Rotation, 24
  Starrkörper, 25

Sättigungsmagnetisierung, 5
SAOS, 48
Schädigung, 61, 70
Scherverdünnung, 7, 75, 76, 81, 83, 131, 146, 152, 176
Scherverdickung, 44, 76, 176
SCHOFIELD-SCOTT-BLAIR Element, 127
Schubverzerrung, 29
Shifter, 182
Soft Matter, 61, 124, 175
spannungsgeregelt, 2, 15, 30, 36
Speichermodul, 15, 48, 52
statische Hysterese, *siehe* Gleichgewichtshysterese
steady state, *siehe* stationärer Zustand
Stoffklasse, 2, 3, 31, 41, 61–64, 66–68, 169, 174, 175, 177
Stoffschluss, 11
Suspension, 5, 6
  konzentriert, 7

verdünnt, 7

Tangentenmodul, 46
technische Spannung, 17, 162
technische Verzerrung, 17, 28, 162, 187
Thixotropie, 61, 120, 126
Trajektorie, 26, 27, 182
Transformationskoeffizienten, 182
Transponierte, 181

Überspannung, 30, 69, 76, 130
ungerad-symmetrisch, 53
ungerade, 76

Verfestigung, 67, 128, 130
    isotrope, 24, 41
    kinematische, 16, 41, 67, 70
Verlustmodul, 15, 48, 52
Versagen, 70
Verschiebung, 183
verschiebungsgeregelt, 2
Verschiebungsgradient, 24
    klein, 25, 188
    materiell, 181, 183, 184, 186, 188
    räumlich, 183, 184, 186, 188
verzerrungsgeregelt, 2, 15, 30
Verzerrungspfad, 109
    Trajektorie, 109
Viskoelastizität, 15, 40
Viskoplastizität, 33, 40, 70
Viskosität, 2, 43
    differentielle, 2, 21, 43, 44, 46, 81–83, 108, 134, 136, 139
    dynamische, 43, 45, 82, 108
    gerade, 44, 176
    Nullviskosität, 9, 44, 75, 133, 134
    scheinbare, 45
Vorfließbereich, 77, 177

Wandgleiten, 11
weichmagnetisch, 5

yield stress fluid, *siehe* Flüssigkeit mit Fließspannung
Yielding, 63, 76, 176

Zeitintegration
    EULER-Rückwärts, 32, 77
    Trapezregel, 88, 197
Zweifeldtensor, 181
zweistufige Modellierungsstrategie, 17, 18

In dieser Dissertation wird das viskoplastische Schubverhalten eines magnetorheologischen Fluids (MRF) modelliert. Mithilfe eines phänomenologischen Modellierungsansatzes auf Basis nichtlinearer rheologischer Elemente können die gemessenen Fließkurven sowie Speicher- und Verlustmoduli abgebildet werden. Ein MRF ist ein Material mit fest-flüssig Übergang. Es besitzt von einem Magnetfeld abhängige Materialeigenschaften. Um diese beschreiben zu können, wird zunächst eine phänomenologische Stoffklassifizierung eingeführt. Auf deren Grundlage teilen sich Stoffe allgemein in Flüssigkeiten, Festkörper und Materialien mit fest-flüssig Übergang auf. Zur Beschreibung des Materialverhaltens von MRF werden drei viskoplastische Modelle formuliert und gegenübergestellt. Zur Identifikation der Materialparameter wird eine Identifikationsstrategie auf der Grundlage charakteristischer Punkte entwickelt. Charakteristische Punkte sind exklusive Punkte von Materialfunktionen, die analytisch beschrieben und ohne Weiteres experimentell ermittelt werden können. Analytische Ausdrücke für charakteristische Punkte der Speicher- und Verlustmoduli werden über das Analogieprinzip unter Verwendung von Lissajous Diagrammen abgeleitet. Infolgedessen können die Materialparameter durch das Auswerten algebraischer Zusammenhänge identifiziert werden, ohne nichtlineare Optimierungsverfahren anwenden zu müssen. Hierbei stellt die Fließspannung einen signifikanten Materialparameter dar. Deswegen werden die Standardverfahren zur Bestimmung der Fließspannung auf rheologische Modelle angewendet und bewertet.

Martin Boisly (geb. Obst) wurde 1984 in Dresden geboren. Er studierte von 2003 bis 2009 Maschinenbau mit der Vertiefung Angewandte Mechanik an der Technischen Universität Dresden. Die Dissertation entstand im Rahmen der Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Festkörpermechanik der Technischen Universität Dresden.

Logos Verlag Berlin

ISBN 978-3-8325-4751-6